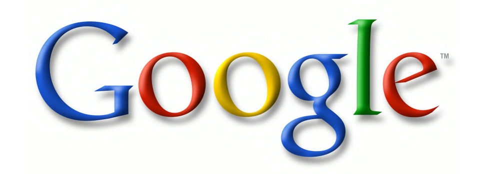


B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN [illegible]

W. F. OSGOOD

LEHRBUCH DER FUNKTIONENTHEORIE

I

B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Diese Sammlung bietet in einzelnen in sich abgeschlossenen Werken zusammenfassende Darstellungen der wichtigsten Abschnitte der mathematischen Wissenschaften und deren Anwendungen. Im einzelnen wollen diese Werke in ihrer ausführlichen, neben der rein wissenschaftlichen auch pädagogische Momente berücksichtigenden Darstellung die Möglichkeit zu selbständigem und von umfangreichen Quellenstudien unabhängigem Eindringen in die verschiedenen Disziplinen geben; in ihrer Gesamtheit aber sollen sie durch ihre eingehenden literarischen und historischen Nachweise ein genaues Bild von der modernen Entwicklung und von dem gegenwärtigen Stande der mathematischen Wissenschaften und ihrer Anwendungen darbieten.

Bisher erschienen folgende, mit Figuren, Tafeln usw. versehene, in Leinwand geb. Bände:

P. Bachmann, niedere Zahlentheorie. In 2 Bänden. [Bd. X, 1 u. 2.] I. Band. X, 402 S. 1902. n. M 14.—. II. Band. X, 480 S. 1910. n. M 17.—

E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. VIII, 268 S. 1906. n. M 7.40. [Bd. XXXIII.]

H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. VIII, 310 S. und Anhang 18 S. 1906. n. M 8.40. [Bd. XVII.]

G. H. Bryan, Thermodynamics. An introductory Treatise dealing mainly with first Principles and their direct Applications. XIV, 204 S. 1907. n. M 7.—. (Englisch.) [Bd. XXI.]

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Aufl. in 2 Bänden. [Bd. IX, 1 u. 2.]
I. Band: Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. X, 410 S. 1908. n. M 12.—
II. — Mathematische Statistik. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. X, 470 S. 1910. n. M 14.—

L. E. Dickson, linear Groups with an Exposition of the Galois Field theory. X, 312 S. 1901. n. M 12.—. (Englisch.) [Bd. VI.]

F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. In 2 Teilen. [Bd. XXXII, 1 u. 2.]
I. Teil. IV, 202 S. 1910. Geh. M 6.— Geb. M 7.—
II. — X, 372 S. 1913. Geh. M 12.— Geb. M 13.—

O. Fischer, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. X, 372 S. 1906. n. M 14.—. [Bd. XXII.]

Ph. Forchheimer, Lehrbuch der Hydraulik. 1914. [ca. 580 S.] [Bd. XXXIX.]

A. Gleichen, Lehrb. d. geometrisch. Optik. XIV, 511 S. 1902. n. M 20.—. [Bd. VIII.]

L. Henneberg, graphische Statik der starren Systeme. XV, 732 S. 1911. n. M 24.—. [Bd. XXXI.]

A. Krazer, Lehrbuch d. Thetafunktionen. XXIV, 509 S. 1903. n. M 24.—. [Bd. XII.]

H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Joh. Friesendorff. XVI, 787 S. 1907. n. M 20.—. [Bd. XXVI.]

R. von Lilienthal, Vorles. üb. Differentialgeometrie. [Bd. XXVIII, 1 u. 2.] In 2 Bd.
I. Band. Kurventheorie. VI, 368 S. 1908. n. M 12.—
II. — 1. Teil. Flächentheorie. VIII, 270 S. 1913. n. M 11.—

H. A. Lorentz, on the Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat. IV, 332 S. 1909. n. M 7.—. (Englisch.) [Bd. XXIX.]

G. Loria, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsch von Fr. Schütte. 2. Auflage. In 2 Teilen. [Bd. V, 1 u. 2.]

I. Teil: Die algebraischen Kurven. XXVI, [illegible] S. 1910. n. ℳ [illegible]
II. — Die transzendenten Kurven. VIII, [illegible] S. 1911. n. ℳ [illegible]

—— Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsch v. Fr. Schütte. 2 Teile. [Bd. XXV, 1 u. 2.]

I. Teil. Die Darstellungsmethoden. XI, [illegible] S. 1907. n. ℳ [illegible] Geb. ℳ [illegible] — Geb. ℳ [illegible]
II. — Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven u. Flächen. XV, [illegible] S. 1913. n. Geb. ℳ [illegible] Geb. ℳ 12. —

A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. XVI, 664 S. 1907. n. ℳ 16. —. [Bd. XXIV.]

E. Mehmke, Vorlesungen über Vektoren- und Punktrechnung. 2 Bände. 1912. [XXXVII.] I. Bd. Punktrechnung. 1. Teilband. VIII, 394 S. Geheftet n. ℳ 14. —

E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. VIII, 260 S. 1901. n. ℳ 9. — [Bd. VII.]

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 2. Aufl. XII, 780 S. 1912. n. ℳ 18. — [Bd. XX, 1.]

E. Pascal, die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesamtheit der neueren Forschungen. Deutsch von H. Leitzmann. XVI, 266 S. 1900. n. ℳ 10. —. [Bd. III.]

O. Perron, d. Lehre v. d. Kettenbrüchen. XII, 520 S. 1913. n. ℳ 22. — [Bd. XXXVI.]

Fr. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. X, 519 S. 1906. n. ℳ 16. —. [Bd. XIX.]

D. Seliwanoff, Lehrb. d. Differenzenrechn. VI, 92 S. 1904. n. ℳ 4. —. [Bd. XIII.]

O. Staude, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. VIII, 447 S. 1905. n. ℳ 14. —. [Bd. XVI.]

—— analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche II. Ordnung. In 2 Bänden. [Bd. XXX, 1 u. 2.] I. Band. X, 548 S. 1910. n. ℳ 22. —; II. Band. IV, S. 549—1000. 1910. n. ℳ 18. —

—— analytische Geometrie d. kub. Kegelschnitte. VIII, 242 S. 1910. [Bd. XXXVIII.]

O. Stolz und J. A. Gmeiner, theoretische Arithmetik.

I. Abteilung: Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen. 2. Aufl. [illegible] von J. A. Gmeiner [illegible] [Bd. IV, 1.]
II. — Die Lehre von den reellen und komplexen Zahlen. [illegible] [Bd. IV, 2.]

—— Einleitung i. d. Funktionentheorie. 2. Aufl. X, 598 S. 1905. n. ℳ 15. —. [Bd. XIV.]

R. Sturm, die Lehre von den geometr. Verwandtschaften. 4 Bde. [Bd. XXVII, 1—4.]

I. Band: Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. [illegible]
II. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. VIII, [illegible] S. 1908. n. ℳ 16. —
III. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. VIII, [illegible] S. 1909. n. ℳ [illegible]
IV. — [illegible] Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe. X, [illegible] S. 1909. n. ℳ [illegible]

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. X, 380 S. 1908. n. ℳ 16. — [Bd. I.]

K. Th. Vahlen, Konstruktionen u. Approximationen. 1911. XII, 349 S. n. ℳ 12. — [Bd. XXIII.]

W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausnahme der Kristalloptik). XXIV, 964 S. 1910. n. ℳ 30. — [Bd. XXXIV.]

G. Wallenberg und A. Guldberg, Theorie der linearen Differenzengleichungen. XIV, 288 S. 1911. n. ℳ 10. — [Bd. XXXV.]

J. G. Wallentin, Einleitung in die theoretische [illegible] X, [illegible] S. 1904. n. ℳ [illegible] [Bd. [illegible]]

E. von Weber, Vorlesungen [illegible] Theorie der partiellen Differentialgl[illegible] n. ℳ [illegible] — [Bd. II.]

A. [illegible] W[illegible] [illegible] und [illegible] [illegible] n. ℳ [illegible] [illegible] [Bd. [illegible]] [illegible]

—— [illegible]

[illegible] [Bd. [illegible]]

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XX: 1

LEHRBUCH
DER
FUNKTIONENTHEORIE

VON

DR. W. F. OSGOOD
ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER HARVARD-UNIVERSITÄT
CAMBRIDGE, MASS. (V. ST. A.)

ERSTER BAND

MIT 158 FIGUREN

ZWEITE AUFLAGE



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE.

Der erste Band dieses Werkes will eine systematische Entwicklung der Funktionentheorie auf Grundlage der Infinitesimalrechung und in engster Fühlung mit der Geometrie und der mathematischen Physik geben. Die eigentlichen Entwicklungen beginnen erst mit dem zweiten Abschnitte, Kap. 6, S. 179 [S. 214 der 2. Aufl.], und behandeln in Kap. 6 und 7 vornehmlich Funktionen, welche in einem gegebenen Bereiche der Zahlenebene eindeutig und mit einer Ableitung versehen sind. Dabei werden auch die elementaren Funktionen für komplexe Werte des Arguments, sowie die linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen besprochen. Daß die konforme Abbildung gleich von vornherein in den Vordergrund gerückt wird, braucht wohl kaum erwähnt zu werden. Hierauf wird der Cauchysche Integralsatz eingeführt, woran sich dann jener Zyklus von Lehrsätzen anknüpft, welche das natürliche Fundament für die Funktionentheorie bilden. Der hier behandelte Stoff umfaßt u. a. die Weierstraßschen Reihensätze, während die rationalen Funktionen auf ihre funktionentheoretischen Eigenschaften hin untersucht werden.

Kapitel 8 ist der Theorie der mehrdeutigen Funktionen gewidmet und bringt die Riemannschen Flächen in geometrischer Behandlungsweise, also unter ausgiebigem Gebrauche der konformen Abbildung. Mit dem 9. Kapitel über analytische Fortsetzung wird dann ein bestimmter Abschluß für die Grundlagen der Funktionentheorie erreicht.

Hierauf folgen Anwendungen der Theorie auf periodische Funktionen, sowie eine Besprechung der Reihen- und Produktentwicklungen, nebst einem Kapitel über die elementaren Funktionen vom Standpunkte der Funktionentheorie. Der Band schließt mit einer independenten Behandlung des logarithmischen Potentials, wobei der Gesichtspunkt maßgebend ist, daß die ganze Funktionentheorie auch auf dieser Grundlage, also ohne jeglichen Bezug auf das Vorhergehende, entwickelt werden kann. Die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen, sowie diejenige der bestimmten Integrale konnten in diesen Band nicht mehr aufgenommen werden.

Wie man sieht, bildet die Infinitesimalrechnung nebst einem Teile der Mengenlehre das Substrat für die analytischen Entwicklungen. An strengen Behandlungen dieses Teiles der Analysis hat es zwar seit

einer Reihe von Jahren nicht gefehlt. Indessen erscheint dabei häufig die reelle Funktionentheorie als Selbstzweck, so daß die Definitionen und Sätze weiter gefaßt werden, als für die komplexe Funktionentheorie erforderlich ist, während die Methoden erst aus ε-Beweisen herausgelesen werden müssen. Nun habe ich vor allen Dingen eine Darlegung der komplexen Funktionentheorie geben wollen, welche sich auch zum ersten Studium derselben eignet und überdies sich unmittelbar an die Infinitesimalrechnung anschließt. Darum hielt ich es für angebracht, in den einleitenden Kapiteln des Werkes die grundlegenden Sätze jenes Teiles der reellen Analysis in möglichst einfacher Formulierung zusammenzustellen, sowie die gebräuchlichen Beweismethoden der modernen Analysis mit aller Klarheit auseinander zu setzen. Im übrigen enthält Kap. 5 spezielle Untersuchungen über Punktmengen, welche für eine einwandfreie Entwicklung der Theorie unentbehrlich sind.

Indem ich mir jetzt auf Einzelheiten näher einzugehen gestatte, will ich zunächst die geometrischen Methoden zur Behandlung der gleichmäßigen Konvergenz im Falle reeller Funktionen (Kap. 3) erwähnen. Durch die geometrische Anschauung vermöge Kurven nebst dem zugehörigen Flächeninhalte und der Tangentenrichtung derselben gewinnt man eine wertvolle Einsicht in das Wesen der doppelten Grenzübergänge, deren genaue Kenntnis für ein gründliches Verständnis der Analysis doch unerläßlich ist.

In Kapitel 7 werden die Weierstraßschen Reihensätze vermöge eines Satzes von Morera behandelt, wodurch die Beweise wesentlich vereinfacht werden. Aber auch die Sätze selbst gewinnen an Deutlichkeit durch das Abstreifen des Nebensächlichen, welches in der häufigen Erwähnung von Potenzreihen besteht. In der Tat beziehen sich die wichtigsten unter diesen Sätzen vor allen Dingen auf *Funktionen*. Daß diese Funktionen gerade nach dem *Taylorschen Lehrsatze* entwickelbar sind, ist hier belanglos. Was übrigens die Potenzreihen anbetrifft, so hätte ich viel weiter gehen können. Es ist vielleicht nicht allgemein bekannt, daß die Taylorsche Reihenentwicklung für die Begründung der Funktionentheorie durchaus entbehrlich ist, die Beweise gestalten sich sogar einfacher, wenn man sich bloß des Analogons des Mittelwertsatzes in der Differentialrechnung (Kap. 7, § 7) bedient. Doch darf man aus praktischen Gründen jene Reihe nicht zu sehr verdrängen, denn sie dient dem Anfänger zur Übung, damit er lernt, überhaupt mit Reihen umzugehen.

Für die Erläuterung der Riemannschen Flächen in Kap. 8 war die Darstellung bei Klein in seiner Leipziger Vorlesung vom Jahre 1881/82 vorbildlich, wozu noch ein Satz von Darboux über konforme Abbildung im Großen (Kap. 8, § 5) in ergänzender Weise herzutritt. Die Theorie der analytischen Fortsetzung (Kap. 9) habe ich eingehender behandelt, als wohl gewöhnlich geschieht, weil sich da eine Menge von Fragen befindet, welche man mit größerer Sorgfalt erörtern müßte, wenn sich die Theorie auch an dieser Stelle ihres sonstigen hohen Niveaus von Strenge erfreuen soll. Im übrigen sind die Entwicklungen von Kap. 5, §§ 3—10 aus dem nämlichen Grunde vonnöten.

Unter den frühesten Anwendungen der Cauchyschen Theorie findet sich die Liouvillesche Vorlesung vom Jahre 1847 über doppeltperiodische Funktionen. Und in der Tat kann man auch heute nicht besser tun, als dieser Funktionsklasse zwecks Erläuterung der Theorie eine ausführliche Besprechung zu widmen. Hiermit wird nebenbei der Weg zum Studium der automorphen Funktionen gebahnt.

Man pflegt wohl die elementaren Funktionen von der Arithmetik und der Geometrie aus zu erklären. Viel einfacher und interessanter gestaltet sich indessen die Theorie dieser Funktionen, wenn man den Logarithmus, durch ein Integral definiert, zugrunde legt, um dann die Potenzen und die Exponentialfunktion auf diese Funktion zu gründen. Will man andererseits die trigonometrischen Funktionen analytisch behandeln, so bildet hier die lineare Differentialgleichung für den einfachsten Fall von Schwingungen (einfache harmonische Bewegung) das natürliche Fundament. Beide Gedanken sind nicht neu. Es handelt sich um eine einfache und systematische Durchführung derselben.

Was die Literatur anbetrifft, so verweise ich auf meinen Bericht: „Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen“, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, II B 1. Im Texte habe ich nur einige wenige Zitate auf die grundlegenden Arbeiten der Theorie, sowie Nachweise auf spezielle, im genannten Artikel nicht erwähnte Untersuchungen aufgenommen. Auf Vollständigkeit machen diese Zitate keinen Anspruch.

Die Anordnung des Stoffes ist eine logisch systematische. Sie ist aber nicht die einzigste, welche sich zur Einführung in die Funktionentheorie bietet. So kann man beispielsweise, wie Hr. Klein es gemacht hat, mit den Riemannschen Flächen anfangen und dann nach kurzer Besprechung der Cauchyschen Integralsätze zu den Integralen auf Riemannschen Flächen (Abelschen Integralen) übergehen. Diese Disposition des Stoffes hat den Vorteil, daß die schwierigeren

Viertes Kapitel.

Kurvenintegrale und mehrfach zusammenhängende Bereiche.

Fünftes Kapitel.

Mengenlehre.

Zweiter Abschnitt.

Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Größe.

Einleitung.

Sechstes Kapitel.

Analytische Funktionen und die darauf bezüglichen Differentialsätze. Die elementaren Funktionen. Lineare Transformationen.

Siebentes Kapitel.

Integralsätze und singuläre Punkte. Rationale Funktionen. Reihenentwicklungen.

Achtes Kapitel.

Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen.

Viertes Kapitel.

Kurvenintegrale und mehrfach zusammenhängende Bereiche.

Fünftes Kapitel.

Mengenlehre.

Zweiter Abschnitt.

Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Größe.

Einleitung.

Sechstes Kapitel.

Analytische Funktionen und die darauf bezüglichen Differentialsätze. Die elementaren Funktionen. Lineare Transformationen.

Siebentes Kapitel.

Integralsätze und singuläre Punkte. Rationale Funktionen. Reihenentwicklungen.

Achtes Kapitel.

Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen.

Neuntes Kapitel.

Analytische Fortsetzung.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen der Theorie.

Zehntes Kapitel.

Periodische Funktionen.

Elftes Kapitel.

Reihen- und Produktentwicklungen.

Zwölftes Kapitel.

Die elementaren Funktionen.

Vierter Abschnitt.

Das logarithmische Potential. Uniformisierung.

Dreizehntes Kapitel.

Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials.

Seite

Vierzehntes Kapitel.

Konforme Abbildungen und die Uniformisierung analytischer Funktionen.

Erster Abschnitt.

Über die Sätze und Methoden der Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen. Mengenlehre.[1])

Erstes Kapitel.

Von den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung.

§ 1. Begriff der Funktion.

Nach Dirichlet[2]) heißt $f(x)$ eine *Funktion von* x, wenn jedem einem Intervalle[3]) $a \leqq x \leqq b$ zugehörigen Werte von x ein zweiter Wert $f(x)$ nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet ist. Hierbei werden beide Werte x und $f(x)$ zunächst als reell vorausgesetzt.[4])

1) Die nachfolgenden Kapitel 1—4 setzen die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung, wie sie in einleitenden Vorlesungen behandelt wird, voraus und bezwecken, die Begriffe dieser Disziplin zu vertiefen, sowie diejenigen Auffassungsweisen und Methoden darzulegen, welche die moderne Funktionentheorie im Anschlusse daran ausgebildet hat und deren sie sich prinzipiell bedient. Dagegen enthält das 5. Kapitel außer einer allgemeinen Einleitung in die Mengenlehre auch spezielle Untersuchungen über die Arithmetisierung gewisser Sätze aus der Analysis situs, welche nur Interesse für den Spezialisten bieten und darum bei einem ersten Studium der Funktionentheorie übergangen werden sollen.

2) Wegen des Entstehens des Funktionsbegriffs vgl. man die *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Pringsheim, II A 1, § 1—3, sowie die französische Ausgabe, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Pringsheim et Molk, t. 2, vol. 1, § 1—3. In der Folge werden die beiden Ausgaben als *Enzyklopädie* resp. *Encyclopédie* zitiert.

3) Die Endpunkte a und b brauchen nicht zum Intervalle zu gehören; im übrigen darf sich das Intervall ins Unendliche erstrecken.

4) Die Gesamtheit der Wertepaare (x, y) bildet das Substrat für den Begriff der Funktion, ja, man kann sogar diese Menge geradezu als die Funktion $f(x)$ auffassen. Arithmetisch erhält man hierdurch ein Äquivalent für die Kurve, welche die Funktion geometrisch vorstellt. Sobald man aber beginnt, mit der Funktion zu operieren (diese etwa zu differentiieren oder eine Funktionalgleichung für sie aufzustellen), so ist es die zweite der beiden Zahlen im Paare

In der niederen Analysis geschieht eine derartige Zuordnung meist auf Grund einer expliziten Formel; z. B.

$$f(x) = a^2 - x^2, \qquad -\infty < x < \infty;$$
$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad 0 \leqq x < \infty;$$
$$f(x) = \log \sin x, \qquad 2n\pi < x < (2n+1)\pi.$$[1]

Doch ist der Begriff der Funktion völlig unabhängig von der Möglichkeit einer solchen Darstellung, wie durch folgende Beispiele erläutert werden soll.

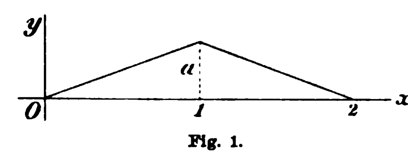


Fig. 1.

α) Im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2$ sei

$$f(x) = ax, \qquad \text{wenn } 0 \leqq x \leqq 1;$$
$$f(x) = 2a - ax, \qquad \text{wenn } 1 < x \leqq 2.$$

Außerhalb dieses Intervalls wird die Funktion nicht erklärt; sie existiert also dort nicht.

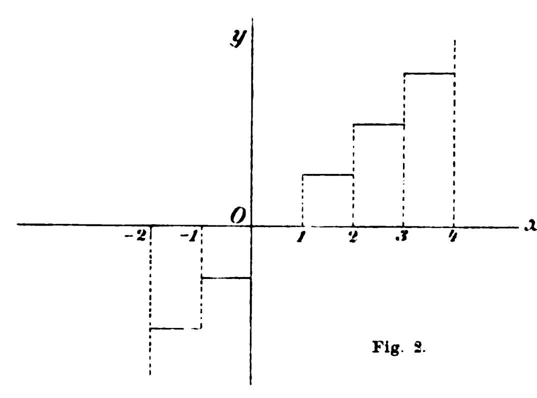


Fig. 2.

β) Im Intervalle $-\infty < x < \infty$ sei $f(x)$ gleich der algebraisch größten ganzen Zahl, die x nicht übertrifft; vgl. Fig. 2.

γ) Im Intervalle $-\infty < x < \infty$ sei

$f(x) = 0$, wenn x eine rationale Zahl,

$f(x) = 1$, wenn x eine irrationale Zahl ist.

Den Funktionsbegriff dehnt man noch auf den Fall aus, wo der Bereich der Werte, welche x annehmen darf, nicht aus einer stetigen Folge, sondern aus einer beliebigen Punktmenge (vgl. § 8) besteht. So ist z. B. $n!$, wo n eine natürliche Zahl bedeutet, als eine Funktion von n aufzufassen.

In ähnlicher Weise wird auch eine Funktion mehrerer Veränderlichen definiert. Ist beispielsweise S ein beliebiger Bereich der (x, y)-

---

(x, y), — die sogenannte abhängige Variable, — welche man unter dem Symbol $f(x)$ versteht. Insbesondere hat $f(x)$ in einer Formel meistenteils die zweite Bedeutung. Dagegen hat $f(x)$ die erste Bedeutung, wenn wir von einer stetigen Funktion oder im Falle komplexer Funktionen von komplexen Veränderlichen mit Weierstraß von einer monogenen analytischen Funktion sprechen.

1) In diesem Falle wird die Funktion nicht in einem einzigen, sondern in mehreren getrennten Intervallen definiert. Dasselbe gilt auch von der Funktion

$$f(x) = 1/x, \quad x \neq 0.$$

Ebene und ordnet man jedem Punkte von S einen bestimmten Wert $f(x, y)$ zu, so entsteht eine Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, y.

Endlich kann man jedem Punkte des Intervalls resp. des Bereiches nicht bloß einen, sondern mehrere Werte zuordnen, doch geschieht das in der Praxis meist so, daß sich diese Werte zu einer Reihe eindeutiger Funktionen zusammenfassen lassen. Beispiel:

$$f(x) = \pm\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Hier bilden die dem oberen Vorzeichen entsprechenden Werte eine im Intervalle $-a \leq x \leq a$ eindeutige Funktion:

$$f_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2},$$

während die übrigen Werte eine zweite derartige Funktion:

$$f_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

ausmachen, und man denkt sich die mehrdeutige Funktion als den Inbegriff der beiden eindeutigen Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$. Näheres hierüber findet sich in § 10.

Auf einen wesentlichen Unterschied der Auffassung der Funktion in der niederen Analysis und in der modernen Funktionentheorie wollen wir doch noch aufmerksam machen. Während man dort, wie vorhin schon bemerkt, gewohnt ist, von einer bestimmten Formel auszugehen und das Intervall bzw. den Bereich, in welchem die Funktion erklärt wird, erst hinterher zu bestimmen, wird hier der Definitionsbereich geradezu an die Spitze gestellt: erst kommt der Spielraum für die unabhängigen Variabelen, dann das Gesetz, wonach den Punkten dieses Bereiches Werte zuerteilt werden.[1])

§ 2. Grenzwert.

Sei $f(x)$ in jedem Punkte eines den Punkt $x = a$ im Innern enthaltenden Intervalls, höchstens mit Ausnahme des Punktes $x = a$ selbst, eindeutig erklärt. Stellt man sich $f(x)$ als einen geometrischen Ort vor, indem man

$$y = f(x)$$

1) Es fehlt allerdings auch nicht an Beispielen aus der niederen Analysis, wo die gegenwärtige Auffassung geboten ist. So führen insbesondere viele aus der Praxis entnommene Aufgaben über Maxima und Minima in der Differentialrechnung schon von selbst dazu, erst ein bestimmtes Intervall für die unabhängigen Variabelen ins Auge zu fassen. Was dann außerhalb dieses Intervalls passiert, ist ja belanglos.

setzt und die entsprechende Kurve zeichnet, so sagt man, *$f(x)$ nähert sich einem Grenzwerte b*, falls der Punkt (x, y) einem Grenzpunkte (a, b) zustrebt, wenn x an a heranrückt. Diesen Begriff des Grenzüberganges wollen wir jetzt in verschärfter arithmetischer Form, wie folgt, erklären: $f(x)$ nähert sich einem Grenzwerte b, wenn x der Grenze a zustrebt, falls es möglich ist, jeder noch so kleinen vorgegebenen positiven Größe ε eine zweite positive Größe δ zuzuordnen, derart daß

$$|b - f(x)| < \varepsilon$$

bleibt, wenn nur

$$0 < |x - a| < \delta$$

ist. Man schreibt dann[1])

$$\lim_{x=a} f(x) = b.$$

Geometrisch wird der Inhalt dieser Definition durch die beigefügte Figur veranschaulicht. Nachdem nämlich zuerst ein beliebig schmaler Streifen durch die Geraden $y = b + \varepsilon$, $y = b - \varepsilon$ abgegrenzt ist, muß es dann stets möglich sein, einen zweiten Streifen durch zwei Gerade $x = a - \delta$, $x = a + \delta$, $\delta > 0$, so zu bestimmen, daß sich alle diejenigen im zweiten Streifen belegenen Punkte (x, y), wofür $y = f(x)$ und $x \neq a$ ist, auch im ersten Streifen und also in dem den beiden Streifen gemeinsamen Rechteck befinden.

Fig. 3.

Beispiel. Sei

$$f(x) = x^2, \text{ wenn } x \neq 0 \text{ eine rationale Zahl,}$$
$$= -x^2, \quad „ \quad x \quad „ \text{ irrationale } „ ,$$
$$= 1, \quad „ \quad x = 0$$

ist. Dann ist

$$\lim_{x=0} f(x) = 0.$$

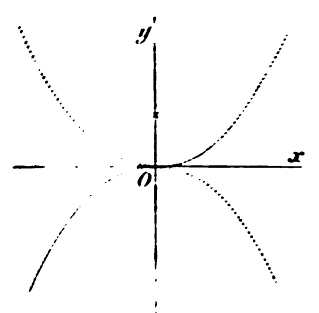


Fig. 4.

Dem verallgemeinerten Funktionsbegriffe entsprechend läßt der Grenzbegriff ebenfalls eine Erweiterung zu, indem man nur verlangt, daß $f(x)$ für einen Teil der in der Umgebung der Stelle $x = a$ gele-

1) Diese Bezeichnung wird in der Mathematik in einem doppelten Sinne gebraucht und zwar a) um anzudeuten, daß die Funktion $f(x)$, von der man

genen Punkte erklärt sei. Wesentlich ist aber dabei, daß es von a verschiedene, in jeder Nachbarschaft der Stelle $x = a$ belegene Punkte geben soll, wofür $f(x)$ definiert ist, sowie daß die Relation $|b - f(x)| < \varepsilon$ für jeden der Werte von x gelten soll, für welchen $f(x)$ definiert ist und welcher zugleich an die Ungleichung $0 < |x - a| < \delta$ geknüpft ist.

Bisweilen will man die Veränderliche x auf eine bestimmte Seite der Stelle $x = a$ beschränken. Ist das die Seite $x > a$ und nähert sich $f(x)$ dann dem Grenzwert b_1, so schreibt man

$$\lim_{x=a^+} f(x) = b_1;$$

und in ähnlicher Weise, falls $x < a$ bleiben soll,

$$\lim_{x=a^-} f(x) = b_2.$$

Beim unbeschränkten Grenzübergang $\lim x = a$ nähert sich $f(x)$ einem Grenzwert dann und nur dann, wenn $b_1 = b_2$ ist. — Ebenso schreibt man

$$\lim_{x=a} f(x) = b^+, b^-,$$

wenn neben der Relation

$$\lim_{x=a} f(x) = b$$

noch die Bedingung $f(x) \geqq b$, $\leqq b$ für alle nahe bei a gelegenen Werte von x besteht. Die Bezeichnungen

$$\lim_{x=a^+} f(x) = b^+, \text{ usw.}$$

verstehen sich jetzt wohl von selbst.

Wir fügen noch folgende Erklärungen hinzu. Es ist

α) $$\lim_{x=+\infty} f(x) = b, \quad \text{wenn} \quad \lim_{y=0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = b$$

---

von vornherein weiß, daß sie sich einer Grenze nähert, gerade der Zahl b zustrebt, — sie erklärt dann eben den Wert der Grenze; b) um auszudrücken, daß $f(x)$ überhaupt einem Grenzwert zustrebt, welcher dann mit dem neuen Symbol b bezeichnet bzw. mit der bereits vorhandenen Größe b identifiziert werden soll.

Der Grenzbegriff hatte seinen Ursprung in der Exhaustionsmethode der Alten. Die arithmetische Formulierung geht auf Wallis zurück; vgl. *Enzyklopädie*, Pringsheim I A 3, § 12 = *Encyclopédie*, Pringsheim et Molk t. 1, vol. 1, § 15. Erst Cauchy hat sich des Grenzbegriffs zur Begründung der Differential- und Integralrechnung prinzipiell bedient; vgl. seine Darstellungen im *Cours d'analyse de l'école polytechnique* 1821, sowie in seinem *Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal* 1823.

ist; doch schreibt man auch häufig, wenn es genügend klar ist, daß x nur positive Werte annehmen soll, bloß $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = b$.

β) $$\lim_{x=a} f(x) = \infty, \quad \text{wenn} \quad \lim_{x=a} \frac{1}{f(x)} = 0;$$

γ)[1] $$\lim_{x=+\infty} f(x) = \infty, \quad \text{wenn} \quad \lim_{y=0^+} \frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = 0.$$

Jetzt sieht man leicht, wie die weiteren Formeln zu verstehen sind:

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x=a} f(x) = +\infty, \quad -\infty, \text{ usw.}$$

Anstatt der Definition γ) kann man auch sagen: Die Funktion $f(x)$ *wird unendlich*, wenn x unbegrenzt wächst, — in Zeichen:

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = \infty, \text{ —}$$

falls $f(x)$ für positive beliebig große Werte von x definiert ist und jeder beliebigen positiven Größe G eine zweite positive Größe g zugeordnet werden kann, derart daß

$$|f(x)| > G, \quad \text{wenn nur} \quad x > g$$

ist. Eine ähnliche Formulierung lassen die anderen Definitionen ebenfalls zu.

Im Anschluß an die Schreibweise $\lim f(x) = \infty$ versteht man häufig unter dem Ausdruck: „$f(x)$ konvergiert gegen den Grenzwert b“, daß insbesondere $b = \infty$ sein darf, daß also $f(x)$ unendlich wird. Diesen Sprachgebrauch können wir nicht akzeptieren, wenn es auch bequem ist, die Schreibweise $\lim f(x) = \infty$ (lies: „$f(x)$ *wird unendlich*“) beizubehalten. Demgemäß setzen wir hiermit fest, daß der Ausdruck: „$f(x)$ konvergiert gegen einen Grenzwert b“ nur die vorhin erklärte Bedeutung der Konvergenz gegen eine *eigentliche* Grenze, d. h. gegen eine Zahl b haben soll.[2])

Zum Schluß geben wir einige Beispiele, die zum Verständnisse der Tragweite dieser Definitionen beitragen sollen.

1) Man vgl. die Bemerkung unter α).

2) Das System der reellen Zahlen durch eine Zahl ∞ (das sogenannte *eigentliche Unendliche*) zu vergrößern, ist sowohl pädagogisch verwerflich als auch wissenschaftlich unzweckmäßig; hierüber vgl. man Böchers Besprechung von Burkhardts *Analytische Funktionen*, § 12: *Bull. Amer. Math. Soc.* 2. Folge, Bd. 5 (1998/99), S. 182.

Beispiel 1.

$$f(x) = \sin 1/x.$$

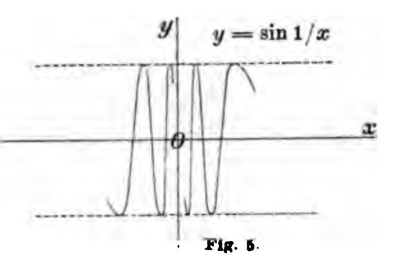


Fig. 5.

Beim Grenzübergang $x = 0$ nähert sich $f(x)$ keinem Grenzwerte, sondern oszilliert zwischen den Werten $+1, -1$. $\lim\limits_{x=0} \sin 1/x$ hat keinen Sinn.



Beispiel 2.

$$f(x) = x \sin 1/x.$$

$$\lim_{x=0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

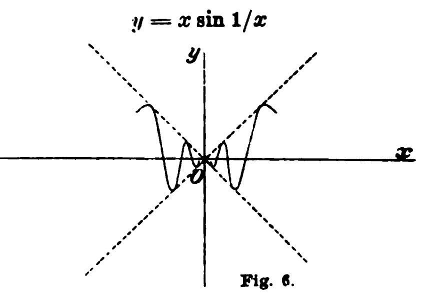


Fig. 6.

Denn es ist

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqq |x|.$$

Man beachte wohl, daß diese Funktion bald wächst, bald abnimmt, und im übrigen ihren Grenzwert unendlich oft erreicht.

Beispiel 3.

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{1/x}}.$$

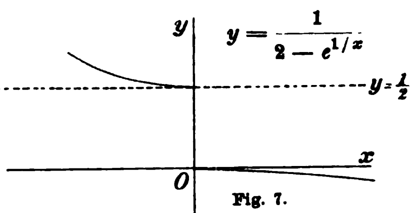


Fig. 7.

Hier ist

$$\lim_{x=0+} \frac{1}{2 - e^{1/x}} = 0^-,$$

$$\lim_{x=0-} \frac{1}{2 - e^{1/x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^+.$$

$\lim\limits_{x=0} 1/(2 - e^{1/x})$ hat keinen Sinn.

Beispiel 4.

$f(x) = \log x$, wenn x eine gerade Zahl ist; $f(x) = \log 1/x$, wenn x eine ungerade Zahl ist. Dann ist

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty.$$

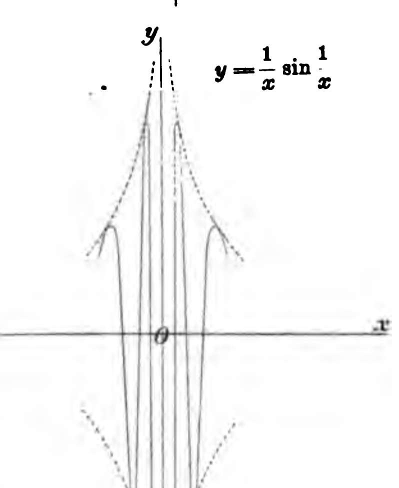


Fig. 8.

Beispiel 5.

$$f(x) = x(3 + 2 \sin x).$$

$$\lim_{x=+\infty} x(3 + 2 \sin x) = +\infty.$$

Diese Funktion wächst nicht beständig; bald

wächst sie, bald nimmt sie wieder ab. Trotzdem übersteigt sie jede vorgegebene Größe G und bleibt auch über dieser Größe, sobald x einen bestimmten nur von G abhängigen Wert überschreitet.

Beispiel 6. (Fig. 8.)

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

Hier hat $\lim_{x=0} f(x)$ keinen Sinn, trotzdem $|f(x)|$ jede vorgegebene Größe G überschreitet, wenn x gegen 0 konvergiert; denn $|f(x)|$ bleibt eben nicht beliebig groß.

Aufgabe 1. Für welche Werte von a ist

$$\lim_{x=0} \frac{a + \sin 1/x}{x} = \infty?$$

Aufgabe 2. Ist

$$\lim_{x=\infty} \left[\frac{x}{2} + \cos x\right] = \infty?$$

Ist

$$\lim_{x=\infty} x\left[\frac{1}{2} + \cos x\right] = \infty?$$

Aufgabe 3. Existiert ein Grenzwert

$$\lim_{x=0} \sin \frac{1}{x}, \quad \text{wo} \quad x = \frac{n}{1 + 2\pi n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots?$$

Aufgabe 4. Auf Grund der ε-Definition des Grenzwertes beweise man den Satz: Sind $f(x)$, $\varphi(x)$ zwei Variabele, die gegen die Grenzwerte A bzw. B konvergieren, wenn x dem Werte a zustrebt, so konvergieren die Funktionen

$$f(x) + \varphi(x), \quad f(x)\varphi(x)$$

und, wofern B nicht verschwindet, auch

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

gegen Grenzwerte, und zwar ist

$$\lim_{x=a} [f(x) + \varphi(x)] = A + B = \lim_{x=a} f(x) + \lim_{x=a} \varphi(x);$$

$$\lim_{x=a} f(x)\varphi(x) = AB = \left[\lim_{x=a} f(x)\right]\left[\lim_{x=a} \varphi(x)\right];$$

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{x=a} f(x)}{\lim_{x=a} \varphi(x)}.$$

§ 3. Stetigkeit.

Die Funktion $f(x)$ heißt *in einem Punkte $x = a$ stetig*, wenn sie in einem diesen Punkt umfassenden Intervall eindeutig erklärt und

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a)$$

ist.[1] Ist a ein Endpunkt des Intervalls, so handelt es sich nur um eine einseitige Annäherung des Punktes x an a:

$$\lim_{x=a+} f(x) = f(a) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x=a-} f(x) = f(a).$$

Die Funktion heißt *in einem Intervalle stetig*, wenn sie in jedem Punkte desselben stetig ist.

Die Funktionen, mit denen man sich in der elementaren Mathematik hauptsächlich beschäftigt, werden in der Regel nur dann unstetig, wenn sie unendlich werden; z. B. die Funktion

$$\frac{1}{x-a} \text{ im Punkte } x = a;$$

$$\tan x \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Doch liegen noch verschiedene andere Möglichkeiten vor, wie die folgenden Beispiele zeigen.

a) Das 3. Beispiel von § 2:

$$f(x) = \frac{1}{2 - e^{1/x}}.$$

Diese Funktion ist im Punkte $x = 0$ unstetig; denn es ist

$$\lim_{x=0+} \frac{1}{2 - e^{1/x}} = 0, \quad \lim_{x=0-} \frac{1}{2 - e^{1/x}} = \frac{1}{2}.$$

Im Punkte $x = 0$ selbst ist sie nicht definiert.

Fig. 9.

b) $f(x) = \lim_{n=\infty} x^{\frac{1}{2n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots.$

1) Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Prag, 1817. (1814/17), Ostwalds *Klassiker*, Nr. 153; Stolz, „B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung", *Math. Ann.* 18 (1881), S. 255; Cauchy, *Cours d'analyse algébrique*, (1821), S. 34. *Enzyklopädie*, Pringsheim II A 1, § 9 = *Encyclopédie*, Pringsheim et Molk, t. 2, vol. 1, § 9.

Diese Funktion ist für alle Werte von x definiert, und zwar ist[1])

$$f(x) = 1, \quad \text{wenn} \quad x > 0,$$
$$f(x) = -1, \quad \text{„} \quad x < 0,$$
$$f(0) = 0.$$

Durch die trigonometrischen Reihen haben sich solche Funktionen zuerst in der Mathematik Bürgerrecht erworben; bisher hatte man sie als aus mehreren getrennten Funktionen zusammengestückelt angesehen — eine Auffassung, welche auch heutzutage noch nicht völlig verschwunden ist. So ist z. B.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \\ &= \frac{\pi}{4}, \quad \text{wenn} \quad 2n\pi < x < (2n+1)\pi; \\ &= -\frac{\pi}{4}, \quad \text{„} \quad (2n-1)\pi < x < 2n\pi, \\ &= 0, \quad \text{„} \quad x = n\pi \end{aligned}$$

ist.

c) $$f(x) = \lim_{n=\infty} x^{\frac{2}{2n-1}}.$$

Diese Funktion hat für alle Werte von x außer $x = 0$ den Wert 1, während $f(0) = 0$ ist. Eine derartige Unstetigkeit, die also gehoben werden kann, indem man die Funktion im betreffenden Punkte geschickt definiert, heißt nach Riemann[2]) eine *hebbare* Unstetigkeit. Ob die Funktion von vornherein an der betreffenden Stelle erklärt war, ist gleichgültig.

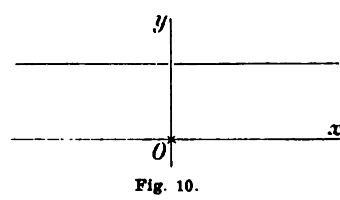


Fig. 10.

d) Das 1. Beispiel von S. 7:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

e) Das 6. Beispiel von S. 8:

1) Will man lieber bloß rationale Funktionen benutzen, so kann man folgendes Beispiel nehmen:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, \qquad x > 0.$$

Hierbei ist $f(x) = -1$ im Intervalle $0 < x < 1$; ferner ist $f(1) = 0$, während $f(x) = 1$, sobald $x > 1$ ist.

2) B. Riemann, *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Größe*, Inauguraldissertation, Göttingen, 1851; *Werke*, S. 23, § 12.

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \cdot$$

In der Nähe der Stelle $x = 0$ schwankt die Funktion zwischen Grenzen, welche jede vorgegebene Größe schließlich übersteigen. Sie wird zwar im Punkte $x = 0$ unstetig, nicht aber unendlich; denn es ist nicht $\lim_{x=0} 1/f(x) = 0$.

Wird die Funktion $f(x)$ nach der im § 2 gegebenen Definition im Punkte a unendlich, so schreibt man

$$f(a) = \infty.$$

Man beachte wohl, daß diese Definition ganz außer Frage läßt, ob die Funktion im Punkte $x = a$ definiert ist und, falls sie dort definiert ist, was für einen Wert sie daselbst hat. Sei beispielsweise

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{nx + 4}{nx^2 + 1} \cdot$$

Dann ist $f(x)$ für alle Werte von x definiert und zwar ist

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{wenn} \quad x \neq 0;$$

$$f(0) = 4.$$

Daher ist zugleich

$$f(0) = \infty \quad \text{und} \quad f(0) = 4.$$

Diese beiden Gleichungen haben aber total verschiedene Bedeutungen und sind durchaus miteinander verträglich. Die erste sagt etwas über das Verhalten der Funktion aus, wenn $x \neq 0$ ist; die zweite gibt den Wert der Funktion im Punkte $x = 0$ an.[1])

---

1) Durch die soeben betrachteten Beispiele wird eine Klassifikation aller möglichen isolierten Singularitäten einer stetigen Funktion nahe gelegt. Sei $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = a$, diesen Punkt allein ausgenommen, stetig. Rückt x von der positiven Seite an den Punkt a heran, $\lim x = a^+$, so gibt es vier Fälle, nämlich

(1^+) $$\lim_{x=a^+} f(x) = b,$$

(2^+) $$\lim_{x=a^+} f(x) = +\infty, \ -\infty;$$

(3^+) $f(x)$ strebt keinem Grenzwert zu, bleibt aber endlich im Intervalle $a < x < a + \delta$ (vgl. die nachstehende Definition);

(4^+) $f(x)$ strebt keinem Grenzwerte zu und bleibt auch nicht endlich im Intervalle $a < x < a + \delta$, wie klein auch δ angenommen werden möge.

Dem Grenzübergange $\lim x = a^-$ entsprechen wieder dieselben vier Fälle, welche also resp. mit (1^-), . . ., (4^-) bezeichnet werden mögen.

Durch paarweise Kombination der Fälle (i^+) mit den Fällen (j^-) entstehen 16 Möglichkeiten, $[(i^+), (j^-)]$. Dabei kann $f(x)$ ferner im Punkte a erklärt sein

Definition. Eine Funktion heißt in einem Intervalle *endlich*, wenn es eine positive Konstante gibt, welche die Funktion ihrem absoluten Betrage nach in keinem Punkte des Intervalls übersteigt.

Im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ sei

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leqq 1,$$
$$f(0) = a, \qquad a \text{ beliebig}.$$

Dann bleibt $f(x)$ in diesem Intervalle nicht endlich; doch gibt es auch keinen Punkt des Intervalls, in welchem sie unendlich würde.

f) Die bisher betrachteten Funktionen hören bloß in isolierten Punkten auf, stetig zu sein; sie haben *isolierte* Unstetigkeiten. Bei der Funktion

$$f(x) = \sin \frac{1}{\sin 1/x}$$

häufen sich die Unstetigkeitspunkte in der Nähe der Stelle $x = 0$.

g) Das Beispiel γ) von § 1, sowie das Beispiel auf S. 4, bringt eine Funktion, welche für alle Werte von x unstetig ist.

Es sei noch an die Sätze erinnert:

Sind $f(x)$, $\varphi(x)$ in einem Punkte bzw. Intervalle stetig, so sind auch die Funktionen

$$f(x) + \varphi(x), \quad f(x)\,\varphi(x)$$

dort stetig. Die Funktion

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ist ebenfalls stetig, sofern $\varphi(x)$ nicht verschwindet.

Ist $\varphi(x)$ im Punkte x_0, $f(y)$ im Punkte $y_0 = \varphi(x_0)$ stetig, so ist die Funktion $f[\varphi(x)]$ im Punkte x_0 stetig.

Aus diesen allgemeinen Sätzen nebst dem besonderen Satze, daß die Funktion

$$y = f(x) = x$$

stetig ist, folgert man sofort die Stetigkeit der Polynome, sowie der rationalen Funktionen in jedem Punkte, wo sie definiert sind.

---

oder nicht, und im ersteren Falle kann der Wert von $f(a)$ mit einem der etwa vorhandenen Grenzwerte zusammenfallen oder davon getrennt sein. Doch wollen wir uns mit dem bereits Gesagten begnügen, denn daraus erhellt schon, daß eine große Anzahl von Möglichkeiten vorliegt.

Aufgabe 1. Man untersuche die folgenden Funktionen auf ihre Stetigkeit hin und stelle dieselben durch eine Kurve dar.

$$e^{\tan x}, \quad \frac{1}{1+e^{\tan x}}, \quad \lim_{n=\infty} (\sin x)^{\frac{1}{2n-1}}.$$

Aufgabe 2. Sei

$$\varphi(x) = 1 - \lim_{n=\infty} (\sin \pi x)^{\frac{2}{2n-1}},$$

und man bilde die Reihe

$$\varphi(x) + \frac{1}{2!}\varphi(2!x) + \frac{1}{3!}\varphi(3!x) + \cdots.$$

Die durch diese Reihe dargestellte Funktion ist für alle rationalen Werte von x unstetig, für alle irrationalen Werte stetig.[1])

§ 4. Die Stetigkeitssätze.

Ist $f(x)$ in einem Intervalle stetig, so kann man daraus nicht einmal schließen, daß $f(x)$ in diesem Intervalle endlich bleibt, wie das Beispiel zeigt:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1.$$

Verlangt man aber außerdem noch, daß das Intervall *abgeschlossen* sei, d. h. daß es endlich sei und daß ferner die Endpunkte mit zum Intervalle gehören sollen, so verhält sich die Sache anders.

1. Satz. *Ist $f(x)$ im abgeschlossenen Intervalle*

$$a \leq x \leq b$$

stetig, so ist $f(x)$ in diesem Intervalle endlich.

Den Beweis dieses, sowie der beiden hierauf folgenden Sätze verschieben wir bis zum Schlusse dieses Kapitels, § 9.

Ist $f(x)$ eine beliebige Funktion, so braucht $f(x)$ in einem bestimmten Intervalle, in welchem sie definiert ist, weder einen größten noch einen kleinsten Wert anzunehmen, ja selbst dann nicht, wenn $f(x)$ im betreffenden Intervalle stetig ist, wie das Beispiel zeigt:

$$f(x) = 2x + 3, \quad 0 < x < 1.$$

Definitionen. Nimmt die Funktion $f(x)$ in keinem Punkte eines bestimmten Intervalls einen Wert an, welcher algebraisch größer

1) Ein einfaches Beispiel einer Funktion, die in einem, aber auch nur in einem Punkte ($x = 0$) stetig ist, wird durch das Beispiel von S. 4 geliefert, sofern der Funktion der Wert 0 statt 1 im Punkte $x = 0$ zugewiesen wird. Die durch die obige Reihe definierte Funktion weist ein ähnliches Verhalten in jedem irrationalen Punkte auf.

als die feste Zahl G ist, während sie die Größe $G - \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, mindestens in einem Punkte des Intervalls übersteigt, so heißt G die *obere Grenze* von $f(x)$ im betreffenden Intervalle. Gibt es ferner einen Punkt x' des Intervalls, in welchem $f(x') = G$ ist, so heißt G der *größte Wert* der Funktion im Intervalle. Man sagt wohl auch, $f(x)$ hat im Punkte x' ein *Maximum*.

In analoger Weise werden die *untere Grenze* und das *Minimum* erklärt.

Hat die Funktion ein Maximum, so hat sie eine obere Grenze, nicht aber umgekehrt.[1])

Unter der *Schwankung* einer Funktion in einem Intervalle versteht man die Differenz, $G - K$, zwischen der oberen und der unteren Grenze der Funktion in diesem Intervalle.

Das soeben betrachtete Beispiel zeigt, daß selbst eine stetige Funktion kein Maximum oder Minimum zu besitzen braucht. Jene Funktion $2x + 3$ kommt zwar dem Werte 5 beliebig nahe und übersteigt denselben nie; aber es gibt eben keinen Punkt des Intervalls $0 < x < 1$, in welchem sie den Wert 5 wirklich annähme. Dieser Wert bildet also die obere Grenze der Funktion. Das Verhalten dieser stetigen Funktion hängt wesentlich von dem Umstande ab, daß wir das Intervall wieder nicht als abgeschlossen vorausgesetzt haben.

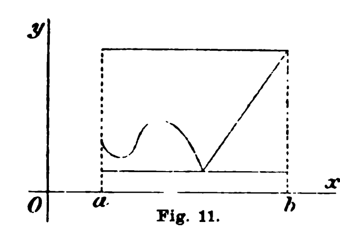


Fig. 11.

2. Satz. *Ist $f(x)$ im abgeschlossenen Intervalle*

$$a \leqq x < b$$

stetig, so hat sie dort einen größten und einen kleinsten Wert.

Ein dritter grundlegender Satz, betreffend stetige Funktionen, ist folgender.[2])

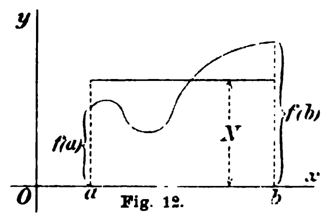


Fig. 12.

3. Satz. *Ist $f(x)$ im abgeschlossenen Intervalle*

$$a \leqq x \leqq b$$

stetig und ist $f(a) \neq f(b)$; liegt ferner N zwischen den Zahlen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt

1) Die durchgreifende Bedeutung der Unterscheidung zwischen einer oberen Grenze und einem Maximum hat Weierstraß in seinen Vorlesungen an der Berliner Universität (von 1860 an) scharf betont. Auch ist es sein Verdienst, die Sätze 1 und 2 als grundlegend hinzustellen. Der Begriff der oberen Grenze geht auf Bolzano zurück, vgl. oben, § 3, Anm.

2) Bolzano (1814/17), vgl. oben, § 3, Anm.

es mindestens einen Punkt x' im Intervalle, in welchem $f(x)$ den Wert N wirklich annimmt:

$$f(x') = N.$$

Zum Schluß kommt noch ein Satz, betreffend die gleichmäßige Stetigkeit einer stetigen Funktion. Der Definition der Stetigkeit in einem Punkte $x = x_0$ gemäß muß sich einer beliebig kleinen positiven Größe ε eine zweite positive Größe δ zuordnen lassen, derart, daß

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

bleibt, wenn

$$|x - x_0| < \delta$$

ist.[1]) Wie groß man δ bei vorgegebenem ε wählen darf, das hängt im allgemeinen vom Punkte x_0 ab, und es kann vorkommen, daß δ für gewisse Lagen von x_0 außerordentlich klein wird. Sei beispielsweise

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Die Funktion ist in diesem Intervalle stetig. Trotzdem kann man keinen *konstanten* Wert von δ angeben, welcher bei vorgegebenem ε für jeden Punkt x_0 des Intervalls passen wird. Dasselbe gilt auch von der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervalle $-\infty < x < \infty$, sowie von der endlich bleibenden Funktion $\sin 1/x$, $0 < x \leq 1$. Dieses Vorkommnis rührt abermals davon her, daß, obwohl die Funktion im ganzen Intervalle stetig ist, das Intervall selbst doch kein abgeschlossenes ist.

Definition. Sei $f(x)$ in einem beliebigen abgeschlossenen oder nicht abgeschlossenen Intervalle erklärt. Läßt sich dann jeder beliebig kleinen vorgegebenen positiven Größe ε eine feste (also von x und x_0 unabhängige) positive Größe δ so zuordnen, daß

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

bleibt, wenn nur

$$|x - x_0| < \delta$$

ist, so heißt $f(x)$ im betreffenden Intervalle *gleichmäßig stetig.*[2])

1) Das Intervall $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ darf über das Intervall (a, b), in welchem $f(x)$ definiert ist, hinausgreifen. Insbesondere kann x_0 ein Endpunkt dieses Intervalls sein. Dann kommt selbstverständlich nur soviel des ersten Intervalls in Betracht, wie im Intervalle (a, b) liegt.

2) Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ist von Weierstraß in seinen Vorlesungen an der Berliner Universität von 1860 an nachdrücklich betont worden. Ein Beweis des nachstehenden 4. Satzes ist zuerst von Heine veröffentlicht, *Journ. f. Math.*, Bd. 71 (1870), S. 361.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist z. B. sowohl im abgeschlossenen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ als auch im nicht abgeschlossenen Intervalle $a < x < b$, nicht aber im Intervalle $0 \leqq x < \infty$ gleichmäßig stetig.

4. Satz. *Ist $f(x)$ im abgeschlossenen Intervalle*

$$a \leqq x \leqq b$$

stetig, so ist $f(x)$ daselbst auch gleichmäßig stetig.

Diesen Satz wollen wir beweisen, um dem Leser ein erstes Beispiel einer Schlußweise zu geben, welche für die moderne Analysis von prinzipieller Wichtigkeit ist. Am Ende des Kapitels wird diese Schlußweise, welche wir als die *Methode der Einschachtelung der Intervalle* bezeichnen wollen, eine Reihe weiterer Anwendungen finden.

Hilfssatz.[1]) *Es ist möglich, das Intervall (a, b) in 2^n gleiche Teile zu zerlegen, derart, daß die Schwankung von $f(x)$ in jedem einzelnen dieser als abgeschlossen zu betrachtenden Teilintervalle den Wert $\varepsilon/2$ nicht überschreitet.*

Hierbei bedeutet ε eine beliebige positive Größe, welche aber, einmal gewählt, für die Folge dann festgehalten wird.

Gesetzt, das ginge nicht an. Man teile das Intervall in zwei gleiche Teile. Dann müßte es mindestens für eines dieser Teilintervalle unmöglich sein, die gewünschte Zerlegung durchzuführen, d. h. die Zahl n so zu wählen, daß die Schwankung von $f(x)$ in jedem der $\frac{1}{2}2^n$ Unterintervalle, in welche das betreffende Teilintervall zerfällt, unter $\varepsilon/2$ bleibt.[2]) Dieses Teilintervall werde mit A_1 bezeichnet. Nun stelle man bei A_1 dieselbe Überlegung an, wie soeben beim ursprünglichen Intervalle. Man wird also zu einer Hälfte A_2 von A_1 geführt, für welche die gewünschte Zerlegung wieder nicht angeht. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man schließlich eine unbegrenzte Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$, deren Länge mit wachsendem k gegen 0 abnimmt und für deren jedes die bewußte Zerlegung nicht ausführbar ist. Es gibt offenbar einen Punkt α des Intervalls (a, b), welcher allen Intervallen A_k gemeinsam ist.[3]) Damit wird man aber zu einem Widerspruch

1) Diesen Satz hätte man schon an die Spitze stellen und daraus dann den 4. Satz als Zusatz ableiten können.

2) Man beachte wohl, wenn $n = N$ die gewünschte Zerlegung liefert, daß dann jeder größere Wert $n > N$ ebenfalls zu einer derartigen Zerlegung führt.

3) Wegen eines strengen Beweises dieser Behauptung vgl. § 7. Hätten wir nicht verlangt, daß das Intervall (a, b) abgeschlossen sei, so hätten wir

geführt, denn dem Punkte α und der beliebigen positiven Größe ε_1 entspricht doch wegen der Stetigkeit von $f(x)$ im Punkte α eine positive Größe δ_1, derart, daß

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon_1$$

bleibt, sobald nur $|x - \alpha| < \delta_1$ ist. Setzt man also $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$, so folgt aus

$$|f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |x - \alpha| < \delta_1,$$

und

$$|f(x') - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |x' - \alpha| < \delta_1,$$

daß

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, wie auch immer x, x' im Intervalle $(\alpha - \delta_1, a + \delta_1)$ angenommen werden mögen. Nun gibt es aber ein Intervall A_m, welches bei passender Wahl von m ganz in diesem letzten Intervalle liegt, und das verstößt eben gegen das Ergebnis, daß für A_m besagte Zerlegung nicht durchführbar ist.

Aus dem Hilfssatze schließen wir nun, daß die Schwankung in einem beliebigen Intervalle $x_0 - \frac{1}{2} l_n \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{2} l_n$ von der Länge $l_n = (b - a)/2^n$ den Wert ε nicht übertrifft. Denn dieses Intervall kann ja höchstens über zwei aneinander stoßende jener früheren Teilintervalle hinübergreifen. In dem Falle sei $x = c$ der gemeinsame Endpunkt letzterer, und seien x, x' zwei beliebige Punkte derselben. Dann ist

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x') - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mithin wird, wie auch immer x, x' in jenem Intervalle angenommen werden mögen, stets

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

sein. Es genügt somit, $\delta = \frac{1}{2} l_n$ zu setzen.

Wir heben nochmals ausdrücklich hervor, daß die Größe ε hierbei nicht als eine Veränderliche, etwa als eine unendlich kleine Größe aufgefaßt werden darf. Sie ist eine Konstante, welche vorab

---

nicht schließen können, daß der allen Intervallen A_k gemeinsame Punkt α zum Intervalle (a, b) gehört. Er hätte eben mit einem Endpunkte von (a, b) zusammenfallen können.

willkürlich gewählt wird, alsdann aber während der ganzen Untersuchung fest bleibt.

Durch das vorstehende Raisonnement ist der 1. Satz auch bewiesen worden.

Anwendung des 4. Satzes. Beim Fundamentalsatze der Integralrechnung spielt die gleichmäßige Stetigkeit eine wesentliche Rolle. Im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ sei $f(x)$ eine stetige Funktion. Man zerlege das Intervall in n gleiche oder ungleiche Teile durch die Punkte $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ und bilde die Summe

$$(1) \qquad S_n = f(x_1')\Delta x_1 + f(x_2')\Delta x_2 + \cdots + f(x_n')\Delta x_n,$$

wo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ist und x_i' einen beliebigen Punkt des Intervalls $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$ bedeutet. Dann besagt der Satz ja, daß S_n gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn n unendlich wird und zugleich das größte Δx_i gegen 0 abnimmt. Wir wollen zunächst annehmen, daß ein Teilungsgesetz vorliegt, wonach beim Übergange von n zu $n+1$ ein Teilintervall in zwei Teile zerlegt wird, ohne daß die übrigen Teilintervalle geändert werden. Man bezeichne den größten und den kleinsten Wert von $f(x)$ im Intervalle $x_i \leqq x \leqq x_{i-1}$ mit M_i bzw. m_i und bilde die Summen

$$T_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n,$$
$$t_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n.$$

Dann ist

$$t_n \leqq S_n \leqq T_n.$$

Bei wachsendem n nimmt T_n höchstens ab, ohne jedoch jemals unter t_1 herabzusinken. Daher nähert sich T_n einem Grenzwerte, I; vgl. § 7, Theorem 1, Erweiterung. In ähnlicher Weise zeigt man, daß auch t_n sich einem Grenzwerte I_1 nähert.

Diese beiden Grenzwerte sind einander gleich, $I = I_1$. Denn wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $f(x)$ kann man einem beliebig kleinen positiven ε ein positives δ zuordnen, derart, daß

$$f(x) - f(x') < \varepsilon$$

bleibt, wie auch immer x, x' im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ angenommen werden mögen, vorausgesetzt nur, daß $x - x' < \delta$ ist. Hiernach ist die Schwankung von $f(x)$ in jedem Intervalle, dessen Länge kleiner als δ ist, auch kleiner als ε. Ist also die Teilung erst soweit gediehen, daß für alle Werte von i $\Delta x_i < \delta$ ist, so ist

$$0 \leqq T_n - t_n = (M_1 - m_1)\Delta x_1 + \cdots + (M_n - m_n)\Delta x_n$$
$$< \varepsilon(\Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n) = \varepsilon(b-a),$$

und infolgedessen ist auch

$$0 \leqq I - I_1 \leqq \varepsilon(b-a).$$

Mithin muß die von ε unabhängige Größe $I - I_1 = 0$ sein. Da nun endlich S_n stets zwischen T_n und t_n liegt, so nähert sich S_n ebenfalls dem Grenzwert I.

Den Grenzwert I definiert man als das zwischen den Grenzen a und b genommene bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ und bezeichnet ihn mit

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Man beweist nach den üblichen Methoden den Mittelwertsatz[1]):

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \qquad a < \xi < b.$$

Kehren wir jetzt zu einem beliebigen Teilungsgesetz zurück und stellen wir der zugehörigen Summe (1) die zweite Summe gegenüber:

$$\text{(3)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx.$$

Diese Zerlegung ist offenbar erlaubt, sofern man zur Definition der Integrale rechter Hand dieselben Teilungspunkte verwendet, wie bei der Definition des vorgelegten Integrals. Nach dem Mittelwertsatze hat die rechte Seite von (3) den Wert

$$f(x_1'')\Delta x_1 + f(x_2'')\Delta x_2 + \cdots + f(x_n'')\Delta x_n.$$

Indem man nun von (3) die Gleichung (1) abzieht, ergibt sich, daß

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_n = [f(x_1'') - f(x_1')]\Delta x_1 + \cdots + [f(x_n'') - f(x_n')]\Delta x_n$$

ist. Daraus folgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion

1) Der Satz besagt, daß der Inhalt der von der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den beiden Ordinaten in den Punkten $x = a$ und $x = b$ abgegrenzten Fläche gleich demjenigen eines Rechtecks von gleicher Grundlinie und mittlerer Höhe ist, und ist in dieser Form von Alters her bekannt. Daß er nach den Anforderungen moderner Strenge zu den Grundlagen der Integralrechnung gehört, wurde von Dirichlet erkannt: *Repertorium der Physik*, 1 (1837), S. 152, § 2 = *Werke*, 1, S. 138.

$f(x)$, daß, sobald nur $\Delta x_i < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, bleibt,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqq \varepsilon(b-a)$$

ist, und hiermit ist allgemein dargetan, daß auch bei jedem beliebigen Teilungsgesetze S_n gegen das oben definierte Integral (2) konvergiert.[1])

Ist $b < a$ oder $b = a$, so sollen folgende Erklärungen gelten:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Man beweist nun leicht, daß

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx,$$

wie auch immer a, b, c genommen werden mögen, sofern nur jedes der Integrale eine Bedeutung hat.

Bei der vervollständigten Definition des Integrals bleibt der Mittelwertsatz (A) immer noch bestehen. Allgemeiner ist

$$\text{(B)} \qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx, \qquad a < \xi < b,$$

wobei $f(x)$, $\varphi(x)$ beide im Intervalle stetig sind und außerdem entweder

$$\varphi(x) \geqq 0, \quad a \leqq x \leqq b$$

oder

$$\varphi(x) \leqq 0, \qquad \text{"}$$

ist.

Hieraus folgt, daß das Integral

$$\text{(4)} \qquad \int_a^x f(x)dx, \qquad a \leqq x \leqq b,$$

---

1) Die hier gegebene Definition eines eigentlichen bestimmten Integrals kommt schon bei Cauchy vor, *Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823) S. 85, und ist von Riemann auf Funktionen ausgedehnt, welche in keinem Intervalle stetig sind: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe", Habilitationsschrift, 1854, *Werke*, S. 225 (2. Aufl., S. 239). Darboux hat wohl zuerst die Einzelheiten des Riemannschen Konvergenzbeweises streng durchgeführt; cf. Jordan, *Cours d'analyse*, Bd. 1, 2. Aufl., 1893, S. 33.

eine stetige Funktion $F(x)$ seiner oberen Grenze definiert, welche auch eine stetige Ableitung besitzt:

$$F'(x) = f(x).$$

Die vorstehende Definition nebst dem Konvergenzbeweise läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß $f(x)$ eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten im Intervalle (a, b) aufweist, oder an einer endlichen Anzahl von Stellen desselben nicht definiert ist, vorausgesetzt nur, daß $f(x)$ sonst stetig ist und im Intervalle endlich bleibt. An Stelle von $f(\xi)$ in den Mittelwertsätzen tritt dann eine zwischen der oberen und der unteren Grenze der Funktion gelegene Zahl M. Das Integral (4) bleibt immer noch eine stetige Funktion seiner oberen Grenze, büßt aber seine Ableitung in einem Unstetigkeitspunkte des Integranden im allgemeinen ein.

Eine allgemeinere Definition des eigentlichen bestimmten Integrals kommt für unsere Zwecke nicht in Betracht.

Aufgabe 1. Sind die folgenden Funktionen gleichmäßig stetig?

a) $$x \log x, \qquad 0 < x \leqq 1;$$

b) $$\frac{\log x}{x}, \qquad 1 < x;$$

c) $$x \log x, \qquad 0 < x.$$

Aufgabe 2. Man beweise folgenden Satz: Ist $f(x)$ in einem endlichen nicht-abgeschlossenen Intervalle (a, b) gleichmäßig stetig, so läßt sich das Intervall in eine endliche Anzahl gleicher Teile derart zerlegen, daß die Schwankung der Funktion in jedem Teilintervalle die vorgegebene positive Größe ε nicht überschreitet. $f(x)$ bleibt dann endlich im Intervalle (a, b).

Aufgabe 3. Sei $f(x)$ im Intervalle $a < x \leqq b$ gleichmäßig stetig. Man zeige unter Benützung der Sätze von § 7, daß $f(x)$ dann beim Grenzübergange $\lim x = a^+$ einem Grenzwerte zustrebt.

Aufgabe 4. Ist $f(x)$ in einem beliebigen Intervalle stetig, so nimmt $f(x)$ jeden zwischen der oberen und der unteren Grenze der Funktion gelegenen Wert mindestens einmal an.

Aufgabe 5. Ist $f(x)$ in einem nicht-abgeschlossenen Intervalle stetig und hat $f(x)$ eine obere Grenze, kommt $f(x)$ ferner in keinem der beiden Endpunkte des Intervalls der oberen Grenze beliebig nahe, so hat $f(x)$ ein Maximum innerhalb des Intervalls.

Aufgabe 6. Sei $f(x)$ im Punkte x_0 stetig und sei $f(x_0) > c$ (bzw. $< c$), dann gibt es eine Umgebung von $x_0 : x_0 - h < x < x_0 + h$, in welcher durchweg $f(x) > c$ (bzw. $< c$) ist.

§ 5. Die Ableitung.

Sei die Funktion

$$y = f(x)$$

für alle Werte von x in einem Intervalle eindeutig erklärt und seien x_0, $x_0 + \Delta x$ zwei Punkte des Intervalls. Man bilde den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ist x_0 ein innerer Punkt des Intervalls und konvergiert $\Delta y / \Delta x$ beim Grenzübergange $\lim \Delta x = 0$ gegen einen Grenzwert, so definiert man letzteren als die *Ableitung* der Funktion $f(x)$ im Punkte x_0 und bezeichnet ihn mit $f'(x_0)$:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Wird

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty, \quad -\infty,$$

so sagt man, $f(x)$ hat im Punkte x_0 eine *unendliche Ableitung* und nennt zum Gegensatz die eigentliche Ableitung eine *endliche* Ableitung. Wir werden jedoch unter den Worten: „$f(x)$ hat eine Ableitung“ verstehen, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt ist, daß eine endliche Ableitung, d. h. ein eigentlicher Grenzwert vorliegt.

Bezüglich dieser Definition ist nun zu bemerken, daß Δx sowohl alle positiven als auch alle negativen Werte annehmen soll, die in der Nähe der Stelle $\Delta x = 0$ liegen; den Wert 0 darf Δx niemals annehmen. So ist beispielsweise der stetigen Funktion

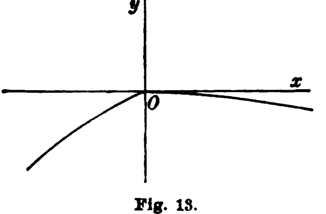


Fig. 13.

$$\text{a)} \qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{2 - e^{1/x}}, & x \neq 0; \\ \quad = 0, & x = 0 \end{cases}$$

im Punkte $x = 0$ keine Ableitung zuzusprechen, obgleich dort der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2 - e^{1/\Delta x}}$$

bei $\lim \Delta x = 0^+$, sowie bei $\lim \Delta x = 0^-$ einer Grenze zustrebt; denn die beiden Grenzwerte stimmen nicht miteinander überein, vgl. § 2, 3. Beispiel. Die Kurve $y = f(x)$ hat eine Ecke im Punkte $x = 0$.

Zuweilen ist es nützlich, den Fall zu betrachten, daß der Differenzenquotient $\Delta y / \Delta x$ beim einseitigen Grenzübergange $\lim \Delta x = 0^+$ resp. $\lim \Delta x = 0^-$ einem Grenzwerte zustrebt. Trifft dies zu, existiert also

$$\lim_{\Delta x = 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad \lim_{\Delta x = 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

so sagt man, $f(x)$ hat eine *vorwärts* bzw. *rückwärts genommene Ableitung* im Punkte x_0.

Ist x_0 ein innerer Punkt des Intervalls, so wird der Funktion, der vorhin gegebenen Erklärung gemäß, nur dann schlechthin eine Ableitung im Punkte x_0 zukommen, wenn sowohl die vorwärts als die rückwärts genommene Ableitung im Punkte x_0 existieren und beide außerdem den nämlichen Wert haben. In einem Endpunkte eines abgeschlossenen Intervalls hat $f(x)$ indessen eine Ableitung, wenn die betreffende einseitige Ableitung existiert.

So hat denn die obige Funktion a) in dem als inneren Punkt ihres Intervalls zu betrachtenden Punkte $x = 0$ eine vorwärts genommene Ableitung mit dem Werte 0 und eine rückwärts genommene Ableitung mit dem Werte $\frac{1}{2}$. Wird die Funktion dagegen nur im Intervalle $x \geqq 0$ betrachtet, so hat sie schlechthin eine Ableitung in jedem Punkte des Intervalls.

Man beachte ferner folgende Beispiele.

b) Sei (vgl. das 2. Beispiel, § 2)

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \quad\;\; = 0, & x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist für alle Werte des Arguments stetig. Im Punkte $x = 0$ hat sie aber keine Ableitung, denn der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$$

schwankt beständig zwischen den Grenzen $+1$ und -1. Geometrisch heißt das, daß die Sekante OP keiner Grenzlage zustrebt, wenn P

an O heranrückt, sondern sich im Spielraume eines Winkels von 90 Grad immer hin und her bewegt.[1])

c) Sei

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \quad = 0, & x = 0. \end{cases}$$

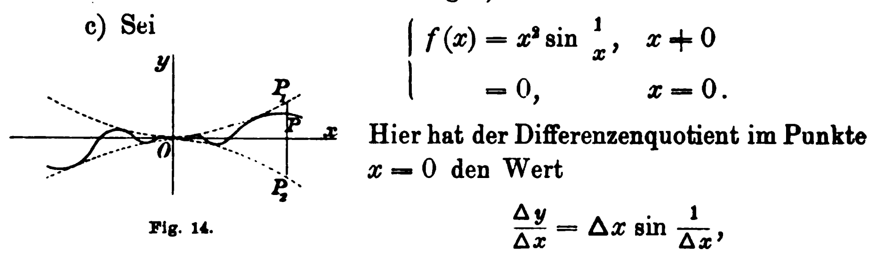


Fig. 14.

Hier hat der Differenzenquotient im Punkte $x = 0$ den Wert

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x},$$

er nähert sich also einem Grenzwerte, und zwar der 0, wie auch immer Δx gegen 0 konvergiert. Daher existiert $f'(0)$ und es ist

$$f'(0) = 0.$$

Geometrisch liegt die Kurve $y = f(x)$ zwischen den beiden konvexen Parabelbogen

$$y = x^2, \quad y = -x^2$$

eingepfercht. Die Sekante OP muß daher im Winkel P_2OP_1 bleiben, und die Schenkel dieses Winkels konvergieren beide gegen die x-Achse, wenn P an O heranrückt.

Diese Funktion $f(x)$ hat also für jeden Wert von x eine Ableitung. Letztere ist auch im allgemeinen stetig, jedoch nicht ausnahmslos; denn es ist

$$\begin{cases} f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \quad = 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mithin wird $f'(x)$ im Punkte $x = 0$ unstetig. Das heißt eben geometrisch, daß die Kurve in der Nähe der Stelle $x = 0$ wellenförmig ist, wobei die Höhe der Wellen zwar stark gegen 0 abnimmt, die Steigung aber nicht.

---

1) Man könnte geneigt sein, die Ableitung

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

zu bilden und aus dem Umstande, daß diese Formel für $x = 0$ inhaltslos wird, auf die Nichtexistenz einer Ableitung im Punkte $x = 0$ zu schließen. Daß diese Schlußweise indessen illusorisch ist, zeigt bereits das nächste Beispiel c), wo sie doch zu einem falschen Resultat führt. Der Leser wolle nicht unterlassen, sich darüber Rechenschaft zu geben, *wo* der Fehler gerade steckt.

Die soeben besprochenen Funktionen hören höchstens in einem einzigen Punkte auf, eine Ableitung zu besitzen. Weierstraß hat ein Beispiel einer stetigen Funktion gegeben, welche überhaupt für keinen Wert des Arguments eine Ableitung zuläßt.[1]

Aus der Existenz einer Ableitung in einem Punkte kann man auf die Stetigkeit der Funktion in diesem Punkte schließen. Denn aus

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

folgt, daß

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \zeta, \quad \text{wo} \quad \lim_{\Delta x = 0} \zeta = 0$$

ist, und darum konvergiert

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (A + \zeta)\Delta x$$

zugleich mit Δx gegen die Grenze 0. Aus der Existenz einer unendlichen Ableitung geht aber die Stetigkeit der Funktion nicht hervor, wie das Beispiel b), § 3 für $x_0 = 0$ zeigt.

Aufgabe 1. Haben die folgenden Funktionen im Punkte $x = 0$ eine Ableitung? Ist dieselbe stetig, im Falle sie existiert? Man zeichne jedesmal zuerst die Kurve.

α) $$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\log x^2}, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

β) $$f(x) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\log x^2}, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

γ) $$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0.$$

Aufgabe 2. Man kritisiere folgende Ausdrucksweise: „Die Funktion $f(x)$ hat im Intervalle (a, b) eine endliche Ableitung." Als Beispiel nehme man die Funktion

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, \quad & x \neq 0, \\ &= 0, & x = 0. \end{aligned}\right| \; x_0 = 0.$$

---

1) *Werke*, Bd. 2, S. 71. Hierüber vgl. man ferner eine Arbeit von C. Wiener, *Crelle*, Bd. 90 (1881), S. 221, worin das Wesen der Weierstraßschen Funktion von geometrischer Seite her beleuchtet wird.

Wie kann hier der Sachverhalt in unzweideutiger Weise erklärt werden?

§ 6. Der Rollesche und der Mittelwertsatz.

Ein grundlegender Satz der Differentialrechnung ist der sogenannte *Mittelwertsatz*, dessen Beweis sich auf den Rolleschen Satz stützt.

Der Rollesche Satz.[1]) *Sei $\varphi(x)$ im abgeschlossenen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetig und in jedem inneren Punkte x desselben: $a < x < b$, mit einer endlichen oder unendlichen Ableitung versehen. Sei ferner*

Fig. 15.

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Dann gibt es mindestens einen inneren Punkt $x = X$, in welchem die Ableitung $\varphi'(x)$ verschwindet:

$$\varphi'(X) = 0, \qquad a < X < b.$$

Die Kurve

$$y = \varphi(x)$$

hat nach dem 2. Satze von § 4 sowohl ein Maximum als ein Minimum im Intervalle. Sieht man vom trivialen Falle $\varphi(x) \equiv 0$ ab, wofür der Satz offenbar gilt, und nimmt man etwa an, daß $\varphi(x)$ für gewisse Werte von x positiv sei, so wird das Maximum in einem inneren Punkte X des Intervalls, $a < X < b$, (oder in mehreren solchen Punkten) erreicht. Im Punkte X muß aber $\varphi'(x)$ verschwinden. Bildet man nämlich den Differenzenquotienten, so kommt:

$$\frac{\varphi(X+\Delta x) - \varphi(X)}{\Delta x} \begin{cases} \leqq 0, & \Delta x > 0, \\ \geqq 0, & \Delta x < 0. \end{cases}$$

Demnach muß gleichzeitig

$$\varphi'(X) \leqq 0 \quad \text{resp.} \quad = -\infty, \quad \varphi'(X) \geqq 0 \quad \text{resp.} \quad = +\infty$$

sein, folglich ist $\varphi'(X) = 0$.

Der Mittelwertsatz.[2]) *Sei $f(x)$ im abgeschlossenen Intervalle*

1) Nach einer brieflichen Mitteilung von Hrn. Cajori findet sich der Satz bei Rolle, *Démonstration d'une Methode pour résoudre les Egalitez de tous les degrez*, Paris, 1691. Als Vorläufer des Satzes sind die Untersuchungen im *Traité d'Algebre*, Paris, 1690, S. 125 et seq. zu erwähnen; vgl. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, Bd. 3, 2. Aufl., S. 123.

2) Cauchy, *Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823), S. 28. Die im Texte gegebene allgemeine Formulierung nebst dem Beweise rührt von Bonnet her; vgl. Serret, *Calcul différentiel* (1868), S. 19.

$a \leqq x \leqq b$ stetig und in jedem inneren Punkte x desselben: $a < x < b$, mit einer endlichen oder unendlichen Ableitung versehen. Dann gibt es mindestens einen Punkt X, wofür

(A) $f(b) - f(a) = (b - a)f'(X), \quad a < X < b,$

ist.

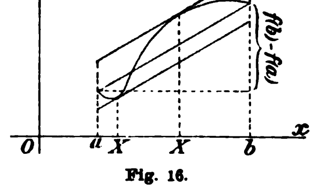


Fig. 16.

Geometrisch ausgedrückt heißt das nichts anderes, als daß die Kurve

$$y = f(x)$$

mindestens in einem inneren Punkte des Intervalls (a, b) eine Tangente besitzt, welche dieselbe Neigung gegen die x-Achse hat, wie die durch die beiden Endpunkte der Kurve gehende Sekante:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(X), \quad a < X < b.$$

Arithmetisch läßt sich der Beweis, wie folgt, führen. Sei

$$\varphi(x) = (x - a)[f(b) - f(a)] - (b - a)[f(x) - f(a)].$$

Dann genügt $\varphi(x)$ allen Bedingungen des Rolleschen Satzes und daher verschwindet die Ableitung

$$\varphi'(x) = [f(b) - f(a)] - (b - a)f'(x)$$

in einem inneren Punkte X des Intervalls.

Der Satz kann auch in der Form geschrieben werden:

(B) $$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Die Verallgemeinerung dieser Formel, deren Begründung sich ebenfalls auf den Rolleschen Satz stützt, führt zum Taylorschen Satze mit dem Restglied[1])

(C) $$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \\ + \frac{(n+1)!}{h^{n+1}} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Definition. Eine Funktion heißt *monoton*, wenn sie, wie folgt, beschaffen ist. Seien x_1, x_2 irgend zwei Punkte des Definitionsbereichs und sei $x_1 < x_2$. Dann soll ohne Ausnahme

$$f(x_1) \leqq f(x_2)$$

1) Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques.* 1797, p. 49, § 52; Stolz, *Differential- und Integralrechnung*, Bd. 1, S. 96; Goursat, *Cours d'analyse*, Bd. 1, Kap. 3.

sein oder aber es soll stets

$$f(x_1) \geqq f(x_2)$$

sein.

Aufgabe 1. Zwei Funktionen, die sich nur um eine additive Konstante voneinander unterscheiden, haben übereinstimmende Ableitungen. Man beweise den umgekehrten Satz:

Sind $F(x)$, $\Phi(x)$ zwei im Intervalle $a \leq x \leq b$ stetige, in allen inneren Punkten dieses Intervalls mit einer Ableitung versehene Funktionen und ist durchweg

$$F'(x) = \Phi'(x),$$

so ist

$$F(x) = \Phi(x) + C.$$

Aufgabe 2. Man zeige, daß

$$\frac{h}{1+h} < \log(1+h) < h, \qquad h > 0.$$

Aufgabe 3. Sei $f(x)$ eine Funktion von x, welche in jedem Punkte ihres Definitionsbereichs mit einer Ableitung versehen ist. Wechselt letztere ihr Vorzeichen im Intervalle nicht, so ist $f(x)$ monoton.

Aufgabe 4. Ist $f(x)$ im Intervalle $a \leq x \leq b$ stetig und hat $f(x)$ in allen inneren Punkten des Intervalls eine Ableitung; ist ferner

$$|f'(x)| \leq M, \quad a < x < b,$$

so kann die Schwankung von $f(x)$ im ganzen Intervalle die Größe $M(b-a)$ nicht übertreffen.

Aufgabe 5. Ist $f(x)$ im Intervalle (a, b) durchweg mit einer positiven (resp. durchweg mit einer negativen) Ableitung versehen, so ist die zu $y = f(x)$ inverse Funktion $x = \varphi(y)$ eindeutig, und diese läßt ebenfalls eine Ableitung zu:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

§ 7. Sätze, betreffend die Existenz eines Grenzwertes.

Um zu konstatieren, daß eine Variabele einer Grenze zustrebt, bedient man sich in der Regel[1]) eines der beiden nachstehenden

1) Es kommt nämlich der Beweis der gewöhnlichen Konvergenzkriterien meistenteils in der letzten Instanz auf einen dieser Sätze zurück.

numerierten Sätze (Theorem 1, 2) resp. der Methode der Einschachtelung der Intervalle, welche auf dem Hauptsatze beruht.

Theorem 1. *Sei s_n für jeden positiven ganzzahligen Wert von n eindeutig erklärt und sei*

a) $$s_{n+1} \geqq s_n;$$

b) $$s_n \leqq A,$$

wo A eine feste Größe bedeutet. Dann konvergiert s_n gegen einen Grenzwert U, wenn n unbeschränkt wächst, und zwar ist

$$s_n \leqq U \leqq A.$$

Aus der geometrischen Anschauung erhellt dieser Satz sofort. Arithmetisch läßt er sich, wie folgt, beweisen. Sei N die größte ganze Zahl, die von einem s_n übertroffen wird. Daß es wirklich eine solche gibt, schließt man daraus, daß die Größe A von s_n nie übertroffen wird und es also nur eine endliche Anzahl zwischen A und s_1 gelegener ganzer Zahlen gibt, die man auf diese Eigenschaft hin zu prüfen hat.

s_1 s_2 s_3 U A

Fig. 17.

Das Intervall $(N, N+1)$ werde nun in 10 gleiche Teile zerlegt und man bezeichne mit

$$N + \frac{c_1}{10}, \qquad 0 \leqq c_1 < 10,$$

die größte den Endpunkten dieser Unterintervalle entsprechende Zahl, die von einem s_n noch übertroffen wird.

Wiederholt man diesen Schritt, indem man das Intervall

$$\left(N + \frac{c_1}{10},\ N + \frac{c_1+1}{10}\right)$$

wieder in 10 gleiche Teile zerlegt und eine ähnliche Überlegung anstellt, und setzt man dieses Verfahren unbegrenzt fort, so erhält man N plus einem unendlichen Dezimalbruch:

$$U = N + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots, \qquad 0 \leqq c_n < 10.$$

Diese Zahl ist eben der Grenzwert von s_n. Denn einerseits ist

$$s_n \leqq N + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{c_k+1}{10^k}$$

für alle Werte von k und n, während bei gegebenem k

$$N + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} < s_n$$

ist, sobald n über einer bestimmten Zahl m liegt: $n > m$. Wie man sieht, gibt es deshalb stets unendlich viele c_i, welche nicht verschwinden. — Andererseits ist

$$N + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k}{10^k} < U \leq N + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_k + 1}{10^k}.$$

So kommt denn:

$$|U - s_n| < \frac{1}{10^k}, \quad n > m,$$

also ist

$$\lim_{n=\infty} s_n = U.$$

Daß s_n endlich den Grenzwert U niemals überschreitet, sowie daß $U \leq A$ ist, folgt daraus, daß s_n bei wachsendem n niemals abnimmt.

Beispiel. Sei

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots (n + 1 \text{ Terme}).$$

Bei wachsendem n nehmen die Terme letzten Ausdrucks niemals ab, während neue positive Terme stets hinzutreten. Folglich ist

$$s_{n+1} > s_n.$$

Anderseits ist

$$2 < s_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 3.$$

Daher nähert sich s_n einem Grenzwert, welcher im übrigen zwischen 2 und 3 liegt.

Erweiterung des vorstehenden Theorems. Der Satz nebst Beweise bleibt offenbar noch für jede Funktion $f(x)$ bestehen, die für irgend welche sich ins positive Unendliche ziehenden Werte von x definiert ist. Die Bedingungen a), b) werden dann lauten:

a) $$f(x') \geqq f(x), \qquad g < x < x';$$

b) $$f(x) \leqq A, \qquad x > g,$$

wo A, g feste Größen bedeuten.

Anstatt positiv unendlich zu werden, kann x negativ unendlich

werden oder auch gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren. Dann ergibt sich aus den Bedingungen:

a) $$f(x') \geqq f(x), \qquad x' < x < g;$$

b) $$f(x) \leqq A, \qquad x < g,$$

bzw.

a) $$f(x') \geqq f(x), \qquad a < x' < x < a + h;$$

b) $$f(x) \leqq A, \qquad a < x < a + h,$$

oder

a) $$f(x') \geqq f(x), \qquad a - h < x < x' < a;$$

b) $$f(x) \leqq A, \qquad a - h < x < a,$$

wo A, a, h feste Größen bedeuten, daß $f(x)$ gegen einen Grenzwert U konvergiert:

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = U, \qquad \lim_{x=a^+} f(x) = U, \qquad \lim_{x=a^-} f(x) = U.$$

In allen Fällen ist stets

$$f(x) \leqq U \leqq A.$$

Zum Beweise führt man diese letzten drei Fälle auf den ersten Fall mittels einer der Transformationen zurück:

$$x = -y, \qquad x - a = \frac{1}{y}, \qquad a - x = \frac{1}{y}.$$

Diese Sätze bleiben alle bestehen, wenn $f(x)$, statt zuzunehmen, beständig abnimmt, d. h. wenn man das erste Ungleichheitszeichen in den Bedingungen a) *und* b) *umkehrt:*

$$\text{a)}\ f(x') \leqq f(x), \qquad \text{b)}\ f(x) \geqq A.$$

Nur ist jetzt stets

$$f(x) \geqq U \geqq A.$$

Wir wollen das soeben bewiesene Theorem anwenden, um den Satz herzuleiten, worauf sich die Methode der Einschachtelung der Intervalle stützt. Derselbe lautet folgendermaßen:

Hauptsatz. *Sind A_1, A_2, ... eine unendliche Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle, d. h. eine Folge von Strecken, deren jede in der vorhergehenden liegt; nimmt ferner die Länge von A_n mit wachsendem n gegen 0 ab, so gibt es einen und nur einen Punkt U, welcher als innerer oder Endpunkt jedem Intervalle A_n angehört.*

Die Endpunkte von A_n bezeichne man mit α_n, β_n, wo $\alpha_n < \beta_n$ sei. Dann ist allgemein

(1) $$\alpha_n < \beta_m,$$

wo n, m zwei beliebige natürliche Zahlen sind. Die linken Endpunkte α_1, α_2, ... bilden nun eine Reihe von Größen, welche die Bedingungen a), b) des vorhin bewiesenen Theorems erfüllen:

$$\text{a)}\quad \alpha_{n+1} \geqq \alpha_n, \qquad \text{b)}\quad \alpha_n < \beta_1.$$

Daher konvergiert α_n gegen einen Grenzwert U, wenn n unendlich wird:

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = U, \qquad \alpha_n \leqq U.$$

Aus (1) ergibt sich ferner, indem man n unendlich werden läßt, daß

$$U \leqq \beta_m, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

ist. Darum ist für alle Werte von n

(2) $$\alpha_n \leqq U \leqq \beta_n,$$

d. h. U liegt in jedem Intervalle A_n.

Des weiteren schließt man aus (2), daß auch die rechten Endpunkte β_1, β_2, ... gegen einen Grenzwert U' konvergieren:

$$\lim_{n=\infty} \beta_n = U',$$

und daß ferner für alle Werte von n

(3) $$\alpha_n \leqq U' \leqq \beta_n.$$

Endlich ist $U' = U$. Denn aus (2), (3) folgt, daß

$$|U' - U| \leqq \beta_n - \alpha_n$$

ist. M. a. W. ist die konstante Größe $U' - U$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine veränderliche positive Größe $\beta_n - \alpha_n$, welche beliebig nahe an den Wert 0 herabgedrückt werden kann. Das ist aber nur dann möglich, wenn $U' - U = 0$ ist.

Wir wenden uns jetzt zum letzten Satze.[1])

1) Bolzano (1814/17) hat den Satz ausgesprochen und einen nur zum Teil durchgedachten Beweis dafür gegeben, vgl. das oben in § 3 gegebene Zitat. Der seinem Beweise zu grunde liegende Gedanke ist derselbe wie beim nachstehenden Beweise. Cauchy bedient sich des Satzes (*Cours d'analyse*, 1821,

Theorem 2. *Sei $f(x)$ für Werte von x definiert, welche beliebig nahe an den Punkt $x = a$ herandringen, ohne ihn zu erreichen*[1]), *und sei*

$$\lim [f(x'') - f(x')] = 0,$$

wenn x', x'' unabhängig voneinander dem Punkte a gleichzeitig zustreben[2]). *Dann konvergiert $f(x)$ gegen einen Grenzwert U, wenn x sich dem Punkte a nähert:*

$$\lim_{x=a} f(x) = U.$$

Umgekehrt ist diese Bedingung auch notwendig.

Um die Formulierung des Satzes zu vereinfachen, haben wir uns auf den Fall beschränkt, daß x gegen einen Punkt a konvergiert, und zwar von beiden Seiten her. Doch gilt der Satz auch dann, wenn x nur von der einen Seite an den Punkt a heranrückt, sowie wenn x positiv oder negativ unendlich wird. Wir wollen den Beweis für den Fall führen, daß x positiv unendlich wird. Die anderen Fälle lassen sich dann mittels der Transformationen

$$x = -y, \quad x = a + \frac{1}{y}, \quad x = a - \frac{1}{y}$$

auf diesen zurückführen. Oder man kann auch den nachstehenden Beweis jeweils so modifizieren, daß man an Stelle der hier auftreten-

---

S. 538), sowie auch des 1. Theorems des Textes (ibid., S. 132), ohne sich indessen, wie es scheint, um einen Beweis zu kümmern, die Sätze erscheinen ihm eben als selbstverständlich (ibid. S. 125, wo der Hauptsatz ohne Beweis angegeben wird). Erst du Bois-Reymond hat die zentrale Stellung des Satzes in der Analysis und dementsprechend auch die Notwendigkeit eines strengen Beweises dafür deutlich erkannt; *Die allgemeine Funktionentheorie* (1882) S. 260, „Das allgemeine Konvergenzprinzip". Sein Beweis ist identisch mit dem des Textes.

1) Diese letzte Bedingung ist für den direkten Satz, also für die hinreichende Bedingung überflüssig. Läßt man sie fort, so kann es wohl vorkommen, daß $f(x)$ zwar einem Grenzwerte zustrebt, daß aber $f(x)$ auch im Punkte $x = a$ definiert ist, ohne daß $f(a)$ mit dem Grenzwert übereinstimmte. Dann würde die Umkehrung des Satzes nicht erlaubt sein.

2) In ε-Form ausgedrückt heißt diese Bedingung wie folgt: Einer beliebig kleinen positiven Größe ε soll es stets möglich sein, eine zweite positive Größe δ so zuzuordnen, daß

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

bleibt, wie auch immer die Werte x', x'' aus dem gegebenen Vorrate, den Einschränkungen

$$0 < |x' - a| < \delta, \qquad 0 < |x'' - a| < \delta$$

gemäß, gewählt werden mögen.

den Ungleichung $x > g$ eine von den folgenden setzt:

$$x < -g, \quad 0 < x - a < \delta, \quad 0 < a - x < \delta, \quad 0 < x - a < \delta.$$

Der Beweis stützt sich im Anschluß an den soeben bewiesenen Hauptsatz auf die Methode der Einschachtelung der Intervalle. Nach Voraussetzung läßt sich der beliebig kleinen positiven Größe ε eine zweite positive Größe g so zuordnen, daß

$$(4) \qquad f(x'') - f(x') \cdot < \varepsilon$$

bleibt, wie auch immer x' und x'' den Beziehungen gemäß[1]):

$$x' \geqq g, \quad x'' \geqq g$$

angenommen werden mögen. Die Ungleichung (4) ist den beiden anderen äquivalent:

$$f(x'') - \varepsilon < f(x') < f(x'') + \varepsilon.$$

Setzt man hier insbesondere $x'' = g$ und schreibt man x statt x', so kommt

$$f(g) - \varepsilon < f(x) < f(g) + \varepsilon, \qquad x > g.$$

Das heißt aber nichts anderes, als daß die Größe $f(x)$ für alle Werte von x, die größer als g sind, im Intervalle $[f(g) - \varepsilon,\ f(g) + \varepsilon]$ liegt.

Man nehme nun eine Reihe positiver Werte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ so an, daß

$$\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

ist, und bestimme die denselben zugehörigen Größen $g_1, g_2, \cdots$. Wir wollen g_n übrigens so wählen, was offenbar erlaubt ist, daß $g_{n+1} > g_n$ ist. Setzt man zuerst $n = 1$, so wird

$$(5) \qquad f(g_1) - \varepsilon_1 < f(x) < f(g_1) + \varepsilon_1, \qquad x > g_1,$$

und $f(x)$ liegt also im Intervalle

$$[f(g_1) - \varepsilon_1,\ f(g_1) + \varepsilon_1],$$

Fig. 18.

welches wir hiermit mit A_1 bezeichnen wollen; vgl. Fig. 18.

Setzt man jetzt $n = 2$, so wird

$$f(g_2) - \varepsilon_2 < f(x) < f(g_2) + \varepsilon_2, \qquad x > g_2,$$

1) Ob man diese letzten Relationen in obiger Form oder in der Form $x' > g$, $x'' > g$ annimmt, ist schließlich gleichgültig, da sich die eine Bedingung, von der Bezeichnungsweise (Bedeutung von g) abgesehen, aus der anderen ableiten läßt.

und $f(x)$ liegt daher zugleich im A_1 und im Intervalle $[f(g_2) - \varepsilon_2, f(g_2) + \varepsilon_2]$. Der Mittelpunkt $f(g_2)$ dieses zweiten Intervalls liegt wegen (5) in A_1, da $g_2 > g_1$ ist. Das Intervall kann ganz in A_1 liegen, es kann aber auch über A_1 hinausgreifen, doch nur nach einer Seite hin, denn es ist ja kürzer als A_1. In jedem Falle wollen wir den gemeinsamen Teil dieser beiden Intervalle, welcher in beistehender Figur stärker ausgezogen ist, mit A_2 bezeichnen.

Allgemein hat man:

$$f(g_n) - \varepsilon_n < f(x) < f(g_n) + \varepsilon_n, \qquad x > g_n,$$

so daß also $f(x)$ zugleich in A_{n-1} und im Intervalle $[f(g_n) - \varepsilon_n, f(g_n) + \varepsilon_n]$, dessen Mittelpunkt in A_{n-1} enthalten ist, liegt. Das Intervall A_n wird dann als der gemeinsame Teil dieser beiden Intervalle definiert. Die Länge von A_n beträgt höchstens $2\varepsilon_n$.

Jetzt fasse man die Intervalle $A_1, A_2, \cdots$ ins Auge. Jedes derselben liegt im vorhergehenden, während ihre Länge mit unbegrenzt wachsendem n gegen 0 abnimmt. Nach dem Hauptsatze gibt es also einen und nur einen Punkt U, der zugleich jedem dieser Intervalle als innerer oder Endpunkt angehört. Diese Größe U ist eben der in Aussicht genommene Grenzwert $f(x)$. Denn, wie klein man die positive Größe η auch annehmen möge, stets kann man n hinterher so bestimmen, daß $\varepsilon_n < \eta/2$ ist, was zur Folge hat, daß für alle Werte $x > g_n$ sowohl U als $f(x)$ im Intervalle A_n liegen wird. Dementsprechend ist

$$|U - f(x)| < \eta, \qquad x > g_n,$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Der letzte Teil folgt unmittelbar aus der Definition eines Grenzwertes.

Beispiel. Konvergiert das Integral

$$\int_c^\infty |\varphi(x)|\, dx,$$

wo $\varphi(x)$ eine im Intervalle $x \geqq c$ stetige Funktion von x ist, so konvergiert auch das Integral[1])

$$\int_c^\infty \varphi(x)\, dx.$$

1) Wegen eines eleganten sich bloß auf Theorem 1 stützenden Beweises dieses Satzes vgl. man Goursat, *Cours d'analyse*, Bd. 1, §§ 89, 90.

Dem zweiten Teile des vorstehenden Satzes zufolge entspricht nämlich einem beliebigen positiven ε eine Größe g, derart, daß

$$\int_{x'}^{x''} |\varphi(x)|\, dx < \varepsilon, \qquad g \leqq x' < x''.$$

Setzt man ferner

$$f(x) = \int_c^x \varphi(x)\, dx,$$

so ist

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\int_{x'}^{x''} \varphi(x)\, dx\right| \leqq \int_{x'}^{x''} |\varphi(x)|\, dx, \qquad g \leqq x' < x'',$$

also sind auch die Bedingungen des ersten Teils des Satzes erfüllt. Hiermit ist der Beweis geliefert.

Das Theorem 2 umfaßt als besonderen Fall die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + \cdots$$

konvergiere. Die Bedingung besteht bekanntlich darin, daß

$$\lim_{n=\infty,\ n'=\infty} [u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n'}] = 0$$

sei, wenn n und $n' > n$ unabhängig voneinander ins Unendliche wachsen.

Aufgabe 1. Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots$ eine unendliche Folge ineinander eingeschachtelter Kreise oder Quadrate, deren Durchmesser bzw. Diagonalen mit wachsendem n gegen 0 abnehmen. Man zeige, daß es einen, aber auch nur einen Punkt gibt, welcher jedem $\mathfrak{A}_n$ als innerer oder Randpunkt angehört. Im Falle der Quadrate sollen die Seiten stets parallel zwei gegebenen Geraden sein.

Aufgabe 2. Damit $f(x)$ beim Grenzübergange $\lim x = a$ einem Grenzwerte zustrebe, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\lim_{n=\infty} f(a_n)$$

stets vorhanden sei, was auch immer $a_1, a_2, \cdots$ $(a_n \neq a)$ für eine Folge von Punkten mit $\lim a_n = a$ sein mögen.

§ 8. Punktmengen.

Unter einer *Punktmenge* versteht man ein System von Punkten, die nach einem willkürlichen Gesetze bestimmt sind. Wir setzen einige Beispiele her.

a) Die Punkte $x = 1/n$, wo n eine beliebige natürliche Zahl ist;

b) die positiven echten Brüche, sowie die Gesamtheit der ratio-len Zahlen;

c) die Gesamtheit der reellen Zahlen;

d) die Punkte (x, y), wo $x = 1/n$, $y = 1/n^2$ ist, $(n = 1, 2, \cdots)$;

e) die Punkte des Innern des Kreises $x^2 + y^2 = 1$, deren Koordi-ten beide rationale Zahlen sind;

f) die Gesamtheit der Punkte der Ebene bzw. des n-dimensio-len Raumes.

Gewöhnlich ist die Anzahl der Punkte einer Menge unendlich. e Menge heißt dann eine *unendliche* Punktmenge. Doch werden dliche Punktmengen nicht von der Betrachtung ausgeschlossen.

Definitionen. Unter der *Umgebung*[1]), *Nähe* oder *Nachbarschaft* ıes Punktes $x = a$ einer Geraden versteht man das Intervall $-h_1 < x < a + h_2$, wo h_1, h_2 zwei positive Größen sind. Häufig tspricht es den Zwecken des vorliegenden Problems, $h_1 = h_2 = h$ zu tzen, also das Intervall $|x - a| < h$, $h > 0$, als die Umgebung des ınktes a zu wählen.

Unter der Umgebung eines Punktes (a, b) einer Ebene versteht ın einen Bereich[2]) der Ebene, welcher diesen Punkt im Innern thält. Oft kann man das Innere des Quadrats $|x - a| < h$, $- b| < h$, oder des Kreises $(x - a)^2 + (y - b)^2 < h^2$, $h > 0$, als die ngebung des Punktes (a, b) gebrauchen. Wesentlich ist aber dabei, ß die Umgebung wenigstens noch alle diejenigen Punkte der Ebene ıfaßt, welche in einem zwar beliebig klein zu wählenden, aber ch bestimmten, festen Kreise oder Quadrate um den betreffenden nkt liegen.

Die Verallgemeinerung der Definition auf höhere Räume liegt n auf der Hand.

Zum Verständnis der Mengenlehre ist es zweckmäßig, sich geo-trischer Vorstellungen und der geometrischen Ausdrucksweise zu lienen, doch handelt es sich im wesentlichen, sofern die Mengen-ıre auf die Funktionentheorie angewandt wird, nur um arithme-che Dinge; Sätze und Beweise lassen sich von jedem geometrischen

1) Dieser für die ganze moderne Analysis fundamentale Begriff rührt von eierstraß her, welcher die Bedeutung der Lehre von den Punktmengen für Analysis überhaupt zuerst erkannt hat; vgl. Pincherle, *Giorn. mat.* (1 18 80) S. 178—254, 317—357; insbes. S. 235.

2) Wegen einer arithmetisch verschärften Definition von *Bereich* vgl. man 5. Kapitel, § 2.

Gedanken völlig ablösen. Spricht man z. B. von einem ***n*-dimensionalen Raume**, so ist das ja nur ein bequemer und prägnanter Ausdruck für die Gesamtheit der Zahlenkomplexe $(x_1, \cdots x_n)$, wo $x_1, \cdots x_n$ unabhängig voneinander jeden beliebigen reellen Wert annehmen. Man bezeichnet den einzelnen Komplex $(x_1, \cdots x_n)$ als einen *Punkt*, $x_1, \cdots x_n$ als dessen *Koordinaten*.

Unter einer *Häufungsstelle A* einer Punktmenge versteht man einen Punkt A, in dessen Umgebung es mindestens einen von A verschiedenen Punkt der Menge gibt, wie klein man die Umgebung von A auch immer annehmen möge. Der Punkt A selbst braucht nicht zur Menge zu gehören. — Ein Punkt einer Menge, der keine Häufungsstelle ist, heißt *isoliert;* eine Punktmenge heißt isoliert, wenn sie aus lauter isolierten Punkten besteht.

Eine Punktmenge P liegt *im Endlichen*, wenn es eine feste positive Zahl G gibt, derart, daß

$$|x_i| < G, \qquad i = 1, \cdots n,$$

ist, wo $(x_1, \cdots x_n)$ einen beliebigen Punkt der Menge bedeutet. Sie heißt *abgeschlossen*, wenn sie im Endlichen liegt und alle Häufungsstellen zur Menge gehören; dabei werde der Fall einer endlichen Punktmenge, die also keine Häufungsstellen besitzt, mit einbegriffen. Endlich nennt man sie *perfekt*, wenn sie abgeschlossen ist und wenn außerdem jeder ihrer Punkte eine Häufungsstelle der Menge ist. Eine perfekte Menge kann also keinen isolierten Punkt besitzen.

1. Satz[1]). *Ist P eine unendliche im Endlichen gelegene Punktmenge, so hat P mindestens eine Häufungsstelle, welche indessen nicht zur Menge zu gehören braucht.*

Wir beweisen den Satz zunächst für einen eindimensionalen Raum. Nach Voraussetzung liegen alle Punkte von P in einem endlichen Intervalle

$$-G < x < G,$$

und ihre Anzahl ist unendlich. Man zerlege das Intervall in zwei gleiche Teile. Dann müssen mindestens in einem dieser Teilintervalle unendlich viele Punkte von P liegen. Ein solches Teilintervall bezeichnen wir mit A_1. Jetzt stellen wir bei A_1 dieselbe Überlegung wie soeben beim ursprünglichen Intervalle wieder an und erhalten so ein Intervall A_2 von der halben Länge des Intervalls A_1. Durch Wiederholung dieses Schrittes gelangt man also zu einer unbegrenzten

1) Weierstraß, vgl. Pincherle, a. a. O., S. 237.

Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle $A_1, A_2, \cdots$, deren Länge bei wachsendem n gegen 0 abnimmt und welche im übrigen je unendlich viele Punkte von P enthalten. Nach dem Hauptsatze von § 7 gibt es daher einen Punkt U, welcher jedem dieser Intervalle A_n als innerer oder Endpunkt angehört. In jeder Umgebung des Punktes U liegt ferner ein Intervall A_n und darum auch mindestens ein von U verschiedener Punkt von P. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Liegt P dagegen in einem zweidimensionalen Raume, und also insbesondere im Quadrate

$$-G < x < G, \quad -G < y < G,$$

so wird man das Quadrat zunächst mittels der Geraden $x = 0$, $y = 0$ in vier gleiche Quadrate zerlegen. Dann müssen mindestens in einem dieser als abgeschlossen zu betrachtenden Teilquadrate unendlich viele Punkte von P liegen. Ein solches Teilquadrat bezeichne man mit $\mathfrak{A}_1$ und verfahre dann mit $\mathfrak{A}_1$ genau ebenso, wie vorhin mit dem ursprünglichen Quadrat. Durch Wiederholung des Schrittes wird man zu einer unendlichen Folge ineinander eingeschachtelter Quadrate $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots \mathfrak{A}_n$ geführt, deren Diagonalen mit wachsendem n gegen 0 abnehmen und in welchen je unendlich viele Punkte von P liegen. Diese Quadrate haben alle einen Punkt U gemeinsam (vgl. § 7, Aufgabe 1), womit sich dann U als eine Häufungsstelle der Menge erweist.

Der Beweis im allgemeinen Falle bietet jetzt keine Schwierigkeit.

Dem Begriff der *oberen* (*unteren*) *Grenze* sind wir ja bereits einmal begegnet. Wir wollen denselben noch einmal allgemein, wie folgt, formulieren. Entspricht einer Punktmenge P eine Zahl G von der doppelten Eigenschaft:

a) für jeden Punkt x der Menge ist

$$x \leqq G;$$

b) für mindestens einen Punkt x der Menge ist

$$x > G - \varepsilon,$$

wo ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, so heißt G die obere Grenze von P. Dabei braucht G nicht zur Menge zu gehören. In diesem Falle liegt ein (von G verschiedener) Punkt der Menge in jeder Nachbarschaft von G, und G wird somit zu einer Häufungsstelle der Menge. Beispiel: $x = -1/n$, $n = 1, 2, \cdots$. Hat die Menge dagegen in G ein Maximum, so braucht weiter keiner von

ihren Punkten in der Nähe von G zu liegen. Beispiel: $x = 1/n$, $n = 1, 2, \cdots$. In ähnlicher Weise wird auch die untere Grenze erklärt.

Eine Funktion hat eine obere (untere) Grenze, wenn die Menge ihrer Werte, jeden nur einmal gezählt, eine obere (untere) Grenze aufweist.

2. Satz. *Ist P eine beliebige auf einer Geraden gelegene Punktmenge, die sich mindestens nach einer Seite hin nicht ins Unendliche erstreckt, so hat P eine obere resp. eine untere Grenze U*[1].

Für eine endliche Menge ist der Satz evident. Ist dagegen P eine unendliche Menge, der es an einem letzten Punkte nach der betreffenden Richtung hin mangelt, so haben wir die Existenz einer oberen (unteren) Grenze U nachzuweisen. Man nehme an, P erstrecke sich nicht ins positive Unendliche. Dann wird

$$x < A$$

sein, wo A eine feste Größe und x die Koordinate eines beliebigen Punktes von P ist. Der Beweis wird nun genau so geführt, wie der Beweis von Theorem 1, § 7, indem man die ganze Zahl N so bestimmt, daß Punkte von P noch im Intervalle $N < x \leq N + 1$, daß aber keine im Intervalle $x > N + 1$ liegen. Ersteres Intervall wird dann in 10 gleiche Teile zerlegt, usw.

Zusatz. *Ist $f(x)$ eine beliebige Funktion von x, welche algebraisch genommen unter (über) einer festen Zahl bleibt, so hat $f(x)$ eine obere (untere) Grenze.*

Die Funktionswerte führen zu einer im Endlichen gelegenen Punktmenge, und diese Menge subsummiert sich direkt unter diejenigen Mengen, wovon im vorstehenden Satze die Rede ist.

Wir fügen noch eine andere Formulierung des zweiten Satzes hinzu, welche von Dedekind herrührt und von ihm zur Definition der irrationalen Zahlen benutzt wurde.[2])

Dedekindscher Schnittsatz. *Zerfallen alle die reellen Zahlen, höchstens von einer einzigen derselben abgesehen, nach einem bestimmten Gesetz in zwei Klassen, derart, daß jede Zahl α der ersten Klasse kleiner ist als irgend eine Zahl β der zweiten Klasse, so gibt es eine,*

---

1) Bolzano, vgl. das Zitat in § 3.
2) Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872.

und nur eine Zahl U, die so beschaffen ist, daß

$$\alpha \leq U \leqq \beta$$

ist, wobei α, β beliebige Zahlen der ersten resp. zweiten Klasse sind.

Tritt an Stelle der sämtlichen reellen Zahlen bloß eine Teilmenge davon, wobei indessen jede Klasse mindestens eine Zahl umfassen soll, so gibt es zwei im allgemeinen verschiedene Zahlen U_1, U_2, derart, daß

$$\alpha \leqq U_1 \leqq U_2 \leqq \beta.$$

Es wird stets dann $U_1 = U_2$ sein, wenn es zu jedem vorgegebenen ε ein α und ein β gibt, derart, daß

$$\beta - \alpha < \varepsilon$$

ist.

§ 9. Beweis der Stetigkeitssätze.

Beweis des 1. *Satzes*, § 4. Ein Beweis dieses Satzes hat sich bereits bei der Begründung des 4. Satzes, § 4 mit ergeben. Auf direktem Wege kann man den Satz, wie folgt, beweisen.

Man nehme an, der Satz sei falsch, und zerlege das Intervall in zwei gleiche Teile. Dann müßte der Satz auch für eins dieser Teilintervalle, welches wir A_1 benennen wollen, falsch sein. Jetzt wende man dasselbe Verfahren auf das Intervall A_1 an. Man erhält so ein in A_1 gelegenes Intervall A_2, wofür der Satz wieder nicht gelten kann. Durch Wiederholung dieses Schrittes gelangt man schließlich zu einer unbegrenzten Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle $A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$, deren Länge mit wachsendem n gegen 0 abnimmt und in deren jedem $f(x)$ nicht endlich bleibt. Nach dem Hauptsatze von § 7 bestimmen dieselben einen einzigen Punkt $U = \alpha$, welcher jedem A_n als innerer oder Endpunkt angehört. Der Punkt α liegt notwendig auch im gegebenen Intervalle $a \leqq x \leqq b$, da dasselbe abgeschlossen ist.

Andererseits schließt man aus der Stetigkeit von $f(x)$ im Punkte α, daß

$$f(x) - f(\alpha) | < \varepsilon,$$

wenn $|x - \alpha| < \delta$ ist, daß also

$$|f(x)| < f(\alpha) + \varepsilon$$

bleibt, sobald x nur auf das Intervall $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ beschränkt wird. Wählt man daher n groß genug, damit die Länge von A_n kleiner als

δ ausfällt, so wird A_n im Intervalle $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ zu liegen kommen, was zu einem Wiederspruch führt.

Beweis des 2. Satzes. Der Beweis dieses Satzes erfolgt wieder durch die Methode der Einschachtelung der Intervalle. Es genügt, ihn etwa für den Fall eines Maximums zu führen. Nach dem 1. Satze ist $f(x)$ im Intervalle endlich und nach dem Zusatz § 8 hat $f(x)$ ferner eine obere Grenze G. Es handelt sich also darum zu zeigen, daß $f(x)$ den Wert G in einem Punkte des Intervalls wirklich erreicht. Zu dem Behufe zerlege man das Intervall in zwei gleiche Teile. In jedem derselben, als ein abgeschlossenes Intervall aufgefaßt, wird $f(x)$ auch eine obere Grenze haben, und man überzeugt sich leicht, daß keine der beiden größer als G ist, während andererseits beide nicht kleiner als G sein können. Sei A_1 also eines der Teilintervalle, in welchem $f(x)$ die obere Grenze G hat. Dann verfährt man mit A_1 genau ebenso, wie vorhin mit dem ursprünglichen Intervalle, und erhält so ein in A_1 gelegenes Intervall A_2 von der halben Länge, in welchem $f(x)$ wieder die obere Grenze G hat. Durch Wiederholung dieses Prozesses ergibt sich eine unbegrenzte Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle $A_1, A_2, \cdots A_n$, deren Länge bei unbegrenzt wachsendem n gegen 0 abnimmt und in deren jedem $f(x)$ die obere Grenze G hat. Diese Intervalle bestimmen in eindeutiger Weise einen Punkt α. Nun wird man einerseits, der Stetigkeit von $f(x)$ wegen, einem beliebigen positiven ε ein positives δ so zuordnen können, daß

$$f(\alpha) - f(x) < \varepsilon \text{ bleibt, wenn nur } |x - \alpha| < \delta$$

ist. Andererseits gibt es in jedem A_n ein x, wofür die nicht-negative Größe

$$G - f(x) < \varepsilon$$

ist. Nimmt man also n nur so groß, daß A_n innerhalb jenes Intervalls $|x - \alpha| < \delta$ zu liegen kommt, so haben beide Ungleichungen für den nämlichen Wert von x statt, woraus denn folgt, daß

$$0 \leqq G - f(\alpha) < 2\varepsilon$$

ist. Mithin muß $f(\alpha) = G$ sein, und der Satz ist also bewiesen.

Beweis des 3. Satzes. Auch hier führt dieselbe Methode zum Ziele. Man setze

$$F(x) = f(x) - N.$$

Dann ist, falls $f(a) < f(b)$ ist,

$$F(a) < 0, \qquad F(b) > 0.$$

Sei x_1 der Mittelpunkt des Intervalls: $x_1 = (a+b)/2$. Dann sind zwei Fälle möglich,

$$\text{a)}\quad F(x_1) = 0; \qquad \text{b)}\quad F(x_1) \neq 0.$$

Im Falle a) erkennt man den Satz als richtig an. Im Falle b) muß $F(x)$ mindestens in einem der Teilintervalle, A_1, einen Vorzeichenwechsel erfahren. Auf A_1 wende man nun dasselbe Verfahren an, wie soeben beim ursprünglichen Intervall. Im schlimmsten Falle stellt sich eine unendliche Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle $A_1, A_2, \ldots$ ein, in deren jedem $F(x)$ einen Vorzeichenwechsel erfährt. Diese Intervalle bestimmen dann einen Punkt α, in dessen Umgebung $F(x)$ stets sowohl positive als negative Werte annimmt. Hieraus folgt denn auf Grund von § 4, Aufg. 6, daß $F(\alpha) = 0$ sein muß.

Aufgabe 1. Sind $x_1, x_2, \ldots$ eine unendliche Menge im abgeschlossenen Intervalle $a \leq x \leq b$ gelegener Punkte, so gibt es mindestens einen Punkt α des Intervalls, gegen welchen eine passend gewählte Reihe dieser Punkte $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ konvergiert:

$$\lim_{i=\infty} x_{n_i} = \alpha.$$

Aufgabe 2. Hat die Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervalle die obere Grenze G, die sie nicht erreicht, so kann man stets eine Reihe dem Intervalle angehöriger Punkte $x_1, x_2, \ldots$ mit dem Grenzpunkte α: $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \alpha$, bestimmen, derart daß

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = G$$

ist.

Wird der Punkt α dem Intervalle stets angehören? Ist der Satz richtig, falls die obere Grenze erreicht wird?

Aufgabe 3. In einem abgeschlossenen Intervalle sei eine Funktion gegeben, welche ausschließlich positive Werte annimmt. Dann gibt es einen Punkt des Intervalls, derart, daß in jeder Umgebung desselben die Funktion ihrer unteren Grenze beliebig nahe kommt.

Gilt der Satz auch für ein nicht-abgeschlossenes Intervall?

§ 10. Mehrdeutige Funktionen.

Jedem Punkte x eines Intervalls $a \leq x \leq b$ oder allgemeiner einer beliebigen Punktmenge mögen mehrere, auch unendlich viele Werte $y_1, y_2, \ldots$ zugeordnet werden. In einem Punkte, in welchem

unendlich viele Werte vorliegen, sollen diese jedoch stets abzählbar sein.[1]) In allen anderen Punkten ist die Anzahl der Werte eine beliebige positive ganzzahlige Funktion von x.[2]) Die Gesamtheit der Wertepaare (x, y_n), $n = 1, 2, \ldots$, bildet dann das Substrat für die mehrdeutige Funktion, welche nun auf Grund des letzteren ähnlich wie die eindeutige Funktion definiert wird; man vgl. § 1.

Zur Behandlung einer mehrdeutigen Funktion empfiehlt es sich meist, eine Darstellung derselben mittels eindeutiger Funktionen anzustreben. Für die in der Praxis vorkommenden mehrdeutigen Funktionen gelingt eine solche Darstellung in der Regel vermöge des folgenden Satzes.

1. Satz. *Jeder Stelle x_0 des Definitionsbereiches T einer mehrdeutigen Funktion sollen sich*

a) *eine bestimmte Umgebung*[3]) $x - x_0 < \delta$ *und*

b) *eine Reihe je in derselben ausnahmslos definierter eindeutiger Funktionen*

$$y_1 = f_1(x), \qquad y_2 = f_2(x), \ldots, \qquad |x - x_0| < \delta,$$

so zuordnen lassen, daß zwischen diesen Funktionswerten und den Werten der vorgelegten mehrdeutigen Funktion in der genannten Umgebung eine ein-eindeutige Beziehung statt hat.

Dann wird eine ähnliche Zusammenfassung der Werte der mehrdeutigen Funktion auch im Großen möglich sein, d. h. es wird eine Reihe je im ganzen Definitionsbereiche T eindeutig definierter Funktionen geben, deren Werte geradezu den Wertvorrat der mehrdeutigen Funktion einmal, aber auch nur einmal, liefern.

Wir dürfen T als endlich voraussetzen, da dies stets durch eine ein-eindeutige stetige Transformation zu erreichen ist. So kann man sich beispielsweise im Falle eines unendlichen Intervalls T einer Zentralprojektion bedienen, indem man den Mittelpunkt eines die Zahlengerade berührenden Kreises als Projektionszentrum nimmt und dann durch Halbstrahlen die Punkte der Geraden auf die Punkte des Halbkreises bezieht. Auch soll T zunächst abgeschlossen sein.

Gilt der Satz nun fürs ganze Intervall nicht, so muß er mindestens für eine Hälfte, A_1, desselben falsch sein. Um dies einzusehen, sei x_0 der Mittelpunkt von T, und seien ferner

1) Diese Beschränkung liegt nicht in der Natur der Sache, sie entspricht vielmehr dem Wunsche, unnütze Verallgemeinerungen zu vermeiden.

2) Diese Anzahl braucht nicht in allen Punkten größer als 1 zu sein.

3) Man vgl. die erste Anmerkung auf S. 15.

$$F_1(x), \quad F_2(x), \ldots, \quad \Phi_1(x), \quad \Phi_2(x) \ldots,$$

die beiden dem linken bzw. dem rechten abgeschlossenen Teilintervalle entsprechenden Reihen eindeutiger Funktionen, welche es geben müßte, wenn der Satz für jede der beiden Hälften richtig wäre. Die Werte $F_n(x_0)$ stimmen, von der Reihenfolge derselben abgesehen, mit den Werten $\Phi_m(x_0)$ überein. Demgemäß kann man jedem n einen Wert m_n von m mindestens auf eine Weise so zuordnen, daß

$$F_n(x_0) = \Phi_{m_n}(x_0), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ist. Definiert man nun eine Funktion $G_n(x)$, wie folgt:

$$G_n(x) = F_n(x), \qquad x \leq x_0;$$
$$= \Phi_{m_n}(x), \qquad x > x_0,$$

so gilt der Satz doch im ganzen Intervalle, und das verstößt gegen die Voraussetzung.

Mit dem Intervalle A_1 verfährt man nun wieder ebenso, wie vorhin mit T, und erhält so durch Wiederholung des Prozesses eine unbegrenzte Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle, deren Länge gegen Null abnimmt und welche somit einen Punkt α von T bestimmen. In jeder Umgebung von α müßte dann ein Intervall A_n liegen, wofür der Satz nicht gilt, und dies trifft eben nicht zu.

Ist das Definitionsintervall T nicht abgeschlossen, so nehme man eine unbegrenzte Folge ineinander eingeschachtelter abgeschlossener Intervalle an, welche alle im gegebenen Intervalle liegen und dasselbe auszufüllen streben. Für ein jedes derselben gilt der Satz, und zwar kann man, um von einem dieser Intervalle auf das nächst folgende überzugehen, die im ersten getroffene Verteilung der Funktionswerte beibehalten. Hieraus erkennt man, daß der Satz auch fürs ganze Intervall T gilt.

2. Satz. *Zu den Voraussetzungen des 1. Satzes füge man noch die beiden weiteren hinzu:*

c) *in jedem Punkte von T sollen die Werte der mehrdeutigen Funktion sämtlich voneinander verschieden sein;*

d) *die Funktionen $f_k(x)$ sollen so gewählt werden können, daß sie stetig sind.*

Dann lassen sich die eindeutigen Funktionen, auf die sich nach dem 1. Satze die Werte der mehrdeutigen Funktion verteilen, so be-

stimmen (und zwar, von der Reihenfolge abgesehen, nur auf eine einzige Weise), daß auch sie im ganzen Intervalle stetig sind.

Dasselbe Verfahren liefert auch hier den Beweis, nur ist m_n unter den gegenwärtigen Voraussetzungen eindeutig bestimmt.

3. Satz. *Wird die Bedingung* c) *des 2. Satzes gestrichen, so bleibt der Satz bei Fortlassung der Klammer immer noch bestehen.*

§ 11. Ein allgemeines Theorem.

Wenn in einer Untersuchung erst einmal festgestellt ist, daß ein gewisser Tatbestand für die Umgebung eines jeden Punktes eines abgeschlossenen Intervalls resp. Bereiches statt hat, und wenn der weitere Verlauf des Beweises bloß in der Anwendung der Methode der Einschachtelung der Intervalle besteht, so kann man diesen letzten Teil der Schlußweise, wie folgt, formulieren.

Theorem.[1]) *Jedem Punkte eines abgeschlossenen Intervalls resp. Bereiches S sei eine bestimmte Umgebung τ zugewiesen. Dann läßt sich stets eine endliche Anzahl dieser Umgebungen $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ auswählen, derart, daß jeder Punkt von S mindestens in einer derselben liegt.*

Wir führen den Beweis bloß für ein Intervall. Der Fall eines mehrdimensionalen Bereiches wird ähnlich behandelt.

Sei $x = x'$ ein beliebiger Punkt des Intervalls $a \leq x \leq b$, welcher von $x = a$ aus durch eine endliche Anzahl n' von Bereichen τ erreichbar ist, derart, daß jeder Punkt des Intervalls $a \leq x < x'$ mindestens in einem dieser Bereiche liegt; dabei ändert sich n' im allgemeinen mit x' und braucht für die Gesamtheit der in Betracht kommenden Punkte x' denkbarerweise nicht endlich zu bleiben. Sei ferner X die obere Grenze aller derartigen Punkte x'. Dann muß $X = b$ sein. Denn sonst würde durch die zu X gehörige Umgebung τ_X die Menge von Punkten x' doch über X hinaus fortgesetzt werden, was zu einem Widerspruch führt. Infolgedessen kann man schon mit einer endlichen Anzahl von Bereichen τ in jede Umgebung des Punktes b hineindringen, und also insbesondere den Bereich τ_b dieses Punktes betreten, womit denn der Beweis des Satzes geliefert ist.

---

1) Borel, *Ann. Éc. norm.*, 3. Reihe, Bd. 12 (1895), S. 51. Man vergleiche ferner Veblen, „The Heine-Borel Theorem“, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2. Reihe, Bd. 10 (1904), S. 436.

Zweites Kapitel.

Über reelle Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen.

§ 1. Begriff des Grenzwertes.

Die Erweiterung des Dirichletschen Funktionsbegriffs auf eine reelle Funktion mehrerer reeller unabhängiger Veränderlichen bietet, wie bereits erwähnt, keine Schwierigkeit. Dagegen treten bei der Verallgemeinerung des Grenzbegriffs und damit auch des Begriffs der Stetigkeit Erscheinungen von einer wesentlich neuen Art zutage. Das liegt eben daran, daß der Bereich der unabhängigen Variabelen, bisher ein eindimensionaler, zu beschränkt war, um für den allgemeinen Fall maßgebend zu sein. Setzen wir bloß zwei unabhängige Variabele voraus, so begegnen wir bereits den Haupterscheinungen in der Theorie der Funktionen von n unabhängigen Variabelen, und auch die Ausdehnung der Sätze sowie der Beweise auf den allgemeinen Fall springt dabei meistenteils sofort in die Augen. Darum werden wir uns in der Regel auf Funktionen zweier Variabelen beschränken.

Der zweidimensionale Grenzübergang.[1]) Sei (a, b) ein innerer Punkt eines zweidimensionalen Bereiches S der (x, y)-Ebene und sei $f(x, y)$ in jedem Punkte von S, höchstens mit Ausnahme des Punktes (a, b) selbst, eindeutig erklärt. Wie soll man

$$\lim_{x=a,\ y=b} f(x, y)$$

definieren? Veranschaulicht man die Funktion $f(x, y)$ mittels eines geometrischen Ortes, indem man

$$z = f(x, y)$$

setzt und die Punkte (x, y, z) im Raume aufträgt, so liegt es nahe

1) In diesem und den beiden nachfolgenden Kapiteln werden die Begriffe *Bereich* und *Kurve* der Anschauung entnommen, in § 2 werden sie etwas genauer umgrenzt. Eine arithmetische Besprechung derselben findet sich im 5. Kapitel.

zu sagen, daß sich $f(x, y)$ beim Heranrücken des Punktes (x, y) an den Punkt (a, b) dem Grenzwerte c nähert, falls der Punkt (x, y, z) dabei dem Punkte (a, b, c) zustrebt. An dem Inhalt dieses Gedankens wollen wir denn auch festhalten, wir suchen aber doch eine rein arithmetische Definition des Grenzwertes. Es stellt sich nun heraus, daß sich die folgende Form für die Praxis eignet.

Definition. Sei $f(x, y)$ in jedem Punkte eines den Punkt (a, b) als innern Punkt enthaltenden Bereichs, höchstens mit Ausnahme dieses Punktes selbst, eindeutig erklärt. Dann nähert sich $f(x, y)$ beim Grenzübergange $\lim x = a$, $\lim y = b$ einem Grenzwerte c, falls sich einer beliebig kleinen positiven Größe ε eine zweite positive Größe δ zuordnen läßt, derart daß

$$(1) \qquad |c - f(x, y)| < \varepsilon$$

bleibt, wie auch immer die Variabelen x, y den Bedingungen gemäß:

$$(2) \qquad \begin{cases} |x - a| < \delta, \quad |y - b| < \delta, \\ 0 < |x - a| + |y - b| \end{cases}$$

angenommen werden mögen. Man schreibt dann

$$\lim_{x=a,\ y=b} f(x, y) = c.$$

Der Leser wolle nicht unterlassen, sich die Raumfigur vorzustellen, welche im gegenwärtigen Falle der Fig. 3 von Kap. 1, § 2 entspricht.

Unter

$$\lim_{x=a,\ y=b} f(x, y) = \infty$$

versteht man, daß

$$\lim_{x=a,\ y=b} \frac{1}{f(x, y)} = 0$$

ist.

Diese Definitionen dehnt man auf den Fall aus, daß (a, b) ein Randpunkt des Bereichs ist, sowie daß der Bereich sich ins Unendliche erstreckt. Im letzten Falle tritt an Stelle von (2) die Relation

$$(2') \qquad |x| + |y| > G.$$

Ja, die Punkte, in welchen $f(x, y)$ definiert ist, brauchen nicht einmal einen Bereich auszumachen, sie können eine beliebige Punktmenge mit der Häufungsstelle (a, b) bzw. eine sich ins Unendliche erstreckende Punktmenge bilden. Wesentlich ist dabei aber, daß die

Beziehung (1) für alle Punkte (x, y) gelten soll, für welche $f(x, y)$ definiert ist, und welche zugleich den Relationen (2) bzw. (2') genügen.

Im Gegensatz zu dem später zu besprechenden *doppelten Grenzübergang* wollen wir den soeben definierten als einen *zweidimensionalen Grenzübergang* bezeichnen.

Theorem. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x, y)$ einem Grenzwert zustrebe, wenn der Punkt (x, y) den zweidimensionalen Grenzübergang $\lim x = a$, $\lim y = b$ ausführt, besteht darin, daß*

$$\lim [f(x', y') - f(x'', y'')] = 0$$

sei, wenn (x', y') und (x'', y'') unabhängig voneinander gleichzeitig gegen den Punkt (a, b) konvergieren, ohne ihn jemals zu erreichen.[1])

Den Beweis führt man in ähnlicher Weise, wie im Falle einer Funktion einer unabhängigen Variabelen (Kap. 1, § 7, Theorem 2), nur treten jetzt an Stelle der Intervalle $a - \delta_n < x < a + \delta_n$ die Quadrate $a - \delta_n < x < a + \delta_n$, $b - \delta_n < y < b + \delta_n$.

Es ist klar, daß, wenn sich $f(x, y)$ beim zweidimensionalen Grenzübergang $\lim x = a$, $\lim y = b$ einem Grenzwerte U nähert, $f(x, y)$ auch dem Wert U zustreben wird, wenn der Punkt (x, y) längs einer beliebigen Kurve an den Punkt (a, b) heranrückt. Wir wollen jetzt den umgekehrten Satz beweisen.

Satz. *Ist $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (a, b), höchstens mit Ausnahme dieses Punktes selbst, eindeutig erklärt und nähert sich $f(x, y)$ einer Grenze, wenn der Punkt (x, y) längs einer beliebigen einfachen Kurve an den Punkt (a, b) heranrückt, so nähert sich $f(x, y)$ auch einem Grenzwert, wenn der Punkt (x, y) den zweidimensionalen Grenzübergang $\lim x = a$, $\lim y = b$ ausführt.*

Gesetzt, der Satz wäre falsch. Dann gäbe es eine feste positive Größe h derart, daß in jeder Umgebung des Punktes (a, b), also insbesondere in einem um diesen Punkt beschriebenen Kreise mit dem beliebig kleinen Radius R ein Punktepaar (X, Y), (X', Y') existierte, wofür

$$|f(X, Y) - f(X', Y')| \geqq h$$

wäre. Man nehme nun r_1 willkürlich an, setze $R = r_1$ und zeichne ein derartiges Punktepaar $(X, Y) = (x_1, y_1)$, $(X', Y') = (x_1', y_1')$ in diesem Kreise auf. Dann wähle man r_2 so klein, daß der um (a, b)

1) Man vgl. die zweite Anmerkung auf S. 33.

beschriebene Kreis mit dem Radius $R = r_2$ weder den Punkt (x_1, y_1) noch den Punkt (x_1', y_1') umfaßt, und zeichne wieder ein entsprechendes Punktepaar (x_2, y_2), (x_2', y_2') in ihm auf. Fährt man so fort, so erhält man hierdurch eine unendliche Folge von Punktepaaren (x_n, y_n), (x_n', y_n'), die bei wachsendem n gegen den Punkt (a, b) konvergieren und für welche im übrigen stets

$$f(x_n, y_n) - f(x_n', y_n') \geqq h$$

ist. Verbindet man diese Punkte der Reihe nach durch eine einfache Kurve C:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

etwa durch einen geeigneten Polygonzug, so wird $f(x, y)$ keinem Grenzwert zustreben, wenn (x, y) längs C gegen (a, b) konvergiert. Denn $f(x, y)$ wird jetzt eine Funktion der einen Variabelen t und als solche betrachtet genügt sie nicht dem zweiten Teil von Theorem 2, Kap. 1, § 7.

Man könnte geneigt sein zu glauben, daß es zur Existenz eines Grenzwerts genügte, wenn $f(x, y)$ beim Herannahen des Punktes (x, y) an den Punkt (a, b) längs einer beliebigen Geraden stets einer Grenze zustrebt. Das ist aber doch nicht richtig, wie das Beispiel

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

zeigt. Führt man hier Polarkoordinaten ein: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, so geht $f(x, y)$ in die Funktion über:

$$f(x, y) = \sin 2\theta.$$

Doch selbst dann, wenn $f(x, y)$ stets ein und demselben Grenzwerte zustrebt, gleichviel auf welcher Geraden (x, y) sich dem Punkte (a, b) nähert, braucht $f(x, y)$ beim zweidimensionalen Grenzübergange $\lim x = a$, $\lim y = b$ noch gegen keinen Grenzwert zu konvergieren, wie das folgende Beispiel zeigt. In der Ebene $z = 1$ denke man sich die Kardioide

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$

gezeichnet und man lege einen Kegel, dessen Spitze sich im Koordinatenanfangspunkt befinden soll, durch diese Kurve. Dann soll die Funktion $f(x, y)$ in allen Punkten der (x, y)-Ebene mit Ausnahme der negativen x-Achse und des Anfangs durch die positive Ordinate z dieser Fläche definiert werden. Ferner soll $f(x, y)$ in den soeben ausgenommenen Punkten den Wert 0 haben. Die also definierte

Funktion $f(x, y)$ konvergiert gegen 0, wenn der Punkt (x, y) längs einer beliebigen durch den Punkt (0, 0) gehenden Geraden der (x, y)-Ebene diesem Punkte zustrebt. Trotzdem hat $f(x, y)$ keinen Grenzwert im Punkte (0, 0). In der Tat hat $f(x, y)$ in jedem Punkte der Projektion der bewußten Kardioide auf die (x, y)-Ebene, wofür $r > 0$ ist, den Wert 1. Rückt (x, y) also längs dieser Kurve an den Punkt (0 0) heran, so nähert sich $f(x, y)$ dem Werte 1.

§ 2. Stetigkeit; reguläre Kurven und der Bereich S.

Reguläre Kurven. Ein *Kurvenstück* soll *regulär* heißen, wenn die Kurve sich nicht schneidet, in jedem inneren und Endpunkte eine stetig sich drehende Tangente besitzt, und keine Spitze hat. Hiernach läßt sich ein reguläres Kurvenstück durch die Formeln darstellen:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 \neq 0,$$

wobei $\varphi(t)$, $\psi(t)$ in einem Intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$ stetige, mit stetigen Ableitungen erster Ordnung ausgestattete Funktionen sind und $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ in keinem Punkte des Intervalls gleichzeitig verschwinden. Außerdem lassen die beiden Gleichungen

$$\varphi(t) = \varphi(t'), \quad \psi(t) = \psi(t'), \quad t_0 \leqq t' \leqq t_1,$$

nur die eine Lösung $t = t'$ zu. Umgekehrt wird durch zwei solche Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ein reguläres Kurvenstück definiert.

Eine Kurve heißt *regulär*, wenn sie sich aus einer endlichen Anzahl aneinander gereihter, regulärer Kurvenstücke zusammensetzt. Sie läßt sich dann in der obigen Gestalt parametrisch darstellen, wobei φ und ψ in einem Intervalle $a \leqq t \leqq b$ stetig sind und, von einer endlichen Anzahl von Punkten abgesehen, stetige Ableitungen besitzen. In den Ausnahmepunkten hat jede dieser Funktionen sowohl eine vorwärts als eine rückwärts genommene Ableitung, an welche sich die betreffende Ableitung beim einseitigen Grenzübergang stetig anschließt. Endlich verschwinden die beiden Ableitungen φ', ψ' (inkl. der vor- und rückwärts genommenen Ableitungen) niemals gleichzeitig. Auch diese Bedingungen reichen umgekehrt zur Definition einer regulären Kurve hin.

Eine Kurve heißt *einfach*, wenn für jeden Wert von t' innerhalb des Intervalls (a, b) die beiden Gleichungen $\varphi(t) = \varphi(t')$, $\psi(t) = \psi(t')$ nur die eine Wurzel $t = t'$ zulassen. Sie heißt *geschlossen*, wenn $\varphi(a) = \varphi(b)$ und $\psi(a) = \psi(b)$ ist.

Der Bereich S. Ein Bereich heißt *abgeschlossen,* wenn er im Endlichen liegt und jeder seiner Randpunkte zu ihm gerechnet wird.[1]) Auf die denkbar allgemeinsten Begrenzungen eines Bereichs wollen wir vor der Hand nicht eingehen, sondern unter einem *regulären Bereich* oder schlechtweg einem *Bereich S* bloß ein abgeschlossenes Stück der Ebene verstehen, welches von einer oder mehreren regulären Kurven begrenzt ist; doch soll die Anzahl der Kurven, sowie ihrer mehrfachen und Schnittpunkte endlich sein. Im Falle der Bereich von mehreren Seiten her an einen Randpunkt stößt, soll dieser auch mehrfach gezählt werden; vgl. unten Definition eines Randwertes.[2])

Stetigkeit. Sei $f(x, y)$ in jedem Punkte eines zweidimensionalen Bereichs eindeutig erklärt. Dann heißt $f(x, y)$ in einem Punkte (a, b) desselben *stetig,* wenn

$$\lim_{x=a,\ y=b} f(x, y) = f(a, b)$$

ist. Die Funktion heißt *im Bereiche stetig,* wenn sie in einem jeden seiner Punkte stetig ist. Werden die Randpunkte mit zum Bereiche gerechnet, so handelt es sich selbstverständlich bei der Definition der Stetigkeit in einem Randpunkte um einen Grenzübergang, wobei der Punkt (x, y) bloß auf die Punkte des vorgelegten Bereichs beschränkt wird; vgl. auch unten, Definition eines Randwertes.

Wir bemerken noch, daß es zur Stetigkeit einer Funktion zweier Variabelen (x, y) nicht genügt, daß die Funktion bei konstantem y eine stetige Funktion $f(x, y_0)$ von x, sowie bei konstantem x eine stetige Funktion $f(x_0, y)$ von y sei, wie das im vorhergehenden Paragraphen angeführte Beispiel

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \qquad 0 < |x| + |y|,$$

zeigt, indem man zum gegenwärtigen Zwecke noch $f(0, 0) = 0$ setzt. Selbst dann, wenn die Funktion im allgemeinen stetig und auch auf jeder durch einen bestimmten Punkt (a, b) gehenden Geraden stetig ist, braucht sie im Punkte (a, b) nicht stetig zu sein, wie sich aus dem letzten Beispiel jenes Paragraphen ergibt.

Definition eines Randwerts. Sei (a, b) ein Randpunkt, gleichviel ob die Funktion dort definiert ist oder nicht. Man sagt, $f(x, y)$ *schließt sich dem Randwerte A stetig an,* oder *nimmt den Randwert A* in jenem

1) Man vergleiche die allgemeine Definition einer abgeschlossenen Punktmenge, Kap. 1, § 8, welche den vorliegenden Fall umfaßt.

2) Wegen der Definition eines *Kontinuums* vergleiche man Kap. 5, § 2.

Punkte *an*, wenn bei Beschränkung von (x, y) auf innere Punkte des Bereichs

$$\lim_{x=a,\ y=b} f(x, y) = A$$

ist.

Dieser Begriff des Randwerts ist mit einer nach der Dirichletschen Auffassung einer Funktion möglichen Erklärung von $f(x, y)$ in einem Randpunkte nicht zu verwechseln.

Es kann vorkommen, daß ein Bereich S von mehreren Seiten her an einen Randpunkt heranreicht. Man denke etwa an so viel des Äußeren der Kurve $r = a \cos 3\theta$, wie im Kreise $r = 2a$ liegt. In einem solchen Falle wird man einen kleinen Kreis um den betreffenden Randpunkt legen und dann die verschiedenen Stücke für sich betrachten, welche durch den Kreis aus dem Bereich geschnitten werden. Jedem Stück wird im allgemeinen ein verschiedener Randwert entsprechen.

Unter einer *stetigen Folge von Randwerten* versteht man solche, welche eine stetige Funktion des Parameters t bilden, durch welchen sich die Randkurve parametrisch ausdrücken läßt.

Es ist sofort evident, daß eine im Innern eines Bereichs S stetige Funktion $f(x, y)$, welche sich einer stetigen Folge von Randwerten stetig anschließt und außerdem in den Randpunkten so definiert ist, daß sie dort mit diesen Randwerten übereinstimmt, auch im abgeschlossenen Bereich stetig ausfällt. Man kann indessen weiter gehen und den Satz aussprechen:

Satz.[1]) *Nimmt die Funktion $f(x, y)$ in jedem Randpunkte eines Bereichs S, der obigen Definition gemäß, einen Randwert an, so bilden diese Randwerte eine stetige Folge.*

Ist $f(x, y)$ außerdem im Innern von S stetig und wird $f(x, y)$ am Rande gleich den Randwerten gesetzt, so ist $f(x, y)$ im abgeschlossenen Bereiche S stetig.

In der Tat sei $P:(a, b)$ ein Randpunkt und U der entsprechende Randwert. Dann wird einem beliebig vorgegebenen positiven ε ein positives δ zuzuordnen sein, dergestalt daß

$$|f(x, y) - U| < \varepsilon$$

bleibt, wenn nur

$$|x - a| < \delta, \qquad |y - b| < \delta, \qquad 0 < |x - a| + |y - b|$$

sind, und (x, y) zugleich ein Punkt der betreffenden Umgebung ist.

1) Painlévé, *Toulouse Annales*, 2, (1888), p. B. 20.

ist nun $P':(a', b')$ ein zweiter Punkt des Randes, wofür

$$|a' - a| < \delta, \qquad |b' - b| < \delta,$$

und läßt man den Punkt (x, y), stets in der bewußten Umgebung des Punktes P bleibend, an P' heranrücken, so nähert sich $f(x, y)$ dabei dem Randwerte U'. Andererseits schließt man aus der ersten obiger Ungleichungen, daß

$$|U' - U| \leqq \varepsilon$$

ist, und hiermit ist der Satz bewiesen.

Nimmt $f(x, y)$ in jedem Randpunkte von S einen Randwert an, so sagt man auch, $f(x, y)$ sei *stetig am Rande.*

Der n-dimensionale Raum. Die auf Funktionen einer Variabelen bezüglichen Stetigkeitsdefinitionen und -sätze lassen sich auf Funktionen mehrerer Variabelen übertragen, indem man bloß das Wort *Intervall* durch *Bereich* ersetzt. Auch werden die Beweise in ähnlicher Weise geführt, indem man die Ebene oder den Raum in ein Quadrat- resp. Würfelnetz zerlegt.

Auf einen Punkt müssen wir dabei doch noch etwas näher eingehen. Ist nämlich die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen bloß auf zwei oder drei beschränkt, so leistet unsere geometrische Anschauung die Mittel zu einer einfachen Vorstellung des Spielraumes für die betreffenden Wertsysteme. Diese Mittel versagen indessen, falls jene Anzahl größer als drei ist, und man wird dann auf rein arithmetische Bedingungen angewiesen. So könnte beispielsweise in einem bestimmten Problem besagter Spielraum solche Wertsysteme (x, y, z, t) umfassen, wofür

$$x^2 + y_2 + z_2 + t^2 < 1$$

ist. Nun bilden die Punkte (x, y) der Ebene, wofür

$$x^2 + y^2 < 1$$

ist, das Innere eines Kreises: $x^2 + y^2 = 1$, und ebenso machen die Punkte des Raumes, wofür

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

ist, das Innere einer Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ aus. Im Anschluß an diese geometrischen Vorstellungen ist es bequem, sich auch im vorliegenden Falle das Wertsystem (x, y, z, t) als einen Punkt eines vierdimensionalen Raumes zu denken und die Gesamtheit der Punkte

(x, y, z, t), wofür
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < 1$$
ist, als das Innere der vierdimensionalen Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ aufzufassen, wobei sich dann die Begriffe: Bereich, Randpunkt, Umgebung, schon von selbst übertragen.

Und so werden wir uns denn allgemein der Metapher eines n-dimensionalen Raumes und eines in demselben gelegenen Bereiches bedienen, in welch letzterem unsere Funktion definiert wird. Das feste Fundament, worauf sich alles in der letzten Instanz gründet, bilden allerdings arithmetische Festlegungen, immerhin bewährt sich jene Metapher, denn durch sie wird doch noch etwas von dem Vorteil der geometrischen Anschauung gerettet, und wenn das auch nur schließlich in einer gewissen Analogie besteht.

Aufgabe. Ist $f(x, y)$ im Innern eines Bereichs S gleichmäßig stetig, so ist $f(x, y)$ auch am Rande von S stetig.

§ 3. Der Mittelwertsatz.

Die Funktion $f(x, y)$ sei in einem Bereich S eindeutig erklärt und habe in jedem inneren Punkte von S partielle Ableitungen[1])
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y).$$
Seien (x_0, y_0), $(x_0 + h, y_0 + k)$ zwei innere Punkte von S, doch sollen h, k so gewählt werden, daß das Rechteck, dessen Ecken sich in den vier Punkten $(x_0 \pm h, y_0 \pm k)$ befinden, ganz innerhalb S liegt. Man bilde nun den Ausdruck
$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0),$$
und wende den Mittelwertsatz von Kap. 1, § 6 sukzessive auf die beiden Differenzen rechter Hand an. So kommt:
$$(1) \qquad \begin{aligned} &f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) + kf_y(x_0, y_0 + \theta' k), \end{aligned} \qquad \begin{cases} 0 < \theta < 1, \\ 0 < \theta' < 1. \end{cases}$$
Hiermit haben wir eine Form des Mittelwertsatzes für eine Funktion

1) Es sei noch einmal an die Verabredung erinnert, unter einer Ableitung schlechtweg einen eigentlichen Grenzwert zu verstehen; vgl. Kap. 1, § 5.

zweier Variabelen erhalten, und zwar ohne die Stetigkeit der partiellen Ableitungen vorauszusetzen.[1])

Aus der bloßen Existenz einer Ableitung einer Funktion $f(x)$ einer einzigen Variabelen in einem Punkte ging bereits die Stetigkeit von $f(x)$ daselbst hervor, vgl. Kap. 1, § 5, Ende. Der entsprechende Satz für Funktionen mehrerer Variabeln ist dagegen nicht richtig, wie das Beispiel zeigt:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \qquad 0 < |x| + |y|; \qquad f(0, 0) = 0.$$

Setzt man aber außerdem noch voraus, daß die partiellen Ableitungen in der Umgebung des betreffenden Punktes endlich bleiben, d. h. daß es eine positive Konstante G gibt, derart daß für jeden Punkt (x, y) dieser Nachbarschaft

$$|f_x(x, y)| < G, \qquad |f_y(x, y)| < G$$

ist, so wird der Funktion damit die Stetigkeit auferzwungen, wie man aus dem Mittelwertsatz (1) sofort erkennt. Wenn insbesondere $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ innerhalb eines Bereiches S stetig sind, so sind sie damit auch in jedem innerhalb S befindlichen abgeschlossenen Bereiche S' endlich, woraus man also auf die Stetigkeit von $f(x, y)$ innerhalb S schließen kann.

Durch den Mittelwertsatz beweist man bekanntlich unter der Voraussetzung der Stetigkeit aller in Betracht kommenden partiellen Ableitungen die Formel

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \tag{2}$$

wo

$$z = f(x, y),$$

$$x = \varphi(r, s), \qquad y = \psi(r, s)$$

ist. Hängen insbesondere φ, ψ nur von r ab, so ist

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dr}. \tag{3}$$

Im Falle, daß die partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ innerhalb S stetig sind, kann man dem Mittelwertsatze eine symmetrische, dem Gedächtnisse leicht einzuprägende Form geben, indem man unter

1) Cauchy, *Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823), S. 33.

Beibehaltung der früheren Voraussetzungen bezüglich der Punkte (x_0, y_0), $(x_0 + h, y_0 + k)$ den Ausdruck

$$f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)$$

bildet und denselben dann als eine Funktion der einen Variabelen t betrachtet. Bezeichnet man ihn mit $\Phi(t)$, so ist nach dem Mittelwertsatze von Kap. 1, § 6

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta), \qquad 0 < \theta < 1,$$

und man gelangt somit zur symmetrischen Formel:

$$(4) \qquad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$
$$= hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Zur Begründung dieser Formel genügt, wie man sieht, die Stetigkeit der beiden Ableitungen von $f(x, y)$ in einem Streifen, welcher die die beiden Punkte (x_0, y_0), $(x_0 + h, y_0 + k)$ verbindende Strecke im Innern enthält.

Satz. *Ist die Funktion*

$$z = f(x, y)$$

in jedem innern Punkte eines Bereichs S eindeutig erklärt und daselbst mit beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen; verschwinden ferner diese Ableitungen in jedem innern Punkte von S:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

so ist $f(x, y)$ im Innern des ganzen Bereichs S eine Konstante.

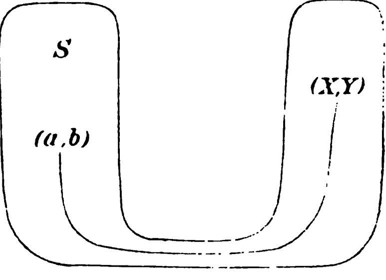


Fig. 19.

Seien (a, b), (X, Y) irgend zwei innere Punkte von S. Man verbinde diese Punkte durch ein reguläres Kurvenstück C:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

und verfolge den Wert von $f(x, y)$ längs C. Hierbei ist

$$z = f[\varphi(t), \psi(t)]$$

eine stetige Funktion von t, deren Ableitung identisch verschwindet:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \psi'(t) = 0.$$

Darum hat $f(x, y)$ in allen Punkten von C denselben Wert; insbesondere ist also

$$f(a, b) = f(X, Y).$$

Nun war aber (X, Y) ein beliebiger innerer Punkt von S, und hiermit ist der Satz bewiesen.[1])

Aufgabe 1: Man integriere die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y),$$

wo $f(x, y)$ in einem Bereich S stetig ist, vermöge Quadraturen. Dabei beschränke man sich auf den Fall, daß die Randkurve einfach ist und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und Strecken eine mit der x-Achse parallele Tangente besitzt.

Aufgabe 2. Sei $f(x)$ eine im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion, welche im Innern des Intervalls, $a < x < b$, nur positive Werte annimmt. Der Bereich S bestehe aus den Punkten (x, y), wofür

$$a \leqq x \leqq b, \qquad 0 \leqq y \leqq f(x)$$

ist. Eine Funktion $F(x, y)$ möge im Innern von S eindeutig erklärt und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung ausgestattet sein, welche außerdem in S endlich sind. Dann nimmt $F(x, y)$ in jedem Randpunkte von S einen Randwert an.

Aufgabe 3. Sei $f(x, y)$ im Innern eines Bereichs S mit stetigen Ableitungen erster Ordnung ausgestattet, welche dort auch endlich bleiben. Man zeige, daß $f(x, y)$ dann am Rande stetig ist.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einem allgemeinen Satze betreffend die Ableitung einer Funktion am Rande ihres Definitionsbereichs.

Satz. *Sei $F(x, y)$ im Innern und am Rande eines Bereiches S stetig und im Innern von S mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehen, welche außerdem am Rande stetig bleiben mögen. Sei L:*

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s)$$

ein beliebiges in S gelegenes reguläres Kurvenstück, wobei s die Bogen-

1) Der im Serretschen Lehrbuche über Differential- und Integralrechnung gegebene, auf eine einmalige Anwendung des Mittelwertsatzes in der Gestalt (1) oder (2) sich stützende Beweis dieses Satzes reicht nicht für alle Fälle aus, wie durch beigesetzte Figur angedeutet ist.

länge desselben bedeutet. Dann gilt allgemein die Formel:

$$\frac{d}{ds} F[\varphi(s),\ \psi(s)] = F_x \varphi'(s) + F_y \psi'(s).$$

Ist $x_0 = \varphi(s_0)$, $y_0 = \psi(s_0)$ ein innerer Punkt von S, so subsummiert sich der Satz direkt unter Formel (3). Auch für den Fall eines Randpunktes, der nur keine Ecke ist, bleibt der Beweis im wesentlichen ungeändert. Ist nämlich die Tangente der Randkurve in (x_0, y_0) mit keiner der Koordinatenachsen parallel, so kann man sich der Zerlegung (1) oder der entsprechenden bedienen, welche durch Vertauschung von x mit y und zugleich von h mit k entsteht:

$$\Delta F = \Delta x F_x(x_0 + \theta \Delta x,\ y_0 + \Delta y) + \Delta y F_y(x_0,\ y_0 + \theta' \Delta y)$$

resp.

$$\Delta F = \Delta x F_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0) + \Delta y F_y(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \theta_1' \Delta y),$$

woraus sich dann der Satz sofort ergibt. Letzterer Ausnahmefall wird nun durch eine Verdrehung der Achsen durch einen spitzen Winkel beseitigt.

Es bleibt nur noch der Fall einer Ecke übrig. Da es nun keine zweite Ecke in der Nähe der ersten geben kann, also auch keinen zweiten Punkt, wofür der Satz noch nicht feststeht, so kann man den Mittelwertsatz für eine Variabele direkt auf die Differenz ΔF anwenden:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F[\varphi(s_0 + \Delta s),\ \psi(s_0 + \Delta s)] - F[\varphi(s_0),\ \psi(s_0)] \\ &= \Delta s \{F_x \varphi' + F_y \psi'\}_{s = s_0 + \theta \Delta s}, \end{aligned}$$

also ist auch hier

$$\lim \frac{\Delta F}{\Delta s} = F_x \varphi' + F_y \psi',$$

und der Beweis ist somit vollständig erbracht.

Der Satz gilt offenbar auch für eine reguläre Kurve L, sofern man in einer Ecke derselben die vorwärts resp. rückwärts genommenen Ableitungen an Stelle der in der Aussage des Satzes auftretenden Ableitungen versteht.

§ 4. Implizite Funktionen.

Gleich zu Anfang der Differentialrechnung wird die Aufgabe behandelt, eine Funktion y nach x zu differentiieren, welche implizite durch eine Gleichung von der Form

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

gegeben ist. Man soll z. B. die Tangentenrichtung der Kurve

$$x^3 + y^3 + 2x + 3y = 0$$

ermitteln. Die Lösung besteht darin, daß man beiderseits nach x differentiiert und aus der dadurch erhaltenen Gleichung:

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} + 2 + 3\frac{dy}{dx} = 0,$$

dy/dx bestimmt. Sehen wir näher zu, was da eigentlich gemacht wurde, so zeigt sich, daß die Existenz einer Ableitung gar nicht bewiesen, vielmehr von vornherein stillschweigend vorausgesetzt wurde; unter dieser Annahme ist die Ableitung bloß ausgewertet worden.

Ein bekanntes Verfahren, die Funktion

$$y = x^n$$

zu differentiieren, wo $n = p/q$ ein positiver Bruch ist, leidet auch an demselben Mangel. Man formt nämlich die Gleichung, wie folgt, um:

$$y^q = x^p$$

und differentiiert dann beiderseits nach x.

In diesen beiden Fällen steht doch wenigstens die Existenz der Funktion fest. Man wendet aber dasselbe Differentiationsverfahren oft an, wo selbst die Möglichkeit, die Gleichung (1) nach y aufzulösen, nicht einmal dargetan ist; z. B.

$$ye^x - x\cos y = 0.$$

Wir sehen also, daß es sich bei den impliziten Funktionen vor allem um zwei prinzipielle Fragen handelt: a) Wird durch die vorgelegte Gleichung überhaupt eine Funktion definiert? b) Hat die Funktion, sofern sie vorhanden ist, eine Ableitung? Kann man auf diese beiden Fragen erst eine bejahende Antwort geben, so reichen dann allerdings die bekannten Methoden der Differentialrechnung zur Auswertung der Ableitung in der Praxis hin.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Funktion, sowie der Ableitung ist zuerst von Cauchy[1]) für den speziellen Fall gegeben worden, daß sich $F(x, y)$ in eine Taylorsche Reihe entwickeln

1) Turiner Abhandlung vom Jahre 1831 = *Exercises d'analyse*, Bd. 2 (1841) S. 65. Weitere Literaturangaben hierüber finden sich in der *Enzyklopädie*, II B 1, Nr. 44.

läßt. Dini[1]) hat dann später den Cauchyschen Satz auf allgemeine Funktionen ausgedehnt und zugleich den auf Potenzreihen basierenden Cauchyschen Beweis durch einen einfacheren ersetzt.

Existenztheorem. *Sei*

$$F(u, x, y, \cdots)$$

eine in der Umgebung (A) *der Stelle* $(u_0, x_0, y_0, \cdots)$:

$$|u - u_0| < A, \quad |x - x_0| < A, \quad |y - y_0| < A, \cdots; \quad A > 0,$$

eindeutige stetige Funktion der $n + 1$ *Argumente* $u, x, y, \cdots$, *welche in diesem Punkte verschwindet:*

$$F(u_0, x_0, y_0, \cdots) = 0,$$

und in jedem Punkte von (A) *stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt*[2]); *sei ferner*

$$\frac{\partial F}{\partial u}\bigg|_{(u_0, x_0, y_0, \cdots)} = F_u(u_0, x_0, y_0, \cdots) \neq 0.$$

Dann gibt es eine in einem Bereiche

$$|x - x_0| < h, \quad |y - y_0| < h, \cdots; \quad h > 0,$$

eindeutige stetige Funktion

$$u = \varphi(x, y, \cdots),$$

welche im Punkte $(x_0, y_0, \cdots)$ *den Wert* u_0 *annimmt:* $u_0 = \varphi(x_0, y_0, \cdots)$ *und, in* $F(u, x, y, \cdots)$ *eingetragen, diese Funktion identisch zum Verschwinden bringt:*

$$F(\varphi(x, y, \cdots), x, y, \cdots) \equiv 0.$$

Durch die Funktion $u = \varphi(x, y, \cdots)$ *werden außerdem alle diejenigen in einer bestimmten Nachbarschaft der Stelle* $(u_0, x_0, y_0, \cdots)$ *gelegenen Punkte* $(u, x, y, \cdots)$ *erschöpft, in welchen* $F(u, x, y, \cdots)$ *verschwindet.*

1) Dini, *Analisi infinitesimale* 1, S. 162 (lith.) Pisa 1877/78; Peano-Genocchi, *Calcolo differenziale*, Turin 1884, Nr. 110—123 (deutsche Übersetzung von Bohlmann und Schepp, Leipzig 1899).

2) Bezüglich der Ableitungen braucht man nicht so viel zu verlangen. So genügt beispielsweise zum Beweise des ersten Teils des Satzes bloß die Existenz der einen Ableitung F_u nebst der Annahme, daß dieselbe stets positiv (negativ) bleibe. Wir haben die Formulierung des Textes deshalb gewählt, weil sie sich dem Gedächtnisse leichter einprägt und für die Praxis auch ausreicht.

Die Funktion $u = \varphi(x, y, \cdots)$ besitzt stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, welche nach dem gewöhnlichen Verfahren der Differentialrechnung erhalten werden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_u}, \quad \text{usw.}$$

Wir führen den Beweis bloß für den Fall $n = 1$; die Verallgemeinerung des Beweises bietet dann keine Schwierigkeit. Der Bereich (A) besteht hier aus dem Innern eines Quadrats, dessen Ecken in den vier Punkten

$$(u_0 \pm A, \quad x_0 \pm A)$$

liegen.[1]) Da $F_u(u, x)$ in (A) stetig ist und im Punkte (u_0, x_0) nicht verschwindet, so kann man einen abgeschlossenen in (A) gelegenen Bereich (A'):

$$|u - u_0| \leqq A', \quad |x - x_0| \leqq A',$$
$$0 < A' < A,$$

Fig. 20.

so bestimmen, daß $F_u(u, x)$ nirgends in (A') verschwindet. Der Beweis gliedert sich nun, wie folgt. Wir nehmen an, daß

$$F_u(u_0, x_0) > 0$$

sei, — der entgegengesetzte Fall wird ja durch die Transformation $F(u, x) = -\overline{F}(u, x)$ auf diesen zurückgeführt, — und zeigen

a) daß

$$F(u_0 + A', x_0) > 0, \qquad F(u_0 - A', x_0) < 0$$

ist;

b) daß es ein Intervall

$$x_0 - h < x < x_0 + h, \qquad h > 0,$$

gibt, in welchem durchweg

$$F(u_0 + A', x) > 0, \qquad F(u_0 - A', x) < 0$$

bleibt. — Alsdann richten wir unser Augenmerk auf das Rechteck,

1) Entgegen dem gewöhnlichen Brauche in der analytischen Geometrie tragen wir hier die erste Variabele des Größenpaares (u, x) als Ordinate, die zweite als Abszisse auf.

dessen Ecken in den vier Punkten $(u_0 \pm A', x_0 \pm h)$ liegen, und beweisen,

c) daß es auf jeder Geraden $x = x'$, welche dieses Rechteck durchsetzt:

$$x_0 - h < x' < x_0 + h,$$

einen, aber auch nur einen im Rechteck gelegenen Punkt (u', x') gibt, in welchem $F(u, x)$ verschwindet:

$$F(u', x') = 0.$$

Damit ist zunächst die Existenz einer eindeutigen Funktion

$$u = \varphi(x), \qquad x_0 - h < x < x_0 + h,$$

dargetan, welche die Gleichung

$$F(u, x) = 0$$

löst und zugleich alle in der Umgebung der Stelle (u_0, x_0) gelegenen Punkte (u, x) erschöpft, welche die Funktion $F(u, x)$ zum Verschwinden bringen.

ad a) Verfolgen wir die Funktion $F(u, x)$ längs der Geraden $x = x_0$, so haben wir es mit einer Funktion einer einzigen Variabelen u,

$$F(u, x_0),$$

zu tun, welche im Intervalle $u_0 - A' \leqq u \leqq u_0 + A'$ stetig ist und eine positive Ableitung daselbst besitzt. Demgemäß wächst $F(u, x_0)$ beständig mit u, vgl. Kap. 1, § 6, Aufgabe 3, und da die Funktion überdies im Punkte u_0 verschwindet, so ist die Richtigkeit der Behauptung hiermit erwiesen.

ad b) Verfolgen wir jetzt die Funktion $F(u, x)$ längs der Geraden $u = u_0 + A'$, so haben wir es mit einer stetigen Funktion einer Variabelen x,

$$F(u_0 + A', x),$$

zu tun, die im Punkte x_0 positiv ist. Aus der Definition der Stetigkeit geht dann hervor, daß es ein Intervall $x_0 - h_1 < x < x_0 + h_1$, $h_1 > 0$, gibt, in welchem $F(u_0 + A', x)$ noch positiv bleibt, vgl. Kap. 1, § 4, Aufg. 6. Ebenso gibt es ein Intervall $x_0 - h_2 < x < x_0 + h_2$, $h_2 > 0$, in welchem $F(u_0 - A', x)$ negativ bleibt. Man braucht also h nur als die kleinere der beiden positiven Größen h_1, h_2 zu nehmen.

ad c) Verfolgen wir endlich die Funktion $F(u, x)$ längs der Geraden $x = x'$, wo $x_0 - h < x' < x_0 + h$ ist, so haben wir es mit einer im Intervalle $u_0 - A' \leqq u < u_0 + A'$ stetigen Funktion von u,

$$F(u, x'),$$

zu tun, welche in dem einen Endpunkte des Intervalls positiv, im anderen negativ ist:

$$F(u_0 + A', x') > 0, \qquad F(u_0 - A', x') < 0.$$

Nach dem 3. Satze von Kap. 1, § 4 muß $F(u, x')$ dann den Zwischenwert 0 mindestens einmal annehmen. Würde $F(u, x')$ aber in zwei verschiedenen Punkten $u_1 < u_2$ dieses Intervalls verschwinden, so müßte nach dem Rolleschen Satze $F_u(u, x')$ für einen mittleren Wert $u_1 < U < u_2$ verschwinden, was zu einem Widerspruch führt.

Die eindeutige Funktion $u = \varphi(x)$, deren Existenz nunmehr feststeht und welche die Gleichung $F(u, x) = 0$ löst, ist ferner im Intervalle $x_0 - h < x < x_0 + h$ stetig. Das wollen wir zunächst bloß für den einen Punkt x_0 zeigen. Der Beweis gelingt uns in außerordentlich einfacher Weise, indem wir uns überlegen, daß die ganze bisherige Schlußweise für jeden kleineren Bereich (A''):

$$|u - u_0| \leqq A'', \qquad |x - x_0| \leqq A'', \qquad 0 < A'' < A',$$

in Kraft bleibt. Hiernach können wir der beliebig kleinen positiven Größe $\varepsilon = A''$ ein Rechteck, dessen Ecken in den vier Punkten $(u_0 \pm A'', x_0 \pm h'')$, $0 < h'' \leqq h$, liegen, in der Weise zuordnen, daß die Funktion $F(u, x)$ in einem innerhalb des Rechtecks gelegenen Punkte (u', x') der Geraden $x = x'$, $x_0 - h'' < x' < x_0 + h''$, verschwindet. Da nun die Formel $u = \varphi(x)$ alle Punkte von (A') erschöpft, in welchen $F(u, x)$ verschwindet, so muß eben $u' = \varphi(x')$ sein, und $\varphi(x)$ erweist sich somit im Punkte x_0 als stetig.

Jetzt sei x' ein beliebiger Punkt des Intervalls $x_0 - h < x < x_0 + h$, und sei $u' = \varphi(x')$. Dann gibt es eine Umgebung des Punktes (u', x'), in welcher alle die Bedingungen des Theorems erfüllt sind, wenn man bloß (u', x') an Stelle von (u_0, x_0) treten läßt. Daher gelten auch alle die bisherigen Schlüsse, insbesondere also der, wonach sich die Stetigkeit von $\varphi(x)$ im Punkte x' ergibt. Hiermit ist die Stetigkeit von $\varphi(x)$ im Intervalle $x_0 - h < x < x_0 + h$ allgemein bewiesen.

Es bleibt nur noch übrig, die Existenz der Ableitung $\varphi'(x)$ nachzuweisen. Nach dem Mittelwertsatze ist

$$F(u + \Delta u, x + \Delta x) =$$
$$\Delta u F_u(u + \theta\Delta u, x + \theta\Delta x) + \Delta x F_x(u + \theta\Delta u, x + \theta\Delta x) = 0,$$
wo
$$u = \varphi(x), \qquad \Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Da nun der Punkt $(u + \theta\Delta u, x + \theta\Delta x)$ im Bereich (A') liegt, so verschwindet $F_u(u + \theta\Delta u, x + \theta\Delta x)$ nicht und man hat also

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = -\frac{F_x(u + \theta\Delta u, x + \theta\Delta x)}{F_u(u + \theta\Delta u, x + \theta\Delta x)}.$$

Läßt man Δx jetzt gegen 0 konvergieren, so nähert sich Δu wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ auch dem Werte 0, und darum ist

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) = -\frac{F_x(u, x)}{F_u(u, x)}.$$

Es sei noch bemerkt, daß, wenn

$$F_u(u_0, x_0, y_0, \cdots) = 0$$

ist, kein Schluß betreffend die Existenz einer Lösung der Gleichung

$$F(u, x, y, \cdots) = 0$$

gezogen werden kann, wie die folgenden Beispiele zeigen. Sei $n = 1$, $u_0 = x_0 = 0$.

α) Die Gleichung
$$F(u, x) = u^2 + x^2 = 0$$
läßt weiter keine Lösung zu.

β) Die Gleichung
$$F(u, x) = u^2 - x^2 = 0$$
läßt mehr als eine Lösung zu; die beiden Lösungen $u = x$ und $u = -x$ sind stetig und haben auch stetige Ableitungen. Doch sei auch auf die Fälle hingewiesen:

$$F(u, x) = u^2 - x, \qquad F(u, x) = u^3 - x.$$

γ) Die Gleichung
$$F(u, x) = (u - x)^2$$
läßt eine und nur eine Lösung zu, und zwar ist dieselbe stetig und mit einer stetigen Ableitung versehen.

Aufgabe 1. Man führe den Beweis des Existenztheorems an der Hand geometrischer Vorstellungen für den Fall $n = 2$, $F(u, x, y)$ durch.

Aufgabe 2. Man führe den Beweis des Existenztheorems rein analytisch für den allgemeinen Fall durch.

Aufgabe 3. Man zeige, daß, wenn zu den Voraussetzungen des Existenztheoremes noch die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $F(u, x)$ hinzukommt, die Funktion $\varphi(x)$ auch eine stetige zweite Ableitung $\varphi''(x)$ zuläßt. Man verallgemeinere diesen Satz.

§ 5. Fortsetzung: Funktionensysteme.

Aus dem Existenztheorem des vorhergehenden Paragraphen leitet man eine hinreichende Bedingung für die Auflösung eines Systems von Funktionen nach bestimmten Argumenten ab. Sie lautet folgendermaßen.[1])

Satz: *Jede der Funktionen*

$$F_i(u_1, \cdots u_p;\ x_1, \cdots x_n), \qquad i = 1, \cdots p,$$

sei nebst allen ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in der Umgebung der Stelle $(b_1, \cdots b_p;\ a_1, \cdots, a_n)$ *stetig und verschwinde dort:*

$$F_i(b_1, \cdots b_p;\ a_1, \cdots a_n) = 0, \qquad i = 1, \cdots p,$$

während die Jacobische Determinante

$$J = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, \cdots \frac{\partial F}{\partial u_p}$$

dort nicht verschwindet. Dann gibt es p in der Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ *eindeutige stetige mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ausgestattete Funktionen*

$$u_i = \varphi_i(x_1, \ldots x_n), \qquad i = 1, \ldots p,$$

welche in diesem Punkte resp. die Werte $b_1, \ldots b_p$ *annehmen:*

$$b_i = \varphi_i(a_1, \ldots a_n), \qquad i = 1, \ldots p,$$

und, in jede der Funktionen $F_i(u_1, \ldots u_p;\ x_1, \ldots x_n)$ *eingetragen, die p Gleichungen*

$$F_i(u_1, \ldots u_p;\ x_1, \ldots x_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots p,$$

1) Wir sprechen den Satz gleich allgemein aus; der Leser wolle sich zunächst $p = 2$, $n = 1, 2, 3$; $p = 3$, $n = 1, 2, 3$ gesetzt denken.

gleichzeitig lösen; dabei soll $(x_1, \ldots x_n)$ *ein beliebiger Punkt der betreffenden Umgebung des Punktes* $(a_1, \ldots a_n)$ *sein.*

Durch die p Funktionen $u_i = \varphi_i(x_1, \ldots x_n)$ *werden außerdem alle diejenigen in der Nähe der Stelle* $(b_1, \ldots b_p;\ a_1, \ldots a_n)$ *befindlichen Wertsysteme* $(u_1, \ldots u_p;\ x_1, \ldots x_n)$ *erschöpft, in welchen die p Funktionen* $F_i(u_1, \ldots u_p;\ x_1, \ldots x_n)$ *gleichzeitig verschwinden.*

Die Funktionen $\varphi_i(x_1, \ldots x_n)$ *besitzen stetige Ableitungen erster Ordnung, welche nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung berechnet werden.*

Wir führen den Beweis für den Fall $p = 2$, $n = 1$. Hierzu schreiben wir die beiden Gleichungen, die in der Nähe der Stelle (u_0, v_0, x_0) nach u, v aufzulösen sind, in der Form an:

$$(1) \qquad F(u, v, x) = 0, \qquad \Phi(u, v, x) = 0.$$

Dann ist

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

im Punkte (u_0, v_0, x_0) von 0 verschieden. Wir wollen uns auf eine Umgebung dieses Punktes beschränken, in welcher J nirgends verschwindet. Geometrisch handelt es sich dann um den Beweis, daß der geometrische Ort der Gleichungen (1) aus einer durch den Punkt (u_0, v_0, x_0) gehenden Raumkurve

$$u = f(x), \qquad v = \varphi(x),$$

besteht, die in der Nähe dieses Punktes eine stetige Tangente hat.

Im Punkte (u_0, v_0, x_0) können F_u, F_v sicher nicht beide verschwinden; sei etwa

$$F_u(u_0, v_0, x_0) \neq 0.$$

Dann kann man nach dem Existenztheorem von § 4 die Gleichung

$$F(u, v, x) = 0$$

in bezug auf u auflösen:

$$u = \omega(v, x), \qquad u_0 = \omega(v_0, x_0),$$

indem man die Umgebung der Stelle (u_0, v_0, x_0) nötigenfalls noch weiter so einschränkt, daß $F_u(u, v, x)$ dort nirgends verschwindet. Die Gesamtheit der in der Nähe von (u_0, v_0, x_0) gelegenen Punkte (u, v, x), in welchen $F(u, v, x)$ verschwindet, bildet demnach eine Fläche, $u = \omega(v, x)$.

Trägt man diesen Wert von u in die Funktion $\Phi(u, v, x)$ ein, so entsteht eine Funktion der beiden Argumente v, x:

$$\Phi(u, v, x) = \Psi(v, x),$$

welche in der Umgebung der Stelle (v_0, x_0) alle Stetigkeitsbedingungen des Satzes von § 4 erfüllt und überdies dort verschwindet. Sehen wir zu, ob auch

$$\Psi_v(v_0, x_0) \neq 0$$

ist, damit wir die Gleichung

$$(2) \qquad \Psi(v, x) = 0$$

nach v auflösen können. In der Tat ist

$$\Psi_v = \Phi_u \frac{\partial \omega}{\partial v} + \Phi_v,$$

$$0 = F_u \frac{\partial \omega}{\partial v} + F_v,$$

woraus dann folgt, daß

$$\Psi_v = \frac{J}{F_u} \neq 0$$

ist, und die Gleichung (2) definiert somit eine Funktion

$$v = \varphi(x), \qquad v_0 = \varphi(x_0).$$

Trägt man diesen Wert von v in die Funktion $\omega(v, x)$ ein:

$$\omega(\varphi(x), x) = f(x),$$

so erhält man nunmehr ein Funktionenpaar:

$$\begin{cases} u = f(x) \\ v = \varphi(x), \end{cases}$$

welches die vorgelegten Gleichungen (1) in der Nähe der Stelle (u_0, v_0, x_0) auflöst.

Erhält man aber auch auf diese Weise alle diejenigen in der Nähe der Stelle (u_0, v_0, x_0) gelegenen Punkte (u, v, x), welche die Gleichungen (1) gleichzeitig befriedigen? Daß dem in der Tat so ist, ergibt sich daraus, daß wir jedesmal, wo wir eine Gleichung gelöst haben, dem Hauptsatze zufolge eben sämtliche Lösungen derselben gewonnen haben, die es in der betreffenden Umgebung gibt.

Für den Fall $p = 2$, $n > 1$ erfährt der vorstehende Beweis keine Änderung. Durch den Schluß von p auf $p + 1$ kann man ihn ferner-

hin für ein beliebiges p beweisen, indem man wiederum davon ausgeht, daß die p partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_1}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial F_1}{\partial u_p}$ nicht alle verschwinden können, — sei $\partial F_1/\partial u_1 \neq 0$, — und dann die Gleichung

$$F_1(u_1, \ldots u_p;\ x_1, \ldots x_n) = 0$$

nach u_1 auflöst. Trägt man hierauf den also bestimmten Wert von u_1 in die übrigen $p-1$ Funktionen $F_2, \ldots F_p$ ein, so hat man es jetzt nur mit einem System von $p-1$ Funktionen zu tun, und zwar mit einem solchen, wie eine kurze Zwischenrechnung zeigt, für welches der Satz bereits gilt. Von hier ab schließt man wieder genau so, wie in dem bereits durchgeführten Falle.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß man aus dem Verschwinden der Jacobischen Determinante keinen Schluß ziehen kann, was man wieder, wie vorhin, durch Beispiele feststellt.

§ 6. Umkehrung eines Funktionensystems.

Aus den Sätzen der beiden vorhergehenden Paragraphen folgert man eine hinreichende Bedingung dafür, daß sich ein System von Funktionen:

$$x_i = \Phi_i(u_1, \ldots u_p), \qquad i = 1, \ldots p,$$

nach den Größen $u_1, \ldots u_p$ auflösen lasse.

Satz. *Sei $\Phi_i(u_1, \ldots u_p)$, $i = 1, 2, \ldots p$, eine in der Umgebung der Stelle $(b_1, \ldots b_p)$ eindeutige stetige mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehene Funktion der Argumente $u_1, \ldots u_p$ und sei die Jacobische Determinante*

$$J = \Sigma \pm \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial \Phi_p}{\partial u_p}$$

im Punkte $(b_1, \ldots b_p)$ von 0 verschieden. Dann läßt sich das Gleichungssystem

$$x_i = \Phi_i(u_1, \ldots u_p), \qquad i = 1, \ldots p,$$

in der Nähe der Stelle $(b_1, \ldots b_p;\ a_1, \ldots a_p)$, wo $a_i = \Phi_i(b_1, \ldots b_p)$ ist, in eindeutiger Weise nach $u_1, \ldots u_p$ auflösen:

$$u_i = \varphi_i(x_1, \ldots x_p), \qquad i = 1, \ldots p.$$

Dabei sind die Funktionen $\varphi_i(x_1, \ldots x_p)$ stetig und haben stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in der Nähe des Punktes $(a_1, \ldots a_p)$. Im übrigen ist die Jacobische Determinante j dieser Funktionen im

Punkte $(a_1, \dots a_p)$ *von* 0 *verschieden und zwar ist*

$$j = J^{-1}.$$

In der Tat braucht man nur

$$F_i(u_1, \dots u_p;\ x_1, \dots x_p) = \Phi_i(u_1, \dots u_p) - x_i$$

zu setzen und den Satz von § 5 hierauf anzuwenden. Durch direkte Auswertung zeigt man dann, daß die Jacobische Determinante

$$j = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_p}$$

den reziproken Wert von J hat.

Aus dem bloßen Verschwinden von J im Punkte $(b_1, \dots b_n)$ kann man keinen Schluß ziehen; so lassen beispielsweise die Gleichungen

$$x = u^3, \quad y = v^3$$

doch ausnahmslos eine eindeutige Umkehrung zu, trotzdem J in allen Punkten der Geraden $u = 0$, sowie $v = 0$ verschwindet.[1])

§ 7. Abbildung zweier Flächen aufeinander im Kleinen.[2])

Im Innern eines Bereiches S der (x, y)-Ebene seien die Funktionen $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ eindeutig erklärt und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehen; ferner verschwinde die Jacobische Determinante in keinem Punkte von S:

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Setzt man dann

(1) $$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y), \end{cases}$$

so wird jedem innerem Punkte von S ein Punkt der (u, v)-Ebene zu-

1) Wegen des Falles, wo J identisch verschwindet, vergleiche man Jordan, *Cours d'analyse*, Bd. 1, 2. Aufl., 1893, S. 86.

2) In diesem Paragraphen wird ein durchaus elementarer Gegenstand ausführlich behandelt, welcher in elementaren geometrischen Vorlesungen häufig keinen Platz findet, später aber, als zu den Elementen gehörend, nur flüchtig erörtert wird. Und doch sind scharfe Begriffe hier von nöten, denn sowohl für die Geometrie als für die Analysis ist dieser Gegenstand von großer Wichtigkeit. Dem Leser wird empfohlen, beim ersten Studium diese Seiten mit Sorgfalt durchzuarbeiten, um später einmal, nachdem er das Kapitel über Riemannsche Flächen gelesen hat, hierauf zurückzukommen und an der Hand der ihm dann zur Verfügung stehenden zahlreichen Beispiele den Paragraphen wieder durchzunehmen.

geordnet. Die Gesamtheit dieser letzteren Punkte bildet eine Menge Σ, — die *Abbildung* des Innern des Bereiches S auf die (u, v)-Ebene, — welche wir aber vor der Hand nicht einmal als einen zweidimensionalen Bereich aufzufassen berechtigt sind. Von prinzipieller Wichtigkeit ist daher der folgende

1. Satz. *Ist (x_0, y_0) ein innerer Punkt von S und (u_0, v_0) dessen Bildpunkt in der (u, v)-Ebene, so gibt es eine in S gelegene Umgebung s von (x_0, y_0) und eine Umgebung σ von (u_0, v_0), deren Punkte durch die Transformation* (1) *einander umkehrbar eindeutig nnd stetig zugeordnet werden.*

Drückt man die Transformation (1) *in der aufgelösten Form*

$$\begin{cases} x = \Phi(u, v) \\ y = \Psi(u, v) \end{cases}$$

aus, so haben die eindeutigen Funktionen Φ, Ψ ebenfalls stetige Ableitungen erster Ordnung, und ihre Jacobische Determinante verschwindet nicht.

Nur die geometrische Einkleidung dieses Satzes ist neu. Dem Inhalt nach deckt er sich vollständig mit dem Satze des vorhergehenden Paragraphen, wenn man darin $n = p = 2$ setzt.

Wir wollen die Beschaffenheit der Abbildung einer kleinen Umgebung s des Punktes (x_0, y_0) näher untersuchen. Sind $\Delta x, \Delta y$ beliebige Zuwächse, die nur dem absoluten Betrage nach eine passend gewählte Größe h nicht übersteigen, so kann man nach dem Mittelwertsatze schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \varphi_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + \varphi_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y \\ &= \varphi_x(x_0, y_0)\Delta x + \varphi_y(x_0, y_0)\Delta y + \zeta\Delta x + \zeta'\Delta y, \end{aligned}$$

wo ζ, ζ' wegen der Stetigkeit der Ableitungen $\varphi_x(x, y)$, $\varphi_y(x, y)$ zugleich mit $\Delta x, \Delta y$ gegen 0 konvergieren, und man erhält daher die Formel

$$(1') \qquad \begin{cases} \Delta u = A\Delta x + B\Delta y + (\zeta\Delta x + \zeta'\Delta y), \\ \Delta v = C\Delta x + D\Delta y + (\bar{\zeta}\Delta x + \bar{\zeta}'\Delta y), \end{cases}$$

wobei

$$A = \varphi_x(x_0, y_0), \quad B = \varphi_y(x_0, y_0), \quad C = \psi_x(x_0, y_0), \quad D = \psi_y(x_0, y_0),$$

$$J_0 = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0$$

ist und $\zeta, \zeta', \bar{\zeta}, \bar{\zeta}'$ alle dem absoluten Betrage nach unter einer be-

liebig klein zu wählenden positiven Konstante $\mathfrak{h}$ bleiben. Hierbei wird $\mathfrak{h}$ zuerst angenommen, worauf dann h dieser Wahl gemäß bestimmt wird.

Aus der Form der Gleichungen (1') erhellt, daß sich die durch die Gleichungen (1) definierte Abbildung in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) von der durch die lineare Transformation

$$(2) \qquad \begin{cases} du = A\Delta x + B\Delta y \\ dv = C\Delta x + D\Delta y \end{cases}$$

definierten Abbildung in mancher Beziehung wenig unterscheidet. Man kann die letztere als eine erste Annäherung ansehen und als solche wollen wir sie denn auch ausbeuten. Wir sprechen zuvörderst den leicht zu beweisenden Satz aus:

2. Satz. *Ist C eine beliebige vom Punkte (x_0, y_0) ausgehende reguläre Kurve und bezeichnet man mit Γ, Γ' die der Transformation (1) bzw. der Hilfstransformation (2) entsprechende Bildkurve, so haben Γ und Γ' im Punkte (u_0, v_0) dieselbe Tangentenrichtung.*

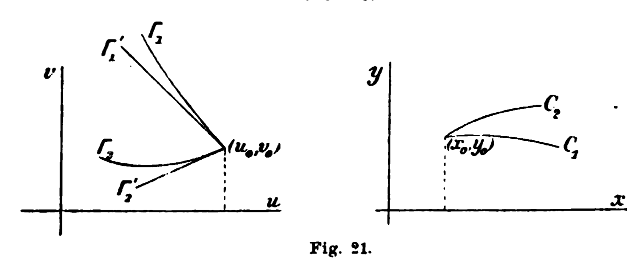


Fig. 21.

Aus diesem Satze ergibt sich dann sofort der

3. Satz. *Sind C_1, C_2 zwei von Punkte (x_0, y_0) ausgehende Kurven, Γ_1, Γ_2 ihre Bildkurven in bezug auf die Transformation (1), und Γ_1', Γ_2' ihre Bildkurven in bezug auf (2); bezeichnet man ferner mit β resp. β' den Winkel, welchen Γ_1 mit Γ_2 resp. Γ_1' mit Γ_2' im Punkte (u_0, v_0) bildet, so ist*

$$\beta' = \beta.$$

Die lineare Hilfstransformation (2). Die lineare Transformation (2) setzt sich bekanntlich aus folgenden Transformationen zusammen:

a) eine Verdrehung der (x, y)-Ebene um den Koordinatenanfang durch einen bestimmten Winkel φ_1:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos\varphi_1 - y \sin\varphi_1; \\ y_1 = x \sin\varphi_1 + y \cos\varphi_1; \end{cases}$$

b) zwei affine Transformationen:

$$\begin{cases} x_2 = \varkappa x_1 \\ y_1 = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_2 \\ y_2 = \lambda y_1; \end{cases}$$

c) eine Verdrehung der (x_2, y_2)-Ebene um den Koordinatenanfang durch einen Winkel φ_2:

$$\begin{cases} u = x_2 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_2 \\ v = x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2 . \end{cases}$$

Man kann sie auch dadurch erzeugen, daß man die (x, y)-Ebene zunächst einer parallelen Projektion auf eine zweite diese längs einer durch den Anfang gehenden Geraden schneidende Ebene unterzieht, um darauf die zweite Ebene einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Anfang als Mittelpunkt zu unterwerfen. Nimmt man endlich in dieser letzten Ebene die u, v-Achsen in geeigneter Weise an, so ist die Transformation (2) fertig.

Habitus der Abbildung kleiner Figuren. Eine kleine Figur F des Bereichs S, deren Rand durch den Punkt (x_0, y_0) geht, wird einerseits durch die Transformation (1) auf eine kleine Figur $\mathfrak{F}$, andererseits durch die Hilfstransformation (2) auf eine kleine Figur $\mathfrak{F}'$ des Bereichs Σ abgebildet. Beide Figuren haben den Randpunkt (u_0, v_0) gemeinsam und dort stimmen auch die Tangentenrichtungen ihrer Randkurven miteinander überein. Wir wollen zeigen, daß der Habitus der Figur $\mathfrak{F}'$ für denjenigen der Figur $\mathfrak{F}$ maßgebend ist, sofern der Umfang von F genügend beschränkt wird. Sei beispielsweise F ein kleines Dreick, dessen eine Ecke sich im Punkte (x_0, y_0) befindet. Dann wird $\mathfrak{F}'$ auch ein kleines Dreieck sein, dessen eine Ecke im Punkte (u_0, v_0) liegt, während $\mathfrak{F}$ aus einem krummlinigen Dreiecke besteht, dessen Seiten von regulären Kurvenstücken gebildet werden. Im Punkte (u_0, v_0) berühren die beiden Seiten von $\mathfrak{F}'$ die entsprechenden Seiten von $\mathfrak{F}$. Um die Ähnlichkeit des Habitus von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ zu konstatieren, muß man noch zeigen, daß die beiden anderen Ecken von $\mathfrak{F}$ je um verhältnismäßig wenig von den entsprechenden Ecken von $\mathfrak{F}'$ abstehen. Wir wollen nämlich die Form des Dreiecks F, sowie die eine Ecke desselben festhalten und nur den Maximalabstand PP_1 der gegenüberliegenden Seite vom Punkte P zweckentsprechend einschränken. Dadurch können wir dann erreichen, daß das Verhältnis des Abstandes $Q_1 Q_1'$ zur Seite QQ_1' kleiner als eine willkürliche positive Größe ε bleibt, sobald nur

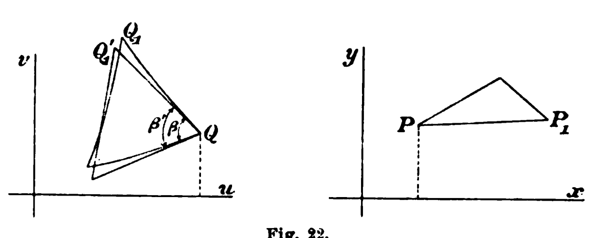


Fig. 22.

PP_1 unter einer zweiten (von ε abhängigen) positiven Größe δ bleibt. In der Tat haben die Projektionen der geraden Strecke Q_1Q_1' auf die Koordinatenachsen bzw. die Werte

$$\Delta u - du = \zeta\Delta x + \zeta'\Delta y,$$
$$\Delta v - dv = \bar{\zeta}\Delta x + \bar{\zeta}'\Delta y,$$

wo sich Δx, Δy auf den Punkt P_1 beziehen. Darum ist

$$\frac{\Delta u - du}{\sqrt{du^2 + dv^2}} = \frac{\zeta\cos\varphi + \zeta'\sin\varphi}{\sqrt{H}},$$

wo

$$H = (A^2 + C^2)\cos^2\varphi + 2(AB + CD)\sin\varphi\cos\varphi + (B^2 + D^2)\sin^2\varphi,$$

(3) $$\cos\varphi = \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

gesetzt ist; — mit einem ähnlichen Ausdruck für $(\Delta v - dv)/\sqrt{du^2 + dv^2}$. Die quadratische Form H ist dabei definit, denn es ist

$$(AB + CD)^2 - (A^2 + C^2)(B^2 + D^2) = -J^2,$$

und darum ist für alle Werte von φ

$$m \leqq H \leqq M,$$

wenn m, M zwei von φ unabhängige positive Größen sind. Bestimmt man also δ derart, daß ζ, ζ', $\bar{\zeta}$, $\bar{\zeta}'$ alle dem absoluten Betrage nach kleiner als ε_1 bleiben, wofern nur $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ sind, so wird

$$\left|\frac{\Delta u - du}{\sqrt{du^2 + dv^2}}\right| \leqq \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{m}}, \qquad \left|\frac{\Delta v - dv}{\sqrt{du^2 + dv^2}}\right| \leqq \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$$

sein. Dies gibt

$$Q_1Q_1' < \frac{4\varepsilon_1}{\sqrt{m}}\sqrt{du^2 + dv^2} = \varepsilon \cdot QQ_1', \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{4}\sqrt{m}\,\varepsilon.$$

Daraus geht die Ähnlichkeit des Habitus von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ hervor. Denn die vorhergehende Abschätzung von Q_1Q_1' hängt ja nicht von der Richtung der Strecke PP_1 ab und gilt also gleichzeitig für alle von P ausgehenden Strecken, deren Projektionen auf die Koordinatenachsen nur die Größe δ dem absoluten Betrage nach nicht übersteigen. Darum weichen auch alle anderen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ angehörigen, ein und demselben Punkte von F entsprechenden Bildpunktpaare um verhältnismäßig wenig voneinander ab und zwar bleibt das Verhältnis

ihres Abstandes voneinander zur Entfernung eines ihrer Punkte von Q kleiner als ε.

Wir können jetzt den Punkt P innerhalb. einer bestimmten Umgebung von (x_0, y_0) variieren lassen. Dabei wird m ebenfalls veränderlich. Bei geeigneter Einschränkung jener Nachbarschaft bleibt indessen m stets größer als eine passend gewählte positive Konstante m_0, während andererseits die Abbildung ihren umkehrbar eindeutigen Charakter nicht einbüßt. Die vorhergehende Erörterung erstreckt sich somit gleichmäßig[1] auf eine ganze Umgebung von (x_0, y_0) und (u_0, v_0).

Das Bogenelement. Wir denken uns eine beliebige reguläre Kurve C durch den Punkt $P:(x_0, y_0)$ gelegt und bezeichnen die Länge eines von P ausgehenden kleinen Bogens PP_1 derselben mit Δs, die Länge des entsprechenden Bogens der Bildkurve mit ΔS. Dann bleibt der Grenzwert

$$\lim \frac{\Delta S}{\Delta s} = \frac{dS}{ds},$$

wie auch immer C genommen werden möge, stets zwischen konstanten positiven Grenzen, und zwar ist

$$0 < \sqrt{m} \leqq \frac{dS}{ds} \leqq \sqrt{M}.$$

Beziehen sich nämlich dx, dy auf C und ebenso du, dv auf die Bildkurve, wobei also jetzt x, y, u, v alle als Funktionen der unabhängigen Variabelen t, nämlich des Parameters der Kurve C, aufzufassen sind, so wird

$$du = A\,dx + B\,dy, \qquad dv = C\,dx + D\,dy.$$

Hieraus folgt, daß

$$du^2 + dv^2 = H(dx^2 + dy^2),$$

also

$$dS = \sqrt{H}\,ds$$

ist, wobei wir in dem Ausdruck für H

$$\cos\varphi = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

gesetzt haben. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Isogonale Verwandtschaften.[2]) Von besonderem Interesse ist der

1) Zur vollen Würdigung dieser letzten Bemerkung gehören die Ideen des nächsten Kapitels.

2) Literaturangaben befinden sich bei Holzmüller, *Isogonale Verwandtschaften*, S. 100.

Fall, daß der Winkel α, welchen die Kurven C_1, C_2 im Punkte (x_0, y_0) miteinander bilden, bei der Transformation (1) erhalten bleibt; daß also stets, entweder

$$\text{a)}\quad \alpha = \beta \qquad \text{oder} \qquad \text{b)}\quad \alpha = -\beta$$

ausfällt, wie man C_1, C_2 auch immer annehmen möge. Ist in jedem Punkte von S die Bedingung a) bzw. b) erfüllt, so heißt die Abbildung eine *isogonale Verwandtschaft* und zwar im Falle a) *ohne*, im Falle b) *mit Umlegung der Winkel*.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für eine isogonale Verwandtschaft besteht offenbar darin, daß im Falle

a) $$\Theta = \theta + \gamma,$$
während im Falle
b) $$\Theta = -\theta + \gamma$$

sei, wo θ den Winkel, welchen eine von (x_0, y_0) ausgehende Kurve C im Punkte (x_0, y_0) mit der positiven x-Achse einschließt, Θ den entsprechenden Winkel in der Bildebene und γ eine Konstante bedeutet. Als notwendige Bedingung erhält man also im Falle a)

$$\tan\Theta = \tan(\theta + \gamma),$$

mithin vermöge (2)

$$\frac{C + D\tan\theta}{A + B\tan\theta} = \frac{\sin\gamma + \cos\gamma\tan\theta}{\cos\gamma - \sin\gamma\tan\theta}.$$

Zur Bestimmung von γ setze man in (2) $\Delta y = 0$, $\Delta x > 0$; so kommt

$$(4)\qquad \cos\gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2 + C^2}}, \qquad \sin\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

Dies gibt:

$$\frac{C + D\tan\theta}{A + B\tan\theta} = \frac{C + A\tan\theta}{A - C\tan\theta}.$$

Diese Formeln können niemals durch das identische Verschwinden eines Nenners illusorisch werden, da ein gleichzeitiges Verschwinden von A und C oder A und B das Verschwinden der Jacobischen Determinante nach sich ziehen würde. Was dagegen ihre Abhängigkeit von θ anbetrifft, so handelt es sich ja nur um notwendige Bedingungen, und dazu genügt es, θ so anzunehmen, daß kein Nenner verschwindet. Hebt man nun in der letzen Gleichung die Brüche fort und vergleicht man dann die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von $\tan\theta$, so kommt:

$$AD - BC = A^2 + C^2, \qquad AB + CD = 0.$$

Diese Gleichungen lassen nur die eine Lösung zu:

(5) $$A = D, \quad B = -C.$$

Umgekehrt zeigt man, daß, wenn den Relationen (5) genügt wird,

$$\cos\Theta = \cos(\theta + \gamma), \qquad \sin\Theta = \sin(\theta + \gamma),$$

wobei γ durch (4) bestimmt wird. Demgemäß ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π

$$\Theta = \theta + \gamma.$$

Die Relationen (5) haben sich hiermit als hinreichend für eine isogonale Verwandtschaft erwiesen.

Der Fall b) wird in ähnlicher Weise behandelt. Den Relationen (5) entsprechen hier die folgenden:

(6) $$A = -D, \quad B = C.$$

Das Ergebnis fassen wir in den Satz zusammen:

Satz. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichungen* (1) *eine isogonale Verwandtschaft definieren, besteht darin, daß entweder*

a) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

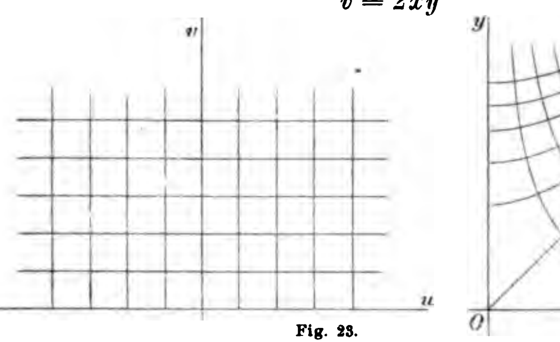
oder

b) $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

sei. Im Falle a) *bleibt auch der Sinn der Winkel erhalten; im Falle* b) *trifft dies aber nicht zu.*

Beispiele. a) Durch die Gleichungen

$$u = x^2 - y^2$$
$$v = 2xy$$



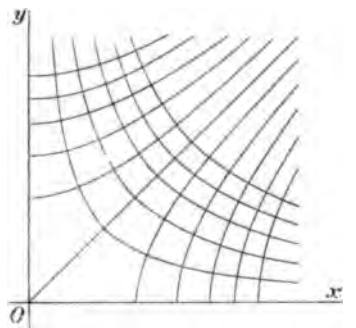


Fig. 23.

wird der erste Quadrant der (x, y)-Ebene auf die positive (u, v)-Halbebene abgebildet und zwar ist die Verwandtschaft eine isogonale ohne Umlegung der Winkel.

b) Durch die Spiegelung in der x-Achse:

$$u = x, \qquad v = -y,$$

sowie durch die Inversion

$$r' = \frac{1}{r},$$

wo $r^2 = x^2 + y^2$, $r'^2 = u^2 + v^2$ ist, wird eine isogonale Verwandtschaft mit Umlegung der Winkel definiert.

Konforme Abbildungen. Im Falle einer isogonalen Verwandtschaft erleiden kleine Figuren des Bereichs S bei der Abbildung durch die Hilfstransformation (2) gar keine Verzerrung, höchstens eine Spiegelung. Denn im Falle a) kann man ja die Transformation (2) direkt auf die Form bringen:

$$\begin{cases} du = \sqrt{A^2 + C^2}(\Delta x \cos\gamma - \Delta y \sin\gamma) \\ dv = \sqrt{A^2 + C^2}(\Delta x \sin\gamma + \Delta y \cos\gamma), \end{cases}$$

und diese Transformation besteht eben aus einer Drehung der (x, y)-Ebene um den Punkt (x_0, y_0) durch den Winkel γ nebst einer Ähnlichkeitstransformation mit den Ähnlichkeitsverhältnisse $\sqrt{A^2 + C^2}$, während im Falle b) noch eine Spiegelung hinzutritt. In beiden Fällen hängt das Bogenelement dS nicht mehr vom Verhältnisse $\Delta y / \Delta x$, sondern lediglich von der Entfernung $\overline{PP_1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ab, und zwar ist

$$dS^2 = (A^2 + C^2)(\Delta x^2 + \Delta y^2) = |J|(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Umgekehrt hätte man von der Forderung ausgehen können, daß die Abbildungen kleiner Figuren des Bereichs S möglichst wenig verzerrt werden und zwar eine genaue Ähnlichkeit um so mehr anstreben, je kleiner ihre linearen Dimensionen werden. Dann müßte beispielsweise ein kleiner um den Punkt (x_0, y_0) beschriebener Kreis in ein den Punkt (u_0, v_0) umfassendes Oval übergehen, derart daß das Verhältnis des Maximal- zum Minimalabstande eines Randpunktes vom Punkte (u_0, v_0) dem Werte 1 zustrebt, wenn der Radius des Kreises unendlich abnimmt. Nun ist aber

$$\Delta u^2 + \Delta v^2 = (H + \zeta)(\Delta x^2 + \Delta y^2),$$

wo

$$\lim_{\Delta x = 0,\ \Delta y = 0} \zeta = 0$$

ist, H nur vom Winkel φ (3), nicht aber vom Radius des Kreises

$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ abhängt. Darum muß H für alle Werte von φ denselben Wert haben. Setzt man also insbesondere $\varphi = 0$, $\pi/2$, $\pi/4$, so schließt man, daß

$$A^2 + C^2 = B^2 + D^2$$
$$AB + CD = 0$$

sein muß, woraus sich dann ergibt, daß entweder

$$\text{a)} \quad A = D, \quad B = -C$$

oder

$$\text{b)} \quad A = -D, \quad B = C$$

ist. Hiermit wird man wieder zu einer isogonalen Verwandtschaft geführt.

Eine Transformation (1), welche der Forderung gerecht wird, daß die Gestalt der Abbildung kleiner Figuren annähernd erhalten bleibt, heißt nach Gauß eine *konforme Abbildung*. Als formale Definition pflegt man wohl folgende aufzustellen: Eine Transformation (1), welche die Eigenschaft hat, daß

$$dS = M ds$$

ist, wo M nur von x, y, nicht aber von dx, dy abhängt, nennt man eine *konforme Abbildung*. Aus dieser Definition geht hervor, daß ein kleines Dreieck F von S (Fig. 22) in ein kleines krummliniges Dreieck $\mathfrak{F}$ von Σ verwandelt wird, dessen Seiten bzw. den Seiten von F annähernd proportional sind, so daß also insbesondere die isogonale Eigenschaft der Abbildung sofort erschlossen wird.

Satz. *Damit die Transformation* (1) *eine konforme Abbildung definiert, ist notwendig und hinreichend, daß entweder*

$$\text{a)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

oder

$$\text{b)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

sei.

Konforme Abbildung und isogonale Verwandtschaft decken sich also miteinander. Es handelt sich bloß darum, von welchem Gesichtspunkte aus man die Transformation betrachten will.

Aus den vorstehenden Differentialgleichungen leitet man die notwendige Bedingung ab, daß die Funktion u, sowie v der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügen muß[1]). Es wird sich später ergeben, daß umgekehrt jede nicht identisch verschwindende Lösung dieser Differentialgleichung zu einer konformen Abbildung führt.

Zwei krumme Flächen heißen konform aufeinander bezogen, wenn je zwei entsprechende Bogenelemente dS, ds in der Beziehung zueinander stehen:

$$dS = M ds,$$

wo M bloß eine Funktion der laufenden Koordinaten, nicht aber der Differentiale ist.

Dem Leser wird empfohlen, den Paragraphen über *Zwei geographische Karten*, Kap. 6, § 9, jetzt zu lesen.

1) Vor der Hand muß man auch bezüglich der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung Voraussetzungen machen. Es wird sich später zeigen, daß im Falle einer konformen Abbildung diese Voraussetzungen stets erfüllt sind.

Drittes Kapitel.

Gleichmäßige Konvergenz.

§ 1. Der doppelte Grenzübergang.

Man wird häufig veranlaßt, zwei Grenzübergänge hintereinander auszuführen. Sei $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle (a, b), höchstens mit Ausnahme der Geraden $x = a$ und $y = b$, eindeutig erklärt. Unter einem *doppelten Grenzübergang* versteht man dann folgendes. Man erteile einer der Variabelen, etwa y, einen konstanten von b verschiedenen Wert y' und lasse die andere Variabele gegen a konvergieren. Strebt $f(x, y')$ dabei einem Grenzwerte $\varphi(y')$ zu:

$$\lim_{x=a} f(x, y') = \varphi(y'),$$

so lasse man darauf die zweite Variabele gegen b konvergieren. Wenn sich nun wieder ein Grenzwert einstellt, $\lim\limits_{y'=b} \varphi(y')$, so bezeichnet man denselben mit

$$\lim_{y=b} \left[\lim_{x=a} f(x, y)\right].$$

Vor allen Dingen drängt sich jetzt die Frage auf: *Darf man die Reihenfolge der einzelnen Grenzübergänge umkehren? d. h. ist*

$$\lim_{y=b} \left[\lim_{x=a} f(x, y)\right] = \lim_{x=a} \left[\lim_{y=b} f(x, y)\right]?$$

Daß diese Frage im allgemeinen zu verneinen ist, zeigen folgende Beispiele.

Beispiel 1. Sei

$$f(x, y) = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \qquad \gamma \neq 0, \qquad \delta \neq 0.$$

Hier ist

$$\lim_{y=0} \left[\lim_{x=0} f(x, y)\right] = \frac{\beta}{\delta},$$

$$\lim_{x=0} \left[\lim_{y=0} f(x, y)\right] = \frac{\alpha}{\gamma},$$

und nun ist eben

$$\frac{\beta}{\delta} \neq \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Beispiel 2. Sei

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \qquad a = b = 0.$$

Hier hat der erste limes den Wert 0, während sich bei umgekehrter Reihenfolge der Grenzübergänge Divergenz einstellt

Der früher übliche Beweis, daß

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

ist, beruhte auf der Annahme, daß es bei einem doppelten Grenzübergange auf die Reihenfolge der einzelnen Grenzübergänge nicht ankomme.

Insbesondere können $a, b = \infty$ sein. Auch brauchen die Punkte (x, y), für welche $f(x, y)$ definiert ist, keine Kontinuen zu bilden.

In diesem Kapitel behandeln wir eine Reihe von Fragen, die für die Differential- und Integralrechnung von fundamentaler Bedeutung sind und bei denen der doppelte Grenzübergang der springende Punkt ist. Es handelt sich jedesmal darum, hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, damit ein doppelter limes für beide Reihenfolgen der einzelnen Grenzübergänge existieren und denselben Wert haben soll. Dabei werden wir zuerst den besonderen Fall der Stetigkeit einer durch eine unendliche Reihe dargestellten Funktion eingehend besprechen, weil nämlich alle begrifflichen Schwierigkeiten der doppelten Grenzübergänge hier in nahe liegender Form zutage treten, und deshalb bitten wir den Leser, sich vor allen Dingen die Entwickelungen von §§ 2—4 zu eigen zu machen.

§ 2. Die Stetigkeit einer durch eine unendliche Reihe dargestellten Funktion, an Beispielen erläutert.

Sei eine konvergente Reihe stetiger Funktionen vorgelegt:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Wann wird die Grenzfunktion $f(x)$ stetig sein? Es fragt sich also, wann

$$\lim_{x = x_0} f(x) = f(x_0)$$

ist. Diese Frage läuft auf die Unabhängigkeit eines doppelten limes

von der Reihenfolge der einzelnen Grenzübergänge hinaus. Sei nämlich

$$s_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x);$$

dann ist

$$\lim_{x=x_0} f(x) = \lim_{x=x_0}\left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right].$$

Andererseits ist

$$f(x_0) = \lim_{n=\infty}\left[\lim_{x=x_0} s_n(x)\right].$$

Wann wird also

$$\lim_{x=x_0}\left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right] = \lim_{n=\infty}\left[\lim_{x=x_0} s_n(x)\right]$$

sein[1]*?* Daß dies stets zutreffen soll, wird man angesichts der Beispiele des vorhergehenden Paragraphen schon nicht erwarten. In der Tat betrachte man das folgende Beispiel:[2])

$$s_n(x) = x^{\frac{2}{2n-1}}, \qquad x_0 = 0.$$

Hier ist

$$\lim_{n=\infty} s_n(x) = 1, \qquad x \neq 0,$$

so daß also die linke Seite der in Frage stehenden Gleichung den Wert 1 hat. Andererseits ist

$$\lim_{x=x_0} s_n(x) = s_n(x_0) = 0,$$

folglich hat die rechte Seite jener Gleichung den Wert 0.

Durch die Fourierschen Reihen ist man zuerst darauf aufmerksam geworden, daß eine konvergente Reihe stetiger Funktionen eine unstetige Funktion darzustellen vermag. So wird beispielsweise gezeigt, daß die Reihe

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$

stets konvergiert und daß

1) Dies Formulierung des doppelten Grenzüberganges rührt von Stokes her; vgl. § 3.

2) Um die entsprechende Reihe zu erhalten, setze man

$$u_1(x) = s_1(x) = x^2, \qquad u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x) = x^{\frac{2}{2n-1}} - x^{\frac{2}{2n-3}}.$$

Man beachte wohl, daß auch jede unendliche Reihe in dieser Form geschrieben werden kann:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots = s_1(x) + [s_2(x) - s_1(x)] + [s_3(x) - s_2(x)] + \cdots,$$

woraus dann erhellt, daß das angeführte Beispiel doch wenigstens nach dieser Richtung hin keine Sonderstellung einnimmt.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{4}, & 2n\pi < x < (2n+1)\pi, \\
&= -\frac{\pi}{4}, & (2n-1)\pi < x < 2n\pi, \\
&= 0; & x = n\pi;\quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots.
\end{aligned}
$$

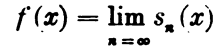
Gehen wir jetzt näher auf die Frage ein, wie eine solche Reihe es einrichtet, damit sie gegen einen unstetigen Grenzwert konvergiert. Der Vorgang tritt klar zutage, sowie man die Annäherungskurven

$$y = s_n(x)$$

zeichnet. Sei beispielsweise

$$s_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}, \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

Dann ist $s_n(x)$ für jeden Wert von n im Intervalle $(-1, 1)$ stetig. Jede Annäherungskurve geht durch den Koordinatenanfangspunkt, welcher deshalb zum Orte der Grenzfunktion



$$f(x) = \lim_{n=\infty} s_n(x)$$

gehören muß. Bei wachsendem n steigen aber die Annäherungskurven in der Nähe dieses Punktes rapide und schmiegen sich für positive (negative) Werte von x, die nicht in dieser Umgebung liegen, der Geraden $y = 1$ $(y = -1)$ noch immer enger an. Nimmt man einen festen Wert $x = x' > 0$ (< 0) willkürlich an, und möge dieser Wert auch noch so nahe bei $x = 0$ liegen, so kann man stets erreichen, daß $s_n(x)$ vom Werte 1 (-1) um beliebig wenig abweicht, wenn nur n über einer geeignet gewählten festen Zahl m liegt. Das heißt ja nichts anderes, als daß die Funktion $s_n(x)$ für jeden im Intervalle gelegenen Wert von x überhaupt gegen den Grenzwert 1 (-1) konvergiert. Wollte man dagegen einen vorgegebenen Grad der Genauigkeit *gleichzeitig für alle dem Intervalle angehörigen Werte von x erzielen*, indem man sich von vornherein ein positives $\varepsilon < 1$ gibt und dann eine positive Zahl m sucht, derart, daß, sobald $n > m$ genommen wird, $s_n(x)$ von seinem Grenzwert um weniger als ε abweicht, so würde man eben auf das Unmögliche stoßen. In der Tat hängt der Wert von m bei gegebenem ε von x ab und zwar so, daß $m = \infty$ wird, wenn x gegen 0 konvergiert, — was freilich nicht verhindert,

Fig. 24.

daß m den Wert 1 hat, wenn $x = 0$ ist. M. a. W. müßte man, um den Wert der Grenzfunktion $f(x)$ aus der Reihe

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots = x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}} \right]$$

zu berechnen, eine große Anzahl von Gliedern berücksichtigen, wenn $x \neq 0$ dem absoluten Betrage nach klein ist, und diese Anzahl hat keine obere Grenze, wenn x beliebig im Intervall angenommen werden darf. Die Reihe konvergiert, wie man zu sagen pflegt, *ungleichmäßig*. Man beschreibt diese Erscheinung auch wohl mit den Worten „unendlich verzögerte Konvergenz".

Die Bedeutung der geometrischen Figur ist nicht immer richtig erkannt worden. Man hat nämlich den Einwand erhoben, daß die Punkte

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \quad 1, & 0 < x \leq 1, \\ &= \quad 0, & x = 0, \\ &= -1, & -1 \leq x < 0 \end{aligned}$$

doch nur einen Teil der Grenzpunkte oder, genauer ausgedrückt, der Häufungsstellen der Kurven $y = s_n(x)$ ausmachten; auch die zwischen $y = 1$ und $y = -1$ befindlichen Punkte der y-Achse gehörten ja dazu, und darum hätte die Grenzfunktion $f(x)$ im Punkte $x = 0$ nicht bloß den einen Wert 0, sondern jeden zwischen -1 und 1 gelegenen Wert.[1]) Es ist schon wahr, daß wir nur einen Teil der Häufungsstellen der Punktmenge $y = s_n(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \cdots$ berücksichtigt haben, der daraus gezogene Schluß ist aber falsch, denn es kommt uns nicht darauf an, welchem Grenzwerte $s_n(x)$ zustreben könnte, *wenn n und x gleichzeitig variieren sollten.* Unter dem Werte einer unendlichen Reihe

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

versteht man doch den Grenzwert, welchem

$$s_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$$

zustrebt, *wenn x von vornherein festgehalten wird* und n dann unbeschränkt wächst. Darum kommen für uns auch nur diejenigen Häufungsstellen der vorbezeichneten Punktmenge in Betracht, die

1) Dies ist nämlich dieselbe Frage als die, welchen Wert eine Fouriersche Reihe, z. B. die vorhin angeführte, an einer Stelle hat, wo die Grenzfunktion unstetig wird.

man erhält, wenn man zuerst eine der y-Achse parallele Gerade $x = x'$ $(-1 \leq x' \leq 1)$ willkürlich annimmt und diese dann mit den Kurven $y = s_n(x)$ schneidet. Hierdurch entsteht eine Punktmenge auf jener Geraden, und diese Menge hat ja nur eine einzige Häufungsstelle, welche auch den Wert der Grenzfunktion $f(x)$ im Punkte $x = x'$ darstellt. Die Gesamtheit eben *dieser* Häufungsstellen geht uns allein etwas an.

Dem Leser wird empfohlen, sich gleich an dieser Stelle die Annäherungskurven zu zeichnen, welche den Charakter der Konvergenz im Falle des zu Anfang erwähnten Beispiels:

$$s_n(x) = x^{\frac{2}{2n-1}}$$

veranschaulichen, sowie an der Hand derselben geometrischen Hilfsmittel die Konvergenz der Reihe

$$(1-x) + (x^2 - x^3) + \cdots = (1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n} - x^{2n+1}), \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

zu untersuchen und graphisch darzustellen.

Wir wollen noch ein zweites Beispiel besprechen, wobei eine stetige Funktion $s_n(x)$ zwar gegen einen stetigen Grenzwert konvergiert, doch nicht in der Weise, wie man es wohl erwarten möchte. Sei

$$s_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Für jeden Wert von x ist hier

$$f(x) = \lim_{n=\infty} s_n(x) = 0.$$

Doch sehen wir näher zu, wie sich die Annäherungskurven ausnehmen. Wir wollen uns dabei auf das Intervall $0 \leq x < \infty$ beschränken. Zeichnen wir zunächst die erste Annäherungskurve, $n = 1$:

$$y = s_1(x) = xe^{-x^2}.$$

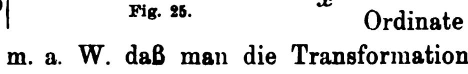


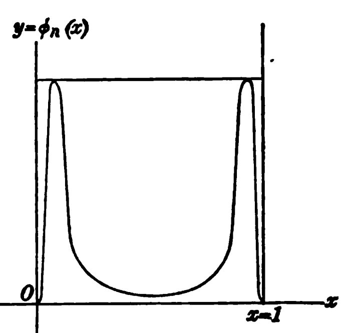
Fig. 25.

Alsdann geht die allgemeine Annäherungskurve daraus hervor, daß man die Abszisse eines beliebigen Punktes dieser Kurve durch $\sqrt{n}$ dividiert und dessen Ordinate zugleich mit $\sqrt{n}$ multipliziert; m. a. W. daß man die Transformation

$$x' = x/\sqrt{n}, \qquad y' = y\sqrt{n}$$

ausübt und die Striche dann unterdrückt. In der Nähe der Ordinatenachse erheben sich die Kurven außerordentlich hoch, um sehr bald wieder herabzusinken und sich hinfort eng an die Abszissenachse anzuschmiegen. Nimmt man ein *festes* Intervall $0 < a \leq x < \infty$ an, welches noch so nahe an den Punkt $x = 0$ heranreicht, so werden für alle über einem geeignet gewählten Werte m gelegenen Werte n diese nadelförmigen Auswüchse links von der Geraden $x = a$ liegen, so daß also innerhalb des Intervalles (a, ∞) die Art der Konvergenz nichts merkwürdiges an sich hat. Je kleiner man aber a annimmt, desto größer fällt m dabei aus.

Dieses Beispiel zeigt, daß selbst dann, wenn eine stetige Funktion gegen einen stetigen Grenzwert konvergiert, die Art und Weise dieser Konvergenz doch Möglichkeiten bieten kann, woran man wohl nicht gedacht hätte.



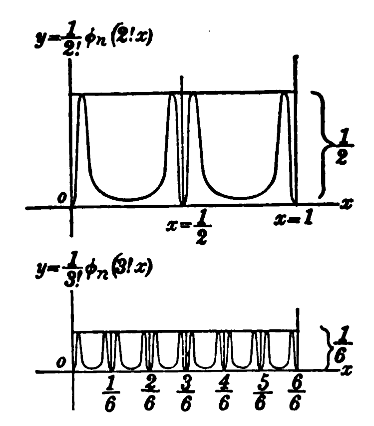


Fig. 26.

Aufgabe. Man zeige, daß sämtliche Annäherungskurven im Falle

$$s_n(x) = \sqrt{2e}\,n x e^{-n^2x^2}$$

die Gerade $y = 1$ berühren.

Beispiel einer in jedem Intervall ungleichmäßig konvergenten Reihe.

Die bisherigen Beispiele wiesen ungleichmäßige Konvergenz, — um die Definition des nachfolgenden Paragraphen zu antizipieren, — nur dann auf, wenn das Definitionsintervall der Funktion $s_n(x)$ einen besonderen Punkt als inneren oder Endpunkt enthielt. Es kann indessen vorkommen, daß eine Reihe auch in jedem Intervall ungleichmäßig konvergiert, wie das folgende Beispiel zeigt.

In der Funktion der vorstehenden Aufgabe werde x durch $\sin^2 \pi x$ ersetzt. Die Funktion

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2e}\,n \sin^2 \pi x\, e^{-n^2 \sin^4 \pi x}$$

hat dann für jeden Wert von n die Periode 1. Im Intervall $0 < x < 1$ treten zwei Maxima auf, und zwar berührt die Kurve $y = \varphi_n(x)$ dann die Gerade $y = 1$. Für große Werte von n hat diese Kurve die in

der ersten der beigefügten Figuren angedeutete Gestalt. Hieraus leitet man die den weiteren Funktionen

$$y = \frac{1}{2!}\varphi_n(2!x), \qquad y = \frac{1}{3!}\varphi_n(3!x), \ldots y = \frac{1}{n!}\varphi_n(n!x)$$

entsprechenden Kurven durch die Transformation

$$x = k!x', \qquad y = k!y'$$

ab; sie sind alle der ersten Kurve ähnlich, nur wird der Maßstab verkleinert. Der größte Wert von $\frac{1}{k!}\varphi_n(k!x)$ ist $1/k!$

Aus diesen Bestandteilen wird die in Aussicht genommene Reihe, wie folgt, zusammengestellt:

$$y = s_n(x) = \varphi_n(x) + \frac{1}{2!}\varphi_n(2!x) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi_n(n!x).$$

Diese Funktion $s_n(x)$ strebt zwar für jeden Wert von x dem limes 0 zu, doch konvergiert sie in jedem Intervall ungleichmäßig.

Zum Beweise bemerken wir vor allem, daß kein Term der Reihe negativ wird. Zerlegen wir den obigen Ausdruck in die Summe der ersten k Terme und den Rest, so kann Letzterer für keinen Wert von n die Zahl

$$\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots$$

erreichen und bleibt somit kleiner als $1/(k \cdot k!)$. Sei ε eine beliebige positive Zahl. Dann braucht man k nur so zu wählen, daß

$$1/(k \cdot k!) < \varepsilon/2$$

wird, damit der Rest stets unterhalb $\varepsilon/2$ bleibe. Dieser Wert von k wird nun festgehalten. Für einen beliebig vorgegebenen Wert $x = x_0$ konvergiert andererseits jeder Term der ersten Summe bei wachsendem n gegen 0. Darum kann man m so bestimmen, daß auch diese erste Summe unterhalb $\varepsilon/2$ bleibt, sobald nur $n > m$ ist. Hiermit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

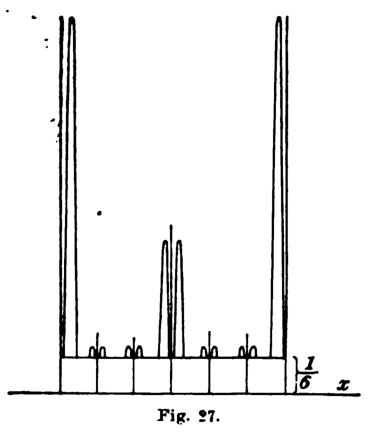


Fig. 27.

In der Gestalt der Annäherungskurven herrschen die früheren Terme der Summe vor, denn alle auf den k-ten folgenden Terme liefern ja weniger als $1/(k \cdot k!)$ zum Werte der Funktion. Sei $a \leq x \leq b$

ein beliebiges Intervall, und sei $x_0 = p/q$ ein rationaler Punkt desselben, wo q eine natürliche, zu p teilerfremde Zahl ist. Dann erheben sich in der Nähe von x_0, und zwar an beiden Seiten desselben, jene nadelförmigen Spitzen über einer festen, nur von q abhängigen positiven Größe. Genauer gesagt, sei k die kleinste Zahl, wofür $k!$ durch q teilbar ist. Dann beträgt die genannte Höhe wenigstens $1/k!$ Die Figur veranschaulicht den Fall $q = 6$. Hiermit ist die ungleichmäßige Konvergenz im betreffenden Intervalle festgestellt.

Dies ist auch ein erstes Beispiel einer nützlichen Untersuchungsmethode, welche von Hankel herrührt, das sogenannte *Prinzip der Verdichtung der Singularitäten.*[1])

Aufgabe. Sei

$$s_n(x) = \cos^{2n} \pi x + \frac{1}{2!} \cos^{2n} 2!\, \pi x + \cdots + \frac{1}{n!} \cos^{2n} n!\, \pi x.$$

Man zeichne die Annäherungskurven und beweise, daß $s_n(x)$ für jeden Wert von x gegen einen Grenzwert konvergiert. Die Grenzfunktion ist für jeden rationalen Wert von x unstetig, dagegen für jeden irrationalen Wert des Arguments stetig.

§ 3. Gleichmäßige Konvergenz; ein Reihensatz.

Wir wollen jetzt den Annäherungskurven die Möglichkeit nehmen, ihrem Grenzwerte in der Weise zuzustreben, wie es die Beispiele des vorhergehenden Paragraphen fertig brachten, indem wir verlangen, daß die Funktion $s_n(x)$ *gleichmäßig* gegen ihren Grenzwert konvergiere. Das geschieht auf Grund der folgenden

Definition. Sei

$$\text{(A)} \qquad u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder in einem Intervalle[2]) $a \leq x \leq b$ Funktionen von x sind, und sei

$$s_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x).$$

Kann man dann einer beliebig kleinen positiven Größe ε stets eine

1) Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen*, Tübingen, 1870, *Math. Ann.* Bd. 20 (1882).

2) Die Endpunkte brauchen nicht zum Intervalle zu gehören. Auch dürfen $a, b = \infty$ genommen werden. Überhaupt darf an Stelle des Intervalls eine beliebige Punktmenge treten.

von x unabhängige positive ganze Zahl m so zuordnen, daß

$$|s_n(x) - s_{n'}(x)| < \varepsilon$$

bleibt, wenn $n \geqq m$, $n' \geqq m$ willkürlich angenommen werden, so sagt man, die Reihe *konvergiert gleichmäßig* im bewußten Intervalle. Es gilt dann bezüglich des Restes $r_n(x)$ der Reihe die Relation

$$|r_n(x)| \leqq \varepsilon.$$

Man beachte wohl die Reihenfolge, nach welcher die Größen ε, m, x dabei angenommen werden, — zuerst ε willkürlich, dann m der Wahl von ε gemäß, und hinterher x willkürlich. — Es sei noch bemerkt, daß die Definition der gleichmäßigen Konvergenz überhaupt die bloße Konvergenz nach sich zieht; vgl. Kap. 1, § 7, Theorem 2.

1. Satz. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Reihe* (A) *besteht darin, daß es zu jeder positiven Zahl ε eine von x unabhängige natürliche Zahl m gibt, derart, daß*

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $n > m$ genommen wird.

2. Satz. *Die Reihe* (A) *sei jetzt konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$, und man bezeichne den Wert des Restes mit $r_n(x)$:*

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Damit die Reihe gleichmäßig konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jeder positiven Zahl ε eine von x unabhängige natürliche Zahl m gibt, derart daß

$$|r_n(x)| \leqq \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $n \geqq m$ ist.

Jeder dieser Sätze hätte als Definition der gleichmäßigen Konvergenz zugrunde gelegt werden können, wobei dann die obige Definition und der andere Lehrsatz die neue Definition wieder als Lehrsätze ergänzt hätten. Diese drei Formulierungen im Grunde ein und derselben Eigenschaft erweisen sich in der Praxis als gleichberechtigt.[1])

1) Auf die Erscheinung der ungleichmäßigen Konvergenz hat Stokes zuerst aufmerksam gemacht, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Bd. 8 (1842/9) S. 561 [1847] = *Collected Papers*, Bd. 1, p. 281. Er gibt die im vorigen Paragraphen schon erwähnte scharfe Formulierung des doppelten Grenzüberganges, sowie das klassische Beispiel

$$s_n(x) = \frac{nx}{nx+1}.$$

In Nr. 39 dieser Abhandlung leitet er überdies das nachstehende Kriterium für die

Kriterium für Stetigkeit. *Sei*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder im Intervalle $a \leq x \leq b$ *stetige Funktionen sind und welche dort gleichmäßig konvergiert. Dann ist die durch die Reihe definierte Grenzfunktion*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

im genannten Intervalle stetig.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz hat man

(1) $$|s_{m+p}(x) - s_m(x)| < \varepsilon, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

oder, was damit gleichbedeutend ist,

(2) $$s_m(x) - \varepsilon < s_{m+p}(x) < s_m(x) + \varepsilon.$$

Diese Relation besagt geometrisch folgendes. Man zeichne die Kurve

$$y = s_m(x)$$

und umgebe sie mit einem Streifen S, Fig. 28, welcher durch die beiden Kurven

$$y = s_m(x) + \varepsilon, \qquad y = s_m(x) - \varepsilon$$

begrenzt wird. Dann verlaufen alle späteren Annäherungskurven

$$y = s_n(x), \qquad n = m + 1, \quad m + 2, \cdots,$$

in S und auch die Grenzfunktion $y = f(x)$ liegt in S, da die Relation (2) beim Grenzübergange $p = \infty$ zur folgenden wird:

$$s_m(x) - \varepsilon < f(x) < s_m(x) + \varepsilon.$$

Stetigkeit in allgemeinerer Formulierung ab und beweist sogar einen Teil des Weierstraßschen Satzes von § 4. Man vergleiche auch Seidl, *Abh. Akad. München*, Bd. 5 (1848) S. 383. Beide Autoren reden von der oben im Texte erklärten *unendlich verzögerten Konvergenz.*

Im besonderen Falle einer Potenzreihe hatte Abel die gleichmäßige Konvergenz bereits im wesentlichen bewiesen, um auf die Stetigkeit der Funktion zu schließen; „Untersuchungen über die Reihe

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots,$$

Journ. f. Math., Bd. 1 (1826), S. 311.

Erst Weierstraß, welcher übrigens schon im Jahre 1841 mit dem Sachverhalt vertraut war, (*Werke*, Bd. 1, p. 67 und p. 81), hat die volle Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz erkannt und diese Bedingung zu einer der wichtigsten Methoden der modernen Analysis erhoben.

Jetzt nehme man einen neuen Wert $\varepsilon' < \varepsilon$, bestimme eine entsprechende Zahl $m' > m$ und wiederhole die soeben angegebene Konstruktion. Die neue Kurve

$$y = s_{m'}(x)$$

liegt dann auch in S und der zweite Streifen ist schmäler als S. Insbesondere kann er über S hinausgreifen. In dem Falle sieht man aber von den außerhalb S liegenden Teilen ab und definiert als S' nur den in S gelegenen Teil davon. Alsdann verlaufen alle weiteren Annäherungskurven

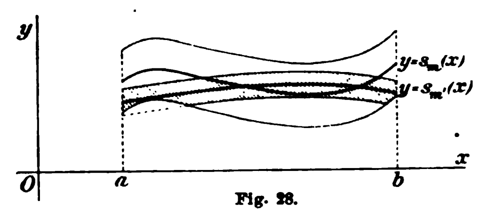


Fig. 28.

$$y = s_n(x), \qquad n = m' + 1, \quad m' + 2, \cdots,$$

sowie die Grenzfunktion $y = f(x)$ in S'.

Diesen Schritt wiederholt man nun, indem man eine Reihe positiver Größen

$$\varepsilon' > \varepsilon'' > \varepsilon''' > \cdots, \qquad \lim_{k=\infty} \varepsilon^{(k)} = 0,$$

annimmt und dazu gehörige Zahlen $m' < m'' < m''' < \cdots$, sowie die Streifen $S'', S''', \cdots$ bestimmt. Die Streifen liegen dabei ineinander eingeschachtelt, während ihre Breite mit wachsendem n gegen 0 abnimmt. Im übrigen liegt die Grenzfunktion $y = f(x)$ in jedem Streifen.

Das geometrische Bild läßt die Stetigkeit der Grenzfunktion deutlich zutage treten; es leistet aber noch mehr, es weist den Weg zum arithmetischen Beweise dieser Stetigkeit. Um diesen Beweis zu führen, muß man ja zeigen, daß

$$|f(x) - f(x_0)| < \eta, \qquad |x - x_0| < \delta,$$

wo x_0 ein beliebiger Punkt des Intervalles und η eine willkürliche positive Größe sind, denen eine bestimmte positive Größe δ entspricht. Jetzt sei an die geometrische Interpretation dieser Bedingung, Kap. 1, § 2, Fig. 3 erinnert. Demgemäß umgeben wir die Gerade $y = f(x_0)$ mit einem durch die Geraden

$$y = f(x_0) + \eta, \qquad y = f(x_0) - \eta$$

begrenzten Streifen Σ und bemerken, a) daß jeder Streifen $S^{(k)}$ den Punkt $x = x_0$, $y = f(x_0)$ enthält, b) daß sowohl der obere als der untere Rand von $S^{(k)}$ die Gerade $x = x_0$ in Punkten schneidet, die

innerhalb Σ liegen, wenn k nur so groß angenommen wird, daß

$$2\varepsilon^{(k)} < \eta$$

ausfällt, da die Breite des Streifens $S^{(k)}$ höchstens $2\varepsilon^{(k)}$ beträgt. Diese Ränder sind aber stetige Kurven, und c) darum kann man δ so bestimmen, daß diejenigen Punkte des oberen (unteren) Randes, für welche

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

ist, unter der Geraden $y = f(x_0) + \eta$ (über der Geraden $y = f(x_0) - \eta$) liegen.

Fig. 29.

Es bleibt nur noch übrig, die letzte Hand an diesen Beweis zu legen, indem wir die arithmetischen Relationen hinschreiben, die uns die geometrische Überlegung geliefert hat. Wir nehmen also zuerst k so an, daß $2\varepsilon^{(k)} < \eta$ wird, und halten k dann fest. Sei $\varepsilon = \varepsilon^{(k)}$, $m = m^{(k)}$. Der gleichmäßigen Konvergenz zufolge wird

$$(\alpha) \qquad |f(x) - s_m(x)| \leq \varepsilon$$

für alle Werte von x. Die letzte geometrische Bedingung c) verlangt, daß

$$f(x_0) - \eta < s_m(x) - \varepsilon, \qquad s_m(x) + \varepsilon < f(x_0) + \eta$$

für alle einem geeigneten Intervall $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ zugehörigen x. Diese Bedingungen sind mit der folgenden äquivalent:

$$(\beta) \qquad |f(x_0) - s_m(x)| < \eta - \varepsilon, \qquad |x - x_0| < \delta.$$

Letztere ist aber eine unmittelbare Folge von (α), indem man darin bloß $x = x_0$ setzt:

$$|f(x_0) - s_m(x_0)| < \varepsilon < \varepsilon + (\eta - 2\varepsilon) = \eta - \varepsilon,$$

und hierauf den in Aufgabe 6, S. 22 enthaltenen Satz, bezogen auf die Funktion

$$|f(x_0) - s_m(x)|,$$

in Anwendung bringt. Hiermit haben wir sowohl die Relation (α) als auch (β) auf arithmetischem Wege gewonnen.

Aus (α) und (β) folgt nun, daß

$$|f(x) - f(x_0)| < \eta$$

ist, sobald nur $|x - x_0| < \delta$ bleibt. Hiermit ist der Beweis fertig.

Das wesentliche am analytischen Beweise wollen wir noch einmal kurz wiederholen. Sei η eine beliebige positive Zahl. Der gleichmäßigen Konvergenz zufolge kann man dann eine natürliche Zahl m so bestimmen, daß für alle x im Intervall $a \leqq x \leqq b$

$$\text{(A)} \qquad |f(x) - s_m(x)| < \frac{\eta}{2}$$

bleibt. Insbesondere wird also auch

$$|f(x_0) - s_m(x_0)| < \frac{\eta}{2}.$$

Infolgedessen wird die Funktion $|f(x_0) - s_m(x)|$ in einem bestimmten Intervall $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ der Relation

$$\text{(B)} \qquad |f(x_0) - s_m(x)| < \frac{\eta}{2}$$

genügen. Aus (A) und (B) folgt dann, daß

$$|f(x_0) - f(x)| < \eta, \qquad |x - x_0| < \delta,$$

ist, und hiermit ist der Beweis erbracht.

Die gleichmäßige Konvergenz einer unendlichen Reihe stetiger Funktionen hat sich somit als eine hinreichende Bedingung dafür erwiesen, daß die Grenzfunktion stetig sei. Daß sie hingegen nicht notwendig ist, zeigen die letzteren Beispiele des vorhergehenden Paragraphen.

Aus dem soeben bewiesenen Satze kann man einen zweiten Satz ableiten, indem man von der Konvergenz der Reihe, ja, sogar von der Definition der Terme $u_n(x)$ in einem oder beiden Endpunkten des Intervalls (a, b), absieht und nur verlangt, daß die vorgelegte Reihe stetiger Funktionen *in jedem vorgegebenen ganz innerhalb* (a, b) *gelegenen abgeschlossenen Intervalle gleichmäßig konvergiere.* Nach dem vorhergehenden Satze stellt die Reihe dann in jedem solchen Intervalle eine stetige Funktion vor, und da jeder Punkt des Intervalls $a < x < b$ in einem geeignet gewählten derartigen Unterintervalle enthalten ist, so stellt die Reihe fernerhin eine im ganzen Intervalle $a < x < b$ stetige Funktion von x vor. Wegen Anwendungen vgl. man § 4, Ende.

Aufgabe 1. Die Terme der Reihe

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

seien im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktionen von x, und die Reihe konvergiere gleichmäßig im Intervall $a < x \leqq b$. Man zeige, daß die

durch die Reihe definierte Funktion $f(x)$ beim Grenzübergange $\lim x = a^+$ einem Grenzwerte zustrebt.

Aufgabe 2. Sei $f(r, \varphi)$ in der Umgebung des Punktes $r = 0$ mit Ausnahme dieses einen Punktes eindeutig definiert. Konvergiert $f(r, \varphi)$, als Funktion von r allein betrachtet, längs der Strahlen $\varphi = \varphi'$ gleichmäßig gegen ein und dieselbe Zahl, wenn r dem Grenzwert 0 zustrebt, so konvergiert $f(r, \varphi)$ beim zweidimensionalen Grenzübergang $\lim r = 0$.

Wir fügen noch einen allgemeinen Satz hinzu, dessen Richtigkeit sofort aus der Definition der gleichmäßigen Konvergenz ersichtlich wird.

Satz. *Konvergiert die unendliche Reihe*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig und nimmt man eine beliebige Transformation

$$x = \varphi(x')$$

vor, so konvergiert die also transformierte Reihe im neuen Intervall $a' \leqq x' \leqq b'$ ebenfalls gleichmäßig.

Allgemeiner darf an Stelle des ursprünglichen Intervalls eine völlig willkürliche Punktmenge treten. Im übrigen werden der Transformation gar keine Einschränkungen auferlegt; sie braucht weder umkehrbar eindeutig noch stetig zu sein.

Die in diesem Paragraphen enthaltenen Definitionen und Sätze nebst den Beweisen übertragen sich ohne weiteres auf Reihen, deren Terme von mehreren Variabeln abhängen und für beliebige Bereiche letzterer, oder allgemeiner für völlig willkürliche Punktmengen, definiert sind. Man vergleiche auch den allgemeinen Satz von Kap. 12, § 10.

§ 4. Das Weierstraßsche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.

Weierstraß hat ein Kriterium gegeben, mittels dessen die gleichmäßige Konvergenz vieler in der Praxis vorkommenden Reihen entschieden werden kann.[1]) Dasselbe lautet, wie folgt.

1) Die gleichmäßige Konvergenz der Fourierschen und damit verwandter Reihenentwicklungen wird auf anderer Weise nachgewiesen. In der Funktionentheorie kommt man aber mit dem Weierstraßschen Kriterium fast immer durch.

Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. *Die unendliche Reihe*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots,$$

deren Glieder im Intervalle[1] (a, b) *Funktionen von* x *sind, konvergiert gleichmäßig in diesem Intervalle, falls es eine konvergente Reihe positiver von* x *unabhängiger Größen*

$$M_1 + M_2 + \cdots$$

gibt, derart, daß für jeden Wert von x *im genannten Intervalle und für eine von* x *unabhängige Zahl* μ

$$|u_n(x)| \leqq M_n, \qquad n \geqq \mu,$$

bleibt.

In der Tat wird dann wegen der Relation

$$s_{n+r}(x) - s_n(x) = u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+r}(x),$$

die Beziehung bestehen:

$$|s_{n+r}(x) - s_n(x)| \leqq |u_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+r}(x)|$$
$$\leqq M_{n+1} + \cdots + M_{n+r}, \qquad n \geqq \mu.$$

Nimmt man nun $\varepsilon > 0$ willkürlich an, so wird man eine positive ganze Zahl $m \geqq \mu$ stets so bestimmen können, daß

$$M_{n+1} + \cdots + M_{n+r} < \varepsilon, \qquad n \geqq m, \quad r = 1, 2, .., $$

ist, vgl. Kap. I, § 7, Theorem 2, woraus dann folgt:

$$|s_{n+r}(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \qquad n \geqq m, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

w. z. b. w.

Das Kriterium liefert eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe. Insbesondere konvergiert jede diesem Kriterium genügende Reihe absolut, während sich doch leicht zeigen läßt, daß eine gleichmäßig konvergente Reihe nicht absolut zu konvergieren braucht; z. B. die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[x^n + \frac{(-1)^n}{n}\right], \qquad 0 < x \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Der Satz nebst dem Beweise läßt sich ohne weiteres auf Reihen ausdehnen, deren Glieder Funktionen von n unabhängigen Veränder-

1) Man vergleiche die Anmerkung zu Anfang des vorhergehenden Paragraphen; das Kriterium gilt auch für die daselbst erwähnten allgemeineren Fälle.

lichen sind. Dabei darf der Definitionsbereich der Terme eine beliebige Punktmenge sein.

Potenzreihensätze.

1. Satz. *Bleiben die Terme einer Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für $x = X$ endlich, so konvergiert sie absolut für alle Werte von x, wofür $|x| < |X|$ ist.

Der Voraussetzung nach gibt es eine positive Konstante G derart, daß für alle Werte von n

$$|a_n X^n| < G$$

bleibt. Sei $|x| < |X|$. Dann wird

$$|a_n x^n| < G \left|\frac{x}{X}\right|^n = G r^n,$$

wo $r = |x|/|X| < 1$ ist. Die Reihe $\Sigma G r^n$ ist aber eine geometrische Reihe mit $0 \leq r < 1$, deshalb konvergiert sie, und infolgedessen konvergiert die vorgelegte Reihe absolut, w. z. b. w.

Unter den gleichen Voraussetzungen konvergiert auch die Reihe

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

im Intervalle $|x| < |X|$ absolut.

In der Tat ist

$$|n a_n x^{n-1}| < G n r^{n-1}.$$

Die Konvergenz der Reihe $\Sigma G n r^{n-1}$ folgt aber schon aus dem Kriterium $\lim u_{n+1}/u_n < 1$, da hier $\lim u_{n+1}/u_n = r$ ist.

2. Satz. *Konvergiert eine Potenzreihe für zwei getrennte Werte des Arguments und divergiert sie für einen dritten, so konvergiert sie für alle Werte von x innerhalb eines bestimmten Intervalls $-R < x < R$, und sie divergiert für alle außerhalb desselben gelegenen Werte.*

Sämtliche Werte von x zerfallen nämlich in zwei Klassen: a) solche Werte, wofür die Reihe konvergiert; und b) solche, wofür sie divergiert. Bedeutet x_a eine beliebige Zahl der ersten, x_b eine beliebige Zahl der zweiten Klasse, so wird nach dem 1. Satze

$$|x_a| \leqq |x_b|.$$

Hierdurch tritt eine Zerlegung der positiven Zahlen ein, die den Vor-

aussetzungen des Dedekindschen Satzes von Kap. 1, § 8 entspricht. Demgemäß gibt es eine Zahl R derart, daß

$$|x_a| \leqq R \leqq |x_b|$$

ist, w. z. B. w.

3. Satz. *Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen ganz innerhalb ihres Konvergenzintervalls gelegenen Intervalle.*

In der Tat sei die vorgelegte Reihe für alle im Intervalle

$$-R < x < R, \quad R > 0 \quad \text{resp.} \quad R = \infty,$$

gelegenen Werte von x konvergent, und sei $h_1 \leqq x \leqq h_2$ ein beliebiges innerhalb desselben enthaltenen Unterintervalls. Sei ferner h die größere der beiden Zahlen $|h_1|$, $|h_2|$. Dann konvergiert die Reihe

$$|a_0| + |a_1 h| + |a_2 h^2| \cdots$$

nach dem 1. Satze, und diese Reihe kann eben als die M-Reihe des Weierstraßschen Kriteriums dienen:

$$M_n = |a_n h^n|.$$

Es wäre indessen ein Irrtum zu glauben, daß wir gezeigt hätten, eine Potenzreihe konvergiere gleichmäßig innerhalb ihres Konvergenzintervalls. So konvergiert beispielsweise die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

absolut für alle Werte von x im Intervalle $-1 < x < 1$; sie konvergiert aber *doch nicht gleichmäßig* in diesem Intervalle. Denn nach dem n^{ten} Gliede bleibt noch ein Rest

$$r_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Nachdem man also $\varepsilon > 0$ angenommen hat, kann man hier keine feste Zahl m bestimmen, derart, daß $|r_n(x)| \leqq \varepsilon$ wäre, wenn $n \geqq m$ ist, was ja im Falle gleichmäßiger Konvergenz notwendig zutreffen müßte.

4. Satz. *Eine Potenzreihe stellt eine stetige Funktion innerhalb ihres Konvergenzintervalls vor.*

Der Beweis ist in den Entwicklungen des § 3 bereits enthalten. Die Terme der Reihe sind nämlich stetige Funktionen, und die Reihe

konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Unterintervalle des Konvergenzintervalls.[1])

Die vorstehenden Sätze über Potenzreihen lassen sich leicht auf Potenzreihen mit beliebig vielen Variabeln übertragen. Im übrigen sei auf die Identitätssätze von Kap. 7, § 12 verwiesen, welche, für den Fall reeller Größen ausgesprochen, auch hierher gehören.

Aufgabe 1. Man zeige, daß die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi + \cdots,$$

wo $0 < k < 1$ eine Konstante ist, für alle Werte von φ gleichmäßig konvergiert. (Zu beachten ist, daß die vorstehende Reihe keine Potenzreihe in φ ist.)

Aufgabe 2. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

im Intervalle $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ gleichmäßig? im Intervalle $-1 < x < 1$?

Aufgabe 3. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergiert für alle Werte von x gleichmäßig, falls die Reihen Σa_n Σb_n beide absolut konvergieren.

Aufgabe 4. Konvergiert die Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

im Intervalle $a \leqq x \leqq b$, wo a und b zwei beliebige Zahlen sind gleichmäßig? im Intervalle $0 \leqq x < \infty$?

§ 5. Gliedweise Integration einer unendlichen Reihe.

Sei

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

eine konvergente unendliche Reihe, deren Glieder in einem bestimmten

1) Konvergiert eine Potenzreihe in einem Endpunkte ihres Konvergenzintervalls absolut, so bleibt der vorstehende Beweis im wesentlichen bestehen und die Funktion $f(x)$ erweist sich somit in diesem Punkte ebenfalls als stetig. Abel hat noch darüber hinaus bewiesen, daß selbst im Falle bedingter Konvergenz in einem Endpunkte $x = X$ die Reihe im abgeschlossenen Intervalle $(0, X)$ gleichmäßig konvergiert und somit eine auch im betreffenden Endpunkte stetige Funktion darstellt. Vgl. das frühere Zitat auf Abel, § 3.

Intervalle (a, b) stetige Funktionen von x sind. Man sagt, die Reihe lasse sich zwischen den im Intervalle gelegenen Grenzen x_0, x_1 *gliedweise integrieren,* falls die Funktion $f(x)$ zwischen diesen Grenzen integrierbar ist und die Reihe

$$\int_{x_0}^{x_1} u_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2(x)dx + \cdots$$

gegen den Grenzwert

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$

konvergiert.

Bei der gliedweisen Integration einer Reihe handelt es sich wieder um einen doppelten Grenzübergang, denn das eigentliche bestimmte Integral ist ja selbst ein Grenzwert. In der Tat ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right] dx,$$

während

$$\int_{x_0}^{x_1} u_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2(x)\,dx + \cdots = \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x_1} s_n(x)dx$$

ist. Die Frage läßt sich also, wie folgt, formulieren: *Wann ist*

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\lim_{n=\infty} s_n(x)\right] dx = \lim_{n=\infty} \left[\int_{x_0}^{x_1} s_n(x)\,dx\right]?$$

Geometrisch stellt der links stehende Ausdruck den Inhalt der von der Grenzkurve

$$y = f(x)$$

begrenzten Fläche vor. Andererseits hat man es mit dem Inhalt der Fläche zu tun, die von der Annäherungskurve

$$y = s_n(x)$$

begrenzt wird:

$$\int_{x_0}^{x_1} s_n(x)dx.$$

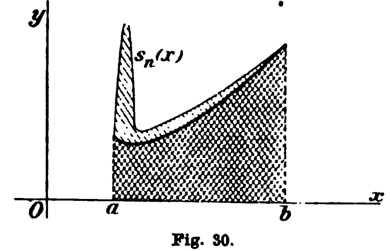


Fig. 30.

Es fragt sich also, wann dieser letzte Flächeninhalt bei wachsendem n gegen den ersten Flächeninhalt konvergieren wird.

Einem einfachen Beispiel einer Reihe, für welche dies nicht zutrifft, sind wir bereits begegnet. Sei (Fig. 25)

$$s_n(x) = nxe^{-nx^2},$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right).$$

Dann ist $f(x) = 0$, und wenn man $x_0 = 0$ setzt, so kommt:

$$\int_0^{x_1} f(x)\,dx = 0.$$

Andererseits hat man

$$\int_0^{x_1} s_n(x)\,dx = \int_0^{x_1} nxe^{-nx^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-nx_1^2}),$$

womit sich der Grenzwert des von der Annäherungskurve $y = s_n(x)$ abgegrenzten Flächeninhalts als

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{x_1} s_n(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

erweist.

Verlangt man nun, daß die Reihe außerdem noch gleichmäßig konvergiere, so wird dadurch diesem Mißstande vorgebeugt.

Kriterium für gliedweise Integration.[1]) *Sind die Glieder einer unendlichen Reihe*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

in einem bestimmten Intervalle stetige Funktionen von x und konvergiert die Reihe in diesem Intervalle gleichmäßig, so läßt sich dieselbe zwischen endlichen zum Intervalle gehörigen Grenzen gliedweise integrieren:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2(x)\,dx + \cdots.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz stellt die Reihe vor allem eine stetige Funktion $f(x)$ vor, so daß also das linker Hand stehende

1) Der Satz rührt von Weierstraß her, vgl. Heine, *Journal für Math.* 71 (1870) S. 353.

Integral schon einen Sinn hat. Sei ferner

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} s_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} r_n(x)\,dx.$$

Der gleichmäßigen Konvergenz zufolge entspricht einem beliebig kleinen positiven ε eine feste Zahl m, derart daß

$$|r_n(x)| \leqq \varepsilon, \qquad n \geqq m.$$

Demgemäß hat man

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} s_n(x)\,dx\right| \leqq \varepsilon\,|x_1 - x_0|,$$

oder:

$$\lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x_1} s_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

w. z. b. w.

Aufgabe 1. Man zeige, daß

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right]$$

ist; vgl. § 4, Aufgabe 1.

Aufgabe 2. Lassen sich die Reihen, wofür

a) $$s_n(x) = \frac{1}{1 + nx},$$

b) $$s_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^4}$$

ist, im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ gliedweise integrieren? Man zeichne die Annäherungskurven.

Aufgabe 3. Die Reihen

$$\frac{1+x}{1+x^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1+n^3x}{1+n^4x^2} - \frac{1+(n-1)^3x}{1+(n-1)^4x^2}\right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^4x}{[\log(e+n)]\cdot(1+n^4x^2)} - \frac{(n-1)^4x}{[\log(e+n-1)]\cdot(1+(n-1)^4x^2)}\right]$$

konvergieren beide ungleichmäßig im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. Stellen sie dort stetige Funktionen vor? Lassen sie sich gliedweise integrieren?

Aufgabe 4. Sind die Glieder einer unendlichen Reihe

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

im endlichen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktionen und konvergiert die Reihe dort gleichmäßig, so konvergiert die Reihe der Integrale:

$$\int_a^x u_1(x)dx + \int_a^x u_2(x)dx + \cdots, \qquad a \leqq x \leqq b,$$

im genannten Intervalle ebenfalls gleichmäßig.

Aufgabe 5. Man zeige, daß die Reihe des letzten Beispiels von § 2 sich gliedweise integrieren läßt.

§ 6. Gliedweise Differentiation einer unendlichen Reihe.

Sei

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

eine konvergente unendliche Reihe, deren Glieder in einem bestimmten Punkte $x = x_0$ Ableitungen erster Ordnung besitzen. Man sagt, die Reihe lasse sich *gliedweise differentiieren*, falls die Funktion $f(x)$ auch im Punkte $x = x_0$ eine Ableitung besitzt und die Reihe

$$u_1'(x_0) + u_2'(x_0) + \cdots$$

gegen den Grenzwert $f'(x_0)$ konvergiert.

Bei der gliedweisen Differentiation handelt es sich abermals um einen doppelten Grenzübergang, denn es ist

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x = 0} \left[\lim_{n = \infty} \frac{s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)}{\Delta x} \right],$$

$$u_1'(x_0) + u_2'(x_0) + \cdots = \lim_{n = \infty} \left[\lim_{\Delta x = 0} \frac{s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)}{\Delta x} \right],$$

und es fragt sich also: *Wann ist*

$$\lim_{\Delta x = 0} \left[\lim_{n = \infty} \frac{s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)}{\Delta x} \right] = \lim_{n = \infty} \left[\lim_{\Delta x = 0} \frac{s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)}{\Delta x} \right] ?$$

Geometrisch bezieht sich der links stehende Ausdruck auf die

Tangente der Grenzkurve $y = f(x)$. Andererseits hat man es mit der Tangente der Annäherungskurve

$$y = s_n(x)$$

zu tun. Demnach kommt es darauf an zu entscheiden, wann diese letzte Tangente bei wachsendem n gegen die erste konvergiert. An einfachen Beispielen erkennt man, daß dies nicht immer zutrifft. Der Leser wolle für die beiden nachstehenden Fälle a) und b) die Annäherungskurven zeichnen.

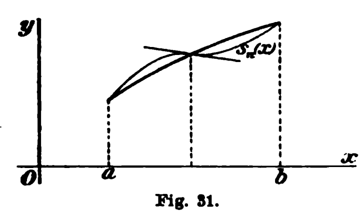


Fig. 31.

a) Sei

$$s_n(x) = 1 - (\cos x)^{2n}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Die entsprechende Reihe

$$f(x) = [1 - (\cos x)^2] + \sum_{n=2}^{\infty} [(\cos x)^{2n-2} - (\cos x)^{2n}]$$

hat den Wert

$$f(x) = 1, \qquad x \neq 0;$$
$$= 0, \qquad x = 0.$$

Im Punkte $x = 0$ hat $f(x)$ keine Ableitung. Trotzdem konvergiert die Reihe der Ableitungen

$$2 \cos x \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} [-(2n-2)(\cos x)^{2n-3} + 2n (\cos x)^{2n-1}] \sin x$$

für alle Werte von x im Intervalle gegen 0.

b) Sei

$$s_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

Hier hat die Reihe

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{x}{1 + n^2 x^2} - \frac{x}{1 + (n-1)^2 x^2}\right]$$

für alle Werte von x den Wert 0; darum ist

$$f'(x) = 0.$$

Trotzdem hat $s_n'(x)$ im Punkte $x = 0$ den Wert 1 für alle Werte von n und daher konvergiert die Reihe der Ableitungen gegen 1.

c) Es sei noch die Fouriersche erwähnt:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots,$$

welche bekanntlich folgende Funktion vorstellt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{4}, \qquad 2n\pi < x < (2n+1)\pi, \\ &= -\frac{\pi}{4}, \qquad (2n-1)\pi < x < 2n\pi, \\ &= 0, \qquad x = n\pi; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{aligned}$$

Die Reihe der Ableitungen divergiert hier im allgemeinen.

Der Reihe b) entnehmen wir die Bemerkung, daß sie gleichmäßig konvergiert und im übrigen eine mit einer stetigen Ableitung ausgestattete Funktion repräsentiert, und doch ist sie nicht gliedweise differentiierbar.

Eine hinreichende Bedingung für die gliedweise Differentiation einer Reihe wird durch folgenden Satz gegeben.

Kriterium für gliedweise Differentiation.[1] *Haben die Glieder einer konvergenten unendlichen Reihe*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots \tag{1}$$

im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige Ableitungen erster Ordnung und konvergiert die Reihe der Ableitungen

$$\varphi(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots \tag{2}$$

gleichmäßig in diesem Intervalle, so läßt sich die vorgelegte Reihe gliedweise differentiieren. Die Ableitung $f'(x)$ ist überdies stetig.

Vor allem stellt die Reihe (2) nach § 3 eine stetige Funktion $\varphi(x)$ vor. Nach dem Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen darf man ferner diese Reihe gliedweise integrieren:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = [u_1(x) - u_1(x_0)] + [u_2(x) - u_2(x_0)] + \cdots.$$

Nun ist

$$f(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots,$$

also ist

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + f(x_0) = f(x).$$

---

1) Darboux, *Ann. de l'école norm.* (2) 4 (1875) p. 83

Durch Differentiation dieser letzten Gleichung erhält man die Relation

$$\varphi(x) = f'(x),$$

w. z. b. w.

Beim Beweise haben wir die Konvergenz der Reihe (1) nur in einem einzigen Punkte benutzt. Demgemäß läßt sich der Satz auch etwas allgemeiner formulieren.

Andererseits kann man ganz auf die Stetigkeit der Ableitungen verzichten, indem man das Theorem von Kap. 12, § 10 heranzieht und die Funktion

$$\frac{s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)}{\Delta x} = s(n, \Delta x)$$

mit jenem $s_n(m)$ identifiziert, wobei Δx jetzt an Stelle von m tritt. Dann wird

$$s(n, m) - s(n', m) = \sum_{k=n'+1}^{n} \frac{u_k(x_0 + \Delta x) - u_k(x_0)}{\Delta x} = \sum_{k=n'+1}^{n} u_k'(x_0 + \theta \Delta x),$$

woraus denn erhellt, daß alle Bedingungen jenes Satzes erfüllt sind.

Aus dem soeben gewonnenen Kriterium folgt der

Potenzreihensatz. *Eine Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

läßt sich für jeden innerhalb ihres Konvergenzintervalls gelegenen Wert von x gliedweise differentiieren.

Sei x' ein beliebiger solcher Wert, und man nehme ein ganz innerhalb des Konvergenzintervalls $|x| < R$ gelegenes Unterintervall $|x| < h$ so an, daß letzteres den Punkt x' umfaßt: $|x'| < h < R$. Dann konvergiert die Reihe der Ableitungen

(3) $$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

nach den Sätzen von § 4 im Intervalle $|x| < R$ absolut und mithin im Unterintervalle $|x| \leqq h$ gleichmäßig. Da auch die übrigen Bedingungen des Kriteriums offenbar erfüllt sind, so ist der Beweis fertig.

Wir bemerken noch, daß das Ergebnis der gliedweisen Differentiation wieder eine Potenzreihe (3) mit gleichem Konvergenzintervalle ist. Daraus folgt, daß man die ursprüngliche Potenzreihe beliebig oft gliedweise differentiieren darf.

Der Satz gilt auch für Potenzreihen mit beliebig vielen Variabelen.

Aufgabe. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann de-

finieren die Reihen

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \cos n\varphi, \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi$$

im Bereiche

$$0 \leqq r \leqq 1, \qquad -\infty < \varphi < \infty$$

zwei stetige Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen r, φ. In jedem innern Punkte des Bereiches ist

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r},$$

sowie

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Man begründe alle diese Behauptungen.

§ 7. Stetigkeit einer durch ein bestimmtes Integral dargestellten Funktion.[1])

Wir betrachten das eigentliche bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

wo also die Grenzen a, b beide endlich sind und im übrigen der Integrand für jeden Wert von α im Intervalle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$:

$$\mathfrak{a} \leqq \alpha \leqq \mathfrak{b}$$

eine eindeutige stetige Funktion von x ist. Das Integral definiert dann eine Funktion

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

der es jedoch gänzlich an Eigenschaften mangelt, denn $\varphi(\alpha)$ kann ja jede beliebige Funktion von α sein. In der Tat sei $\varphi(\alpha)$ eine völlig willkürliche Funktion von α. Setzt man nur

---

1) Wegen einer einfachen Formulierung der Kriterien von §§ 7—8 für solche uneigentlichen bestimmten Integrale, welche in der Praxis am häufigsten vorkommen (man denke etwa an das Integral für die Γ-Funktion), sei auf einen Aufsatz des Verfassers verwiesen: „Problems in infinite series and definite integrals; with a statement of certain sufficient conditions which are fundamental in the theory of definite integrals"; *Annals of Mathematics*, 2. Folge, Bd. 3 (1902), S. 129—146.

$$f(x, \alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{b-a},$$

so erhält man $\varphi(\alpha)$ als Wert des Integrals.

Jetzt legen wir der Funktion $f(x, \alpha)$ noch die weitere Bedingung auf, in jedem Punkte x, α des Bereichs

$$R: \begin{cases} a \leqq x \leqq b, \\ \mathfrak{a} \leqq \alpha \leqq \mathfrak{b}, \end{cases}$$

eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, α zu sein. *Diese Forderung hat zur Folge, daß $\varphi(\alpha)$ stetig wird.* Geometrisch leuchtet das sofort ein, wenn man sich die Fläche

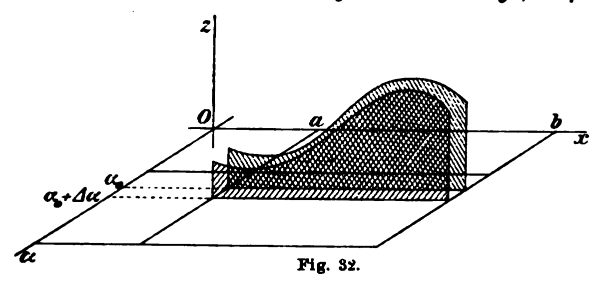


Fig. 32.

$$(1) \qquad z = f(x, \alpha)$$

über dem Bereich R ausgespannt denkt und sie dann mit der Ebene $\alpha = \alpha_0$ schneidet. Die Funktion $\varphi(\alpha)$ läßt sich hierbei für $\alpha = \alpha_0$ als der Flächeninhalt desjenigen Stückes dieser Ebene deuten, welches von der Fläche (1) und den drei Ebenen $z = 0$, $x = a$, $x = b$ begrenzt wird. Erteilt man α jetzt den neuen Wert $\alpha_0 + \Delta\alpha$, so wird $\varphi(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ durch den Flächeninhalt eines benachbarten Stücks der Ebene $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ dargestellt. Wegen der Stetigkeit der Fläche (1) weicht dieser zweite Flächeninhalt offenbar nur wenig vom ersten ab, womit denn die Stetigkeit der Funktion $\varphi(\alpha)$ zutage tritt.

Arithmetisch läßt sich der Beweis folgendermaßen führen. Im abgeschlossenen Bereiche R ist $f(x, \alpha)$ gleichmäßig stetig. Nimmt man also ein positives ε beliebig an, so kann man ein positives von x und α unabhängiges δ so bestimmen, daß

$$|f(x, \alpha) - f(x', \alpha')| < \varepsilon$$

bleibt, wenn (x, α), (x', α') zwei beliebige an die Relationen

$$|x - x'| < \delta, \qquad |\alpha - \alpha'| < \delta$$

geknüpfte Punkte von R sind. Nun ist

$$\varphi(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha_0) = \int_a^b [f(x, \alpha_0 + \Delta\alpha) - f(x, \alpha_0)]\, dx.$$

Unterwirft man daher $\Delta\alpha$ der Bedingung $|\Delta\alpha| < \delta$, so kommt:

$$|\varphi(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha_0)| \leqq \int_a^b |f(x, \alpha_0 + \Delta\alpha) - f(x, \alpha_0)|\, dx < \varepsilon(b - a).$$

Hiermit ist also gezeigt, daß die Funktion $\varphi(\alpha)$ im Punkte $\alpha = \alpha_0$ und sonach auch im ganzen Intervalle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ stetig ist.

Bisher war vorausgesetzt, daß das Intervall $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ abgeschlossen sei. Ist dies nicht der Fall, so braucht man nur an Stelle von R einen abgeschlossenen in R enthaltenen, die Gerade $\alpha = \alpha_0$ umfassenden Bereich

$$R': \quad a \leqq x \leqq b, \quad \mathfrak{a}' \leqq \alpha \leqq \mathfrak{b}'$$

zu nehmen, wobei dann alle früheren Schlüsse noch in Kraft bleiben.

Das Ergebnis formulieren wir in dem folgenden

Kriterium für Stetigkeit[1]). *Ist $f(x, \alpha)$ eine im Bereiche*

$$R: \quad a \leqq x \leqq b, \quad \mathfrak{a} \leqq \alpha \leqq \mathfrak{b}$$

stetige Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x, α, so stellt das eigentliche bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

eine stetige Funktion von α vor.

Allgemeiner braucht dabei das Intervall $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ weder abgeschlossen noch endlich zu sein.

Der Satz nebst dem Beweise läßt sich sofort auf Integrale erweitern, deren Integrand von mehreren Parametern abhängt. Sei (A) ein beliebiger Bereich im n-fach ausgedehnten Raume der n Parameter $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Dabei mögen alle oder auch nur ein Teil der Randpunkte von (A), insbesondere gar keine derselben, mit zum Bereiche gerechnet werden. Man fasse den Bereich R ins Auge, dessen Punkte $(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ aus einer willkürlichen Kombination eines x aus dem endlichen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ mit einem Punkte $(\alpha_1, \cdots \alpha_n)$ von (A) entstehen. In diesem Bereiche R soll eine Funktion $f(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ eindeutig erklärt und stetig sein. Besagtes Kriterium lautet dann folgendermaßen:

---

1) Dini, *Analisi infinitesimale*, 1877/78, p. 102, und *Fondamenti per teorica delle funzioni di variabili reali*, 1878, Nr. 286; Harnack, *Differential- und Integralrechnung*, 1882, p. 280.

Das Integral

$$\int_a^b f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,dx$$

stellt eine in (A) *stetige Funktion* $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *vor.*

In der Tat sei $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ ein beliebiger Punkt von (A). Dann wird $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in jedem Punkte der abgeschlossenen Strecke

$$(x, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n), \qquad a \leq x \leq b,$$

stetig sein. Daraus folgt, daß $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ auch längs der ganzen Strecke gleichmäßig stetig ist:

$$|f(x', \alpha_1', \ldots, \alpha_n') - f(x, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)| < \varepsilon,$$
$$|x' - x| < \delta, \qquad |\alpha_i - \bar{\alpha}_i| < \delta.$$

Von hier ab gestaltet sich der Beweis gerade so, wie vorhin.

Selbst im Falle, wo die Integrationsgrenzen veränderlich sind, aber stetig von den Parametern abhängen, stellt das Integral eine stetige Funktion vor. Man braucht da nur eine neue Integrationsvariabele t vermöge der Transformation

$$x = (b - a)t + a$$

einzuführen. Hierdurch geht das Integral in folgendes über:

$$(b - a)\int_0^1 f((b - a)t + a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,dt.$$

Dieses Integral liefert aber nach dem vorstehenden Kriterium eine stetige Funktion. Also:

Das Kriterium bleibt noch bestehen, wenn die Integrationsgrenzen beliebige stetige Funktionen der Parameter sind.

Endlich gilt der Satz auch für mehrfache Integrale mit festem Integrationsbereich. Sei etwa V ein abgeschlossener Bereich im dreidimensionalen Raume, und sei R der Bereich, dessen Punkte $(x, y, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ aus der Kombination der Koordinaten (x, y, z) eines beliebigen Punktes von V mit denjenigen eines beliebigen Punktes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von (A) entstehen. In diesem Bereiche R soll eine Funktion $f(x, y, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eindeutig erklärt und stetig sein. Dann lautet das Kriterium, wie folgt:

Das Integral

$$\iiint_V f(x, y, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,dV$$

stellt eine in (A) *stetige Funktion vor.*

Der frühere Beweis bleibt noch in Kraft.

Aufgabe. Sei die unendliche Reihe

$$u_1(x, \alpha) + u_2(x, \alpha) + \cdots,$$

deren Glieder im endlichen Bereiche

$$R: \qquad a \leq x \leq b, \qquad \mathfrak{a} \leq \alpha \leq \mathfrak{b}$$

stetige Funktionen der beiden unabhängigen Variabelen x, α sind, in R gleichmäßig konvergent. Man zeige, daß dann die Reihe

$$\int_a^b u_1(x, \alpha)\,dx + \int_a^b u_2(x, \alpha)\,dx + \cdots$$

eine stetige Funktion von α definiert.

§ 8. Differentiation unter dem Integralzeichen.[1]

Kriterium für Differentiation unter dem Integralzeichen. Leibnizscher Satz.[2] *Sei $f(x, \alpha)$ für jeden Wert von α im Intervalle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ eine im abgeschlossenen Intervalle $a \leq x \leq b$ stetige Funktion von x. Ist ferner*

$$f_\alpha(x, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und α für alle in Betracht kommenden Werte dieser Variabelen, so läßt das zwischen festen Grenzen a, b genommene Integral

$$\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$$

eine stetige Ableitung nach α zu, und zwar wird dieselbe durch die Formel

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$$

vorgestellt. Dabei braucht das Intervall $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ weder abgeschlossen noch endlich zu sein.

---

1) Man vergleiche die erste Anmerkung zu § 7.

2) Dini, *Analisi infinitesimale,* 1877/78, p. 107: Harnack, *Differential- und Integralrechnung*, 1882, p. 288. *Enzyklopädie* II A 2 Voss, Nr. 36.

Man setze

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

Dann ist

$$\varphi(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha_0) = \int_a^b [f(x, \alpha_0 + \Delta\alpha) - f(x, \alpha_0)]\, dx.$$

Wegen des Mittelwertsatzes hat der Integrand den Wert:

$$f(x, \alpha_0 + \Delta\alpha) - f(x, \alpha_0) = \Delta\alpha f_\alpha(x, \alpha_0 + \theta\Delta\alpha).$$

Ist nun das Intervall $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ abgeschlossen, um uns zunächst auf diesen Fall zu beschränken, so ist $f_\alpha(x, \alpha)$ im abgeschlossenen Bereiche

$$R: \quad a \leq x \leq b, \qquad \mathfrak{a} \leq \alpha \leqq \mathfrak{b}$$

gleichmäßig stetig. Setzt man also

$$f_\alpha(x, \alpha_0 + \theta\Delta\alpha) = f_\alpha(x, \alpha_0) + \zeta,$$

so läßt sich einem beliebig kleinen positiven ε stets ein konstantes positives δ so zuordnen, daß

$$|\zeta| < \varepsilon, \qquad \text{wenn nur} \qquad |\Delta\alpha| < \delta$$

ist. Dies gibt:

$$\frac{\varphi(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha_0)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha_0)\, dx + \int_a^b \zeta\, dx,$$

wobei

$$\left|\int_a^b \zeta\, dx\right| < \varepsilon(b - a)$$

ist. Folglich ist

$$\lim_{\Delta\alpha = 0} \frac{\varphi(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha_0)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f_\alpha(x, \alpha_0)\, dx.$$

Die Stetigkeit der Ableitung ergibt sich aus dem Satze von § 7. Ist endlich das Intervall $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ nicht abgeschlossen, so verfahre man wieder genau ebenso, wie in § 7 bei der entsprechenden Frage.

Der Satz ist einer ähnlichen Verallgemeinerung fähig, wie das Kriterium von § 7. Unter Beibehaltung der daselbst eingeführten Bezeichnungen läßt sich das Ergebnis, wie folgt, aussprechen.

Ist $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in R eindeutig erklärt und für jeden festen Punkt von (A) eine im Intervalle $a \leq x < b$ stetige Funktion von x;

ist ferner $\partial f / \partial \alpha_i$ *im Bereiche* R *stetig, so läßt die Funktion*

$$\int_a^b f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, dx$$

eine stetige Ableitung nach α_i *zu, und zwar ist*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_a^b f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\, dx.$$

Der Satz gilt auch für mehrfache Integrale.

Bei veränderlichen Integrationsgrenzen gestaltet sich das Kriterium, wie folgt:

Satz. *Sei* $f(x, \alpha)$ *eine im abgeschlossenen Bereiche*

$$S: \qquad a \leq x \leq b, \qquad \mathfrak{a} < \alpha < \mathfrak{b}$$

stetige Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, α, *wobei*

$$a = \psi(\alpha), \qquad b = \omega(\alpha), \qquad [\psi(\alpha) \neq \omega(\alpha)]$$

stetige, mit stetigen Ableitungen erster Ordnung ausgestattete Funktionen von α *bedeuten. Sei ferner*

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = f_\alpha(x, \alpha)$$

eine in den Punkten $a < x < b$, $\mathfrak{a} \leq \alpha \leq \mathfrak{b}$ *von* S *stetige Funktion, welche in den ausgenommenen Randpunkten Randwerte annimmt. Dann läßt das Integral*

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

eine stetige Ableitung nach α *zu, und zwar wird dieselbe durch die Formel*

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}$$

vorgestellt.

Allgemeiner braucht das Intervall $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *weder abgeschlossen noch endlich zu sein.*

Es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, daß a unveränderlich bleibt. Sei nämlich $\alpha = \alpha'$ ein beliebiger Wert von α im Intervalle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, und man nehme c so an, daß

Nach den Entwicklungen von § 7 sind sowohl die erste dieser Funktionen als auch φ(α, β) selbst stetig im abgeschlossenen Bereiche R. Die zweite Funktion ist schon nach Voraussetzung dort stetig. Ziehen wir nun den letzten Satz von Kap. 2, § 3 heran, indem wir jene Funktion F(x, y) mit φ(α, β) identifizieren, so sehen wir, daß in einem beliebigen Punkte des Randes $b = \omega(\alpha)$:

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \varphi_\alpha \frac{d\alpha}{d\alpha} + \varphi_\beta \frac{d\beta}{d\alpha}$$

ist, wobei als Kurve L eben der Rand selbst genommen wird. Hieraus ergibt sich die Relation

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \varphi_\alpha + \varphi_\beta \frac{d\omega}{d\alpha},$$

und damit ist der Beweis erbracht.

Auf Grund der vorausgehenden Betrachtungen können wir noch den folgenden Satz aussprechen.

Unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes stellt das Integral

$$\varphi(p, q, \alpha) = \int_p^q f(x, \alpha)\, dx$$

eine im Bereiche

$$\Sigma: \quad a \leq p \leq b, \qquad a \leq q \leq b, \qquad \mathfrak{a} \leq \alpha \leq \mathfrak{b}$$

stetige Funktion der drei unabhängigen Veränderlichen p, q, α *vor, welche in allen innern Punkten von* Σ *stetige Ableitungen der ersten Ordnung besitzt:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -f(p, \alpha), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = f(q, \alpha), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \int_p^q f_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Diese Ableitungen sind sämtlich am Rande von Σ *stetig.*

Soll der Integral von mehr als einem Parameter abhängen, so liegt die Verallgemeinerung auf der Hand.

Anhang. Über nicht-analytische Funktionen.

Eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen heißt *analytisch in einem Punkte*, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelt werden kann. Sie heißt *analytisch in einem Intervalle*, wenn sie in jedem Punkte des Intervalls analytisch ist. Diese Definitionen übertragen sich sofort auf reelle analytische Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen.

Die Funktionen einer Variabelen, mit denen man sich in der Differential- und Integralrechnung hauptsächlich beschäftigt, hören nur in isolierten Punkten auf, sich analytisch zu verhalten und werden übrigens in diesen Punkten entweder selbst unendlich oder aber ihre Ableitungen sind dort nicht alle vorhanden. Andere isolierte Singularitäten haben wir im 1. Kapitel eingehender besprochen. Als frappantes Beispiel für die Möglichkeiten, welche die bloße Forderung der Stetigkeit gewährt, pflegt man die bereits erwähnte Weierstraßsche Funktion anzuführen, welche ausnahmslos stetig ist und doch nirgends eine Ableitung zuläßt. Der Graph der Funktion hat in jedem Intervalle Spitzen mit vertikaler Tangente und entzieht sich damit der gewöhnlichen Anschauung einer Kurve so weit, daß man früher sogar in Versuchung kam, ihm die Berechtigung, überhaupt als Kurve aufgefaßt zu werden, abzusprechen.

Durch Integration der Weierstraßschen Funktion erhält man ein Beispiel einer Funktion, deren geometrisches Bild eine mit einer stetigen Tangente versehene Kurve ist, auf welche der Begriff der Krümmung nirgends paßt.

Diese Funktionen sind einerseits nicht analytisch, andererseits geht den entsprechenden Kurven die eine oder die andere geometrische Eigenschaft ab. Im Anschluß hieran hat sich die Ansicht gebildet, daß eine nicht-analytische Funktion auch notwendig etwas bizarres an sich haben müsse. Doch ist das durchaus nicht der Fall, wie wir jetzt durch eine andere Klasse von Beispielen zeigen wollen.

Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Zu diesem Behufe gehen wir von der Funktion aus[1]):

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad x \neq 0;$$
$$f(0) = 0.$$

Für alle Werte von x, insbesondere aber für $x = 0$, besitzt dieselbe stetige Ableitungen aller Ordnungen, und zwar ist

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

In der Tat wird die n^{te} Ableitung durch einen Ausdruck von der Form gegeben:

$$f^{(n)}(x) = \frac{G(x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}, \qquad x \neq 0,$$

wo $G(x)$ ein Polynom und m eine natürliche Zahl ist, wie durch den Schluß von n auf $n+1$ erhellt. Da nun ferner für alle Werte von k

$$\lim_{x=0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = \lim_{y=\infty} \frac{y^k}{e^{y^2}} = 0 \qquad \left(x = \frac{1}{y}\right)$$

ist, so schließt man, daß

$$\lim_{x=0} f^{(n)}(x) = 0$$

ist. Hieraus ergibt sich wieder vermöge des Schlusses von n auf $n+1$, daß $f^{(n)}(0)$ existiert und den Wert 0 hat, denn mit Hilfe des Mittelwertsatzes findet man

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x=0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x=0} f^{(n+1)}(\theta x) = 0,$$

1) Will man dem allerdings trivialen Einwande begegnen, daß diese Funktion nicht durch eine einheitliche Formel definiert ist, so braucht man ja nur zu schreiben:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} e^{-\frac{n}{nx^2+1}}$$

wobei, für $n = 0$, unter $f^{(0)}(x)$ eben die Funktion $f(x)$ selbst zu verstehen ist.

Trotzdem ist diese Funktion im Punkte $x = 0$ nicht analytisch. Denn die Taylorsche Reihenentwicklung

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

verschwindet ja identisch und stellt also die Funktion nur für den einen Wert $x = 0$ dar. Sehen wir nun zu, ob die entsprechende Kurve eine geometrische Eigentümlichkeit im Punkte $x = 0$ aufweist, so stellt sich heraus, daß eben keine vorhanden ist. Die Kurve verläuft dort glatt, sie ist zwar außerordentlich platt an dieser Stelle, doch wiederum nicht so platt, wie die analytische Kurve $y = 0$. Wo ist da also eine geometrische oder eine funktionentheoretische Eigenschaft, welche wir bei unsern Funktionen nicht vermissen möchten, welche aber dieser Funktion abginge?

Ein zweites Beispiel: $y = \Phi(x)$. Wir wollen jetzt zu einem Beispiel einer Funktion übergehen, welche sich nirgends analytisch verhält und doch stetige Ableitungen aller Ordnungen besitzt. Man bilde sich vorab die Funktion

$$\varphi(x) = f(\sin \pi x),$$

wo $f(x)$ die soeben besprochene Funktion bedeutet. Diese weist in den Punkten $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ gleiches Verhalten, wie soeben die Funktion $f(x)$ im Punkte $x = 0$, auf. Hierauf fasse man die Funktion

$$\frac{1}{n!}\varphi(n!\,x)$$

ins Auge. Die dieser Funktion zugehörige Kurve entsteht aus derjenigen der Funktion $y = \varphi(x)$, indem man die Ebene durch eine Ähnlichkeitstransformation im Verhältnis von 1 zu $1/n!$ zusammenschrumpfen läßt:

$$x' = \frac{x}{n!}, \qquad y' = \frac{y}{n!}.$$

Sie hat daher dieselbe Gestalt, nur ist sie nach einem kleineren Maßstabe angelegt. Im übrigen ist

$$\varphi^{(k)}(n!x) = 0, \qquad \text{wo} \begin{cases} k = 1,\, 2, \cdots, \\ x = \frac{l}{n!},\; l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \end{cases}$$

In diesen Punkten verhält sich $\varphi(n!\,x)$ also nicht analytisch, sonst

ist $\varphi(n!x)$ analytisch. Letzteres erhellt sofort aus dem allgemeinen Satze von Kap. 7, § 13. Man kann den Beweis aber auch vermöge der Reihensätze der algebraischen Analysis, insbesondere mittels des Zusatzes von Kap. 7, § 14 führen.

Sodann setzen wir die unendliche Reihe an[1]):

$$\Phi(x) = a_1 \varphi(x) + \frac{a_2}{2!}\varphi(2!x) + \frac{a_3}{3!}\varphi(3!x) + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten a_n so gewählt werden, daß sie mit wachsendem n rapide abnehmen. Für unsern Zweck genügt schon die Annahme:

$$a_n = \frac{1}{(n!)^{n-1}}.$$

Demgemäß wird

(1) $$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n!x)}{(n!)^n}.$$

Jetzt behaupte ich: a) die Funktion $\Phi(x)$ hat stetige Ableitungen aller Ordnungen; b) $\Phi(x)$ verhält sich nirgends analytisch.

ad a) Wir wollen zunächst zeigen, daß $\Phi'(x)$ existiert und stetig ist. Das folgt nach den früheren Sätzen dieses Kapitels daraus, daß $\varphi'(x)$ eine stetige Funktion von x ist, welche für alle Werte von x (d. h. im Intervalle $-\infty < x < \infty$) endlich bleibt:

$$|\varphi'(x)| < G_1,$$

wo G_1 eine Konstante bedeutet. Nach dem Weierstraßschen Kriterium § 4 erweist sich mithin die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'(n!x)}{(n!)^{n-1}}$$

als gleichmäßig konvergent, indem man

$$M_n = \frac{G_1}{(n!)^{n-1}}$$

setzt. Die Konvergenz der Reihe (1) ist sofort ersichtlich. Dem Kriterium von § 6 zufolge läßt sich also die Reihe (1) gliedweise differentiieren, und ihre Ableitung ist außerdem stetig.

---

1) Hierbei bedienen wir uns des von Hankel herrührenden *Prinzips der Verdichtung der Singularitäten*. Man vergleiche Hankel, „Untersuchungen über die unendlich oft unstetigen und oszillierenden Funktionen", wieder abgedruckt in den *Math. Annalen*, Bd. 20 (1882) S. 63.

Genau ebenso kann man zeigen, daß auch die zweite, dritte, $\cdots$ k^{te} Ableitung von $\Phi(x)$ vorhanden und stetig sind, w. z. b. w.

ad b) Sei zunächst $x_0 = p/q$ ein beliebiger rationaler Wert von x, der nur keine ganze Zahl ist. Dabei sollen p und q teilerfremde ganze Zahlen und $q > 1$ sein. Sei ferner ν der kleinste Wert von n, wofür $n!$ durch q teilbar ist. Darnach ist $\nu!/q$ eine ganze Zahl, dagegen ist $(\nu - 1)!/q$, sowie $p(\nu - 1)!/q$ ein Bruch. Infolgedessen stimmt jede Ableitung der Funktion $\Phi(x)$ mit der entsprechenden Ableitung der Funktion

$$\varphi(x) + \frac{\varphi(2!x)}{(2!)^2} + \cdots + \frac{\varphi((\nu-1)!x)}{((\nu-1)!)^{\nu-1}}$$

im Punkte x_0 überein. Nun verhält sich aber jeder Term dieser Summe und somit auch die ganze Summe im Punkte x_0 analytisch. Setzt man also die Taylorsche Reihenentwicklung für die Funktion $\Phi(x)$ in diesem Punkte an:

$$\Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\Phi''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

so erhält man eine unendliche Reihe, welche allerdings innerhalb eines bestimmten Intervalls konvergiert, sie stellt aber nicht die Funktion $\Phi(x)$, sondern nur jene ersten $\nu - 1$ Terme der Reihe (1) vor. Daß nun diese beiden Werte doch im allgemeinen nicht zusammenfallen, erhellt schon daraus, daß für jeden irrationalen Wert von x alle Terme der Reihe (1) positive Werte haben.

Hiermit ist aber auch zugleich gezeigt, daß die Funktion $\Phi(x)$ sich überhaupt für keinen Wert von x analytisch verhält.

Die graphische Darstellung der Funktion $y = \Phi(x)$. Es bleibt nur noch übrig, uns Rechenschaft darüber zu geben, wie sich die der Funktion $y = \Phi(x)$ entsprechende Kurve ausnimmt. Zu dem Zwecke stellen wir uns der Reihe nach die Annäherungskurven vor:

$$y = s_n(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi(2!x)}{(2!)^2} + \cdots + \frac{\varphi(n!x)}{(n!)^n}$$

und bedenken dabei, daß der Übergang von der $(n-1)^{\text{ten}}$ zur n^{ten} Kurve dadurch bewerkstelligt wird, daß man die Ordinaten von $y = s_{n-1}(x)$ um die Größe

$$y = \frac{\varphi(n!x)}{(n!)^n}$$

ändert. Nun erwies sich schon die Kurve

$$y = \frac{\varphi(n!x)}{n!}$$

als der Kurve $y = \varphi(x)$ ähnlich, teilt man aber ihre Ordinaten noch durch $(n!)^{n-1}$, so schmiegt sie sich der Geraden $y = 0$ außerordentlich eng an, und auch ihre Tangentenrichtung, sowie ihre Krümmung weichen nur wenig von denjenigen jener Geraden ab. Infolgedessen erhält man bereits für einen kleinen Wert von n in der Annäherungskurve $y = s_n(x)$ eine zuverlässige Repräsentantin der Grenzfunktion[1]) $y = \Phi(x)$.

Nicht-analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. Ein Beispiel einer nicht-analytischen Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlichen erhält man offenbar sofort, wenn man das Argument der obigen Funktion $\Phi(x)$ durch ein beliebiges Polynom in $x, y, z, \cdots$ ersetzt. Man kann aber auch in ähnlicher Weise wie vorhin vorgehen und etwa die Reihe ansetzen:

$$\Phi(x, y, z, \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n!x)\varphi(n!y)\varphi(n!z)\cdots}{(n!)^n}.$$

Über die durch die Funktion $\Phi(x)$ vertretene Klasse nicht-analytischer Funktionen. Die Funktion $\Phi(x)$ liefert den Beleg für die Existenz einer Klasse von Funktionen, welche Ableitungen aller Ordnungen besitzen, ohne jedoch durch eine Potenzreihe darstellbar zu sein. Bezüglich solcher Funktionen wiederholen wir die Frage, womit wir die Diskussion der Funktion $f(x)$ schlossen: *Wo ist da eine geometrische oder eine funktionentheoretische Eigenschaft, welche wir bei unseren Funktionen nicht vermissen möchten, welche aber diesen Funktionen abginge?*

Man wird vielleicht darauf erwidern: Schon die Eigenschaft, in eine Taylorsche Reihe entwickelbar zu sein, wird der Funktion nicht zuteil, und damit geht so mancher einfacher Beweis, der sich auf

---

1) Wollte man noch die höheren Ableitungen von $\Phi(x)$, etwa die 1000ste, auf die nämliche Weise untersuchen, so würden die ersten paar Glieder der abgeleiteten Reihe kein rechtes Bild der Grenzfunktion liefern, vielmehr weisen dieselben starke Schwankungen auf, welche sich jedoch später legen, so daß von einer bestimmten, allerdings nicht ganz früh eintretenden Stelle ab die analytisch bereits konstatierte gleichmäßige Konvergenz der Reihe wieder in ihre Rechte tritt. Die Reihe konvergiert schlecht, — wie zum Beispiel die Exponentialreihe $\Sigma x^n/n!$ für $x = 1000$, — und kommt ihrem Grenzwert erst nach mehreren hundert Gliedern gleichmäßig nahe.

das Operieren mit Potenzreihen stützt, verloren. Was den ersten Punkt anbetrifft, so möchte ich sagen: Schade um die Potenzreihe, welche nicht einmal im stande ist, eine so einfache Funktion darzustellen! Das Mangelhafte liegt hier eben nicht an der Funktion, sondern an der Reihenentwicklung, die zu spröde ist, selbst einige von den allereinfachsten Funktionen zum Ausdruck zu bringen. Die Fourierschen Reihen, sowie die damit verwandten Reihen der mathematischen Physik sind dagegen geschmeidiger.

Wichtiger ist aber die zweite Ausstellung, es ginge eine bequeme Beweismethode verloren. In der Tat kann man die Beweise, wie sie in der Praxis vorkommen, vermöge des Taylorschen Satzes mit dem Restgliede:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

noch einfacher führen. Seit langer Zeit habe ich einen zwingenden Grund vergebens gesucht, den analytischen Funktionen in der reellen Funktionentheorie eine bevorzugte Stellung einzuräumen. Bei den allermeisten Anwendungen der Analysis liegt ein solcher Grund eben nicht vor, denn man kommt, wie gesagt, mit dem Taylorschen Satze mit Restglied rascher zum Ziele. Selbst in der komplexen Funktionentheorie liegt die Sache nicht anders. Man kann die Hauptsätze dieser Theorie alle noch einfacher ohne die Cauchy-Taylorsche Reihenentwicklung als mit Hilfe derselben beweisen. Nur eine Ausnahme wüßte ich anzuführen. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist man beim Cauchyschen Probleme noch nicht im Besitze anderer Methoden, um den Existenzbeweis allgemein zu führen, als nur deren, welche sich auf Potenzreihen mit mehreren Argumenten stützen.

Was geht aus diesen Beispielen hervor? Neben jene bizarren nicht-analytischen Funktionen, welche an die Grenzen der Möglichkeiten für stetige Funktionen vordringen, haben wir eine zweite Klasse nicht-analytischer Funktionen gestellt, welchen alle Stetigkeitseigenschaften der analytischen Funktionen zukommen und welche sich von diesen, wie es scheint, nur durch ein äußeres Merkmal unterscheiden. Es gibt eben neben jenen *hypoanalytischen* Funktionen auch *hyperanalytische*, also Funktionen, welche sich mindestens ebenso regulär verhalten als die analytischen Funktionen selbst. Demgemäß entspricht die Einteilung der Funktionen in analytische und nicht-analytische nicht der Natur der Sache.

Bei orientierenden Untersuchungen — man denke etwa an die Lieschen Theorien — pflegt man sich wohl dadurch zu decken, daß man verlangt, alle in Betracht kommenden Funktionen sollen analytisch sein. Damit begreift man eine Menge von Eigenschaften mit ein, welche man vorläufig nicht überblickt, und vermeidet wieder Ausnahmefälle, deren Existenz man ebensowenig ahnt. Denn die analytischen Funktionen sind duldsam und lassen manche begriffliche Unexaktheit ungestraft durchgehen. Befriedigender ist jedoch die Formulierung eines Satzes, wenn wir dabei nur solche Einschränkungen machen, welche dem Wesen der Sache entsprechen, also solche, ohne welche entweder der Satz nicht richtig wäre oder aber der Beweis uns nicht gelingen würde.

Viertes Kapitel.

Kurvenintegrale und mehrfach zusammenhängende Bereiche.

§ 1. Kurvenintegrale.

In einem Bereiche S der (x, y)-Ebene[1]) sei eine geschlossene oder eine nicht-geschlossene reguläre Kurve L gegeben, welche analytisch durch die Gleichungen

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s), \qquad (0 \leqq s \leqq l)$$

dargestellt werden möge, wobei die Bogenlänge s als Parameter benutzt wird. Sei ferner eine stetige Funktion $f(x, y, s)$ vorgelegt, wo (x, y) die Koordinaten eines beliebigen Punktes von S sind und s im Intervalle $(0, l)$ willkürlich genommen wird. Unter dem Kurvenintegral

$$\int_L f(x, y, s)\,ds,$$

über die Kurve L hinerstreckt, versteht man dann folgendes. Man zerlege L in n Teilbogen mittels der den Parameterwerten $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = l$ entsprechenden Punkte (x_i, y_i). Sei (x_i', y_i') ein beliebiger Punkt des Bogens (s_i, s_{i+1}), s_i' der zugehörige Parameterwert, und sei s_i'' ein zweiter dem Intervalle $s_i \leqq s \leqq s_{i+1}$ ebenfalls angehöriger Wert von s. Man bilde ferner die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i', y_i', s_i'')\Delta s_i, \qquad \Delta s_i = s_{i+1} - s_i,$$

und lasse n unbegrenzt wachsen, während das größte Δs_i gleichzeitig gegen 0 abnimmt. Dann nähert sich diese Summe einem Grenzwert,

1) Wegen der Definition eines *regulären Bereiches* oder eines *Bereiches S* vergleiche man Kap. 2, § 2.

und dieser Grenzwert ist es, welchen wir als den Wert des Kurvenintegrals definieren wollen.

Um die Definition zu begründen, setze man

$$f(x_i', y_i', s_i'') = f(x_i, y_i, s_i) + \zeta_i$$

und betrachte man die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, s_i)\,\Delta s_i.$$

Diese nähert sich offenbar beim obigen Grenzübergange dem gewöhnlichen Integrale

$$\int_0^l f(\varphi(s), \psi(s), s)\,ds.$$

Andererseits kann man die Teilung der Kurve L so weit treiben, daß der Wert von ζ_i, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, dem absoluten Betrage nach, gleichmäßig unter die beliebig kleine positive Konstante ε herabsinkt. Denn die Funktion $f(x, y, s)$ ist ja gleichmäßig stetig in ihrem Definitionsbereich, da dieser eben abgeschlossen ist. Und selbst wenn dies nicht der Fall wäre, könnte man L mit einem innerhalb S gelegenen abgeschlossenen Streifen Σ umgeben und die Funktion $f(x, y, s)$ nur für solche Wertsysteme (x, y, s) betrachten, welche Punkten (x, y) von Σ entsprechen. Daraus folgt, daß, sobald die Teilung von L genügend weit gediehen ist,

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i \Delta s_i\right| < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i = \varepsilon l$$

bleibt, oder

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=\infty}^{n-1} \zeta_i \Delta s_i = 0.$$

Hiermit ist die in Aussicht genommene Definition gerechtfertigt:

$$\int_L f(x, y, s)\,ds = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i', y_i', s_i'')\Delta s_i,$$

und es ist auch zugleich bewiesen, daß

$$\int_L f(x, y, s)\,ds = \int_0^l f(\varphi(s), \psi(s), s)\,ds$$

ist.[1])

1) Man könnte zwar diese Gleichung von vornherein als Definition des betreffenden Kurvenintegrals nehmen. Die vorstehende Definition erweist sich aber in der Praxis als nützlicher.

Zu beachten ist, daß die Definition einen bestimmten *Sinn*, in welchem über L integriert werden soll, nicht voraussetzt. Δs ist eben eine wesentlich positive Größe, wie zum Beispiel bei der Erklärung des Flächenintegrals $\int\int f(x, y)dA$ der Inhalt ΔA eines jeden Teilbereiches auch als absolute Größe eingeführt wird. Erst bei den nachfolgenden Integralen wird unterschieden, ob nach der einen Fortschreitungsrichtung auf L oder nach der anderen integriert wird.

Zuweilen empfiehlt es sich, den Fall mit einzubegreifen, daß die Kurve L sich auf einen Punkt zusammenzieht. Wir legen dem Integral dann den Wert Null bei.

Ein zweites Kurvenintegral ist folgendes. Man geht wiederum von einem Bereiche S und von einer darin gelegenen Kurve L aus, deren Endpunkte mit (a, b), (a', b') bezeichnet werden mögen.[1]) Diese Kurve teilt man dann durch die aufeinander folgenden Punkte $(x_0, y_0) = (a, b)$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) = (a', b')$ in n Bogen ein und nimmt auf jedem letzterer einen Punkt (x_i', y_i') willkürlich an. Des weiteren legt man eine stetige Funktion $F(x, y)$ lediglich der Koordinaten (x, y) eines Punktes von S zu Grunde und bildet die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i', y_i')\Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Der Grenzwert dieser Summe soll nun als der Wert des Kurvenintegrals

$$\int_{(a, b)}^{(a', b')} F(x, y)dx,$$

über die Kurve L erstreckt, und zwar in der Richtung von (a, b) nach (a', b') definiert werden. Daß diese Summe auch wirklich einem Grenzwerte zustrebt, ergibt sich daraus, daß, dem Mittelwertsatze zufolge, bei geeigneter Einführung der Bogenlänge s als Parameter

$$\Delta x_i = \varphi'(s_i'')\Delta s_i, \qquad s_i < s_i'' < s_{i+1},$$

wird, wonach sich dann die Summe

---

1) Im Falle einer geschlossenen Kurve werden (a, b) und (a', b') als miteinander zusammenfallend aufzufassen sein. Der Leser wolle sich L indessen vorläufig als nichtgeschlossen denken, die Modifikationen, welche der andere Fall benötigt, liegen dann auf der Hand.

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i', y_i')\varphi'(s_i'')\Delta s_i$$

unter die bereits behandelten Summen unterordnet. Hiermit ist die Definition gerechtfertigt:

$$\int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} F(x, y)dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i', y_i')\Delta x_i,$$

und zugleich ist auch ferner bewiesen, daß

$$\int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} F(x, y)dx = \int\limits_0^l F(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s)ds$$

ist. Im übrigen ist

$$\int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} F(x, y)dx = -\int\limits_{(a',b')}^{(a,b)} F(x, y)dx.$$

In ähnlicher Weise hat man

$$\int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} F(x, y)dy = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i', y_i')\Delta y_i = \int\limits_0^l F(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s)ds.$$

Unter dem Kurvenintegral

$$\int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} Pdx + Qdy \quad \text{oder} \quad \int\limits_L Pdx + Qdy,$$

wo P und Q zwei in S stetige Funktionen von x, y bedeuten, versteht man die Summe

$$\int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} Pdx + \int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} Qdy.$$

Auch hier wird gelegentlich der Fall mit einbegriffen, daß die Kurve L sich auf einen Punkt zusammenzieht. Wir legen dem Integral dann wieder den Wert Null bei.

Es ist

$$\int\limits_{(a,b)}^{(a',b')} Pdx + Qdy = \int\limits_0^l (P\cos\tau + Q\sin\tau)ds,$$

wo τ den Winkel zwischen der positiven x-Achse und der durch die Reihenfolge der Terme in der Summenbildung

$$P(x_0', y_0')\Delta x_0 + P(x_1', y_1')\Delta x_1 \ldots,$$
$$Q(x_0', y_0')\Delta x_0 + Q(x_1', y_1')\Delta x_1 \ldots$$

bestimmten Fortschreitungsrichtung längs L bedeutet. Ferner ist

$$\int_{(a,b)}^{(a',b')} P\,dx + Q\,dy = -\int_{(a',b')}^{(a,b)} P\,dx + Q\,dy.$$

Sei S ein regulärer Bereich, dessen Rand aus n einfachen regulären geschlossenen einander nicht schneidenden Kurven $C_1, \ldots, C_n$ besteht. Dann pflegt man die Verabredung zu treffen, daß das Randstück C_i *in positivem Sinne* durchlaufen wird, wenn ein Spaziergänger, der in dieser Richtung auf C_i fortschreitet, den Bereich S stets zur linken hat. Führt man nun das Integral

$$\int_{C_i} P\,dx + Q\,dy$$

über jede Randkurve C_i, $(i = 1, \ldots, n)$ in positivem Sinne und addiert man die dadurch entstandenen Werte zusammen, so erhält man *das über den ganzen Rand von S in positivem Sinne erstreckte Integral*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy.$$

Eine weitere Definition, welche hier noch zur Sprache kommen muß, ist folgende. Sei $\mathfrak{C}$ eine einfache reguläre geschlossene Kurve des Bereichs S, gleichviel ob $\mathfrak{C}$ zum Rande gehört oder nicht. Im ersten Falle wird $\mathfrak{C}$ wenigstens nicht in seiner Eigenschaft als Randkurve von S angesehen. Dann wird der positive Sinn von $\mathfrak{C}$, wie folgt, erklärt. Faßt man das Innere $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{C}$ ins Auge und betrachtet man $\mathfrak{C}$ nun als Randkurve von $\mathfrak{S}$, so legt man $\mathfrak{C}$ als positiven Sinn denjenigen bei, welcher ihm als Randkurve von $\mathfrak{S}$ nach der vorstehenden Definition zukommt.

Dieser letzten Definition zufolge wird also bei positivem Umlauf des Gesamtrandes von S nur die äußere Kurve C_n in positivem, die übrigen werden in negativem Sinne beschrieben. Demgemäß ist auch

$$\text{(A)} \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C_n} P\,dx + Q\,dy - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{C_i} P\,dx + Q\,dy,$$

wo das Integral linker Hand über den Rand von S, die Integrale rechter Hand dagegen über ihre respektiven Kurven je in positivem Sinne erstreckt werden.

Abhängigkeit von einem Parameter. Die Kriterien des 3. Kapitels, §§ 7, 8 übertragen sich auf Kurvenintegrale, wie aus der Darstellung solcher durch gewöhnliche Integrale unmittelbar erhellt. Insbesondere können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz. *Sei S ein Bereich der (x, y)-Ebene und (A) ein Bereich der Parameter $(\alpha, \beta, \ldots)$. Man fasse ferner denjenigen Bereich $(\mathfrak{R})$ ins Auge, dessen Punkte $(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$ aus einer willkürlichen Kombination eines Punktes (x, y) von S mit einem Punkte $(\alpha, \beta, \ldots)$ von (A) hervorgehen. Sind dann $P(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$, $Q(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$ zwei Funktionen, welche in $(\mathfrak{R})$ stetig sind, so stellt das Kurvenintegral*

$$J = \int_L P(x, y, \alpha, \beta, \ldots)dx + Q(x, y, \alpha, \beta, \ldots)dy,$$

über eine bestimmte Kurve L von S erstreckt, eine in (A) stetige Funktion vor.

Haben P und Q außerdem in $(\mathfrak{R})$ stetige partielle Ableitungen nach den Parametern, so ist die Differentiation unter dem Integralzeichen gestattet.

§ 2. Das Integral $\int Pdx + Qdy$. Erste Methode.

Diese Methode knüpft an den Satz der Integralrechnung an, wodurch ein Flächenintegral in ein Kurvenintegral verwandelt wird.

Im Innern eines Bereiches S, welchen wir vorläufig als mit einer einzigen Randkurve versehen[1]) voraussetzen wollen, seien zwei Funktionen $P(x, y)$, $Q(x, y)$ gegeben, welche nebst den beiden partiellen Ableitungen $\partial P/\partial y$ und $\partial Q/\partial x$ stetig sein sollen[2]), und man bilde das Kurvenintegral

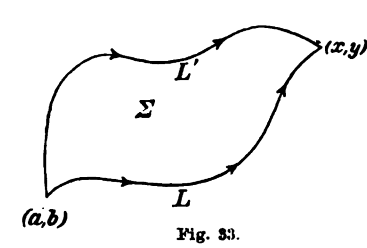


Fig. 33.

$$J = \int_{(a,\,b)}^{(x,\,y)} Pdx + Qdy.$$

Es drängt sich nun vor allem die Frage auf: *Wann hängt der Wert von J allein vom Punkte (x, y), nicht aber vom Integrationswege L ab?*

1) Ein solcher Bericht heißt *einfach zusammenhängend.* Allgemeiner hängt ein endlicher Bereich einfach zusammen, wenn sein Rand aus einem einzigen Stücke besteht. Diese Erklärung genügt für die Zwecke des vorliegenden Paragraphen. Hierüber vergleiche man ferner das 5. Kapitel, § 7.

2) Was die Stetigkeit am Rande von S anbetrifft, so steht uns frei entweder a) zu verlangen, daß P, Q nebst den genannten Ableitungen stetige Randwerte (vgl. 2. Kap., § 2) annehmen, wobei dann L im abgeschlossenen Be-

Seien L, L' zwei derartige Kurven, welche sich zunächst nur in ihren Endpunkten (a, b) und (x, y) treffen sollen. Aus diesen Kurven setzt sich dann eine einfache geschlossene Kurve C zusammen. Dementsprechend hat man

$$\int\limits_L Pdx + Qdy - \int\limits_{L'} Pdx + Qdy = \pm \int\limits_C Pdx + Qdy.$$

Hierin ist folgender Satz enthalten:

1. Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Kurvenintegral*

$$\int\limits_{(a,\,b)}^{(x,\,y)} Pdx + Qdy$$

allein von der Integrationsgrenze (x, y), *nicht aber vom Integrationswege* L *abhänge, besteht darin, daß das Kurvenintegral*

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = 0$$

sei, wobei C *jede beliebige einfache geschlossene reguläre Kurve des endlichen einfach zusammenhängenden Bereiches* S *bedeutet.*

Die Notwendigkeit der Bedingung erhellt sofort. Auch sieht man, daß sie für je zwei Kurven L, L' hinreicht, welche sich nur in ihren Endpunkten treffen. Begegnen sich dagegen L und L' sonst noch, so führe man eine dritte Kurve L'' ein, welche mit den beiden ersten nur in ihren Endpunkten zusammenstößt. Dann stimmen die Werte des Integrals, erstreckt über L und L'', überein, und ebenso die Werte des Integrals, erstreckt über L' und L''. Hiermit ist der Satz allgemein bewiesen.

Wir wenden uns jetzt zur Aufsuchung einer Bedingung für das Verschwinden des Kurvenintegrals

$$\int\limits_C Pdx + Qdy.$$

Nach dem Greenschen Satze[1]) ist

---

reiche S beliebig verlaufen darf; oder b) keine derartige Voraussetzung zu machen und dementsprechend den Weg L auf das Innere von S zu beschränken. Hierüber vergleiche man ferner die zweite Methode, § 3.

1) Vgl. Stolz, *Differential- und Integralrechnung*, Bd. 3. S. 94; Goursat, *Cours d'analyse*, Bd. 1, Kap. VI, Nr. 126. Literaturangaben finden sich in Kap. 13, § 1.

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dS = \int_{C} Q dy,$$

wobei das Flächenintegral über das Innere Σ von C, das Kurvenintegral in positivem Sinne längs des Randes C zu erstrecken ist. Ebenso hat man

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial y} dS = -\int_{C} P dx.$$

Hieraus folgt:

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dS = -\int_{C} P dx + Q dy.$$

Aus dieser Relation schließt man, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden des betreffenden Kurvenintegrals darin besteht, daß in jedem innern Punkte von S

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sei. Daß die Bedingung hinreicht, liegt ja auf der Hand. Sie ist aber auch notwendig. Würde nämlich die stetige Funktion

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

in einem innern Punkte M von S nicht verschwinden, so könnte man M mit einem Bereiche Σ umgeben, in welchem der Integrand durchweg einerlei Vorzeichen behalten würde, und dem Flächenintegrale müßte daher auch ein positiver bzw. negativer Wert zukommen, was gegen die Voraussetzung verstößt, daß das Kurvenintegral verschwinde.

Das Ergebnis sprechen wir, wie folgt, aus:

2. Satz. *Sei S ein endlicher einfach zusammenhängender Bereich der (x, y)-Ebene und seien $P(x, y)$, $Q(x, y)$ zwei Funktionen, die nebst den Ableitungen $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ in S stetig sind.*[1] *Dann besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden des Kurvenintegrals*

$$\int_{C} P dx + Q dy,$$

über jede beliebige einfache reguläre geschlossene Kurve des Bereiches S erstreckt, darin, daß in jedem innern Punkte von S

1) Man vergleiche die Anmerkungen auf S. 128.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

sei.

Unter der Voraussetzung, daß die Bedingungen des Satzes erfüllt sind, fassen wir nunmehr die Funktion

$$F(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P dx + Q dy$$

näher ins Auge. Dieselbe ist zunächst, unabhängig vom Integrationswege, in jedem Punkte von S eindeutig erklärt. Sie besitzt ferner stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, wie wir sogleich noch nachweisen wollen, und erweist sich hiermit auch als stetig, vgl. Kap. 2, § 3. Sei nämlich (x_0, y_0) ein beliebiger innerer Punkt von S und sei $(x_0 + \Delta x, y_0)$ ein zweiter nahe bei (x_0, y_0) gelegener Punkt von S. Dann ist

$$F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)$$

$$= \int_{(a,b)}^{(x_0 + \Delta x, y_0)} P dx + Q dy - \int_{(a,b)}^{(x_0, y_0)} P dx + Q dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0 + \Delta x, y_0)} P dx + Q dy,$$

da der von (a, b) nach $(x_0 + \Delta x, y_0)$ führende Weg ja durch (x_0, y_0) gehen darf. Außerdem darf man die Strecke $[(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0)]$ als geradlinig annehmen. So kommt

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_0 + \Delta x, y_0)} P dx + Q dy = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P(x, y_0)\, dx = P(x_0 + \theta \Delta x, y_0)\, \Delta x,$$

wo $0 < \theta < 1$ ist. Folglich ist

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x} = P(x_0, y_0).$$

Eine ähnliche Überlegung gilt auch für $\partial F / \partial y$. Hiermit wird man zum folgenden Resultate geführt.

3. Satz. *Die Funktion*

$$F(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P dx + Q dy$$

besitzt stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, *die durch die Formeln gegeben werden:*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Das vollständige Differential dieser Funktion hat den Wert[1])

$$dF = Pdx + Qdy.$$

§ 3. Fortsetzung; zweite Methode.

Die Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen setzen erstens voraus, daß die Randkurve von einer Parallelen zur x- sowie zur y-Achse höchstens in m Strecken und außerdem in m Punkten getroffen wird, wo m eine Konstante ist. Zweitens beruhen sie auf der *naiven* Anschauung, um einen Ausdruck des Herrn Klein zu gebrauchen, womit er solche geometrische Evidenz bezeichnet, welche zwar einleuchtet, sich aber auf die geometrischen Axiome nicht direkt, wenn überhaupt zurückführen läßt. Man nimmt nämlich beim Beweise des Greenschen Satzes über die Umformung von Doppelintegralen an, daß der Bereich Σ in eine endliche Anzahl einfacher Bereiche von einer bestimmten Art zerlegt werden kann. Drittens mußte, im Falle daß auch am Rande Stetigkeit herrschen sollte, außer der Stetigkeit von P und Q noch, wenn nicht die Existenz und Stetigkeit, so doch die Endlichkeit von P_y, Q_x verlangt werden. Endlich könnten wir noch auf die wieder in der Anschauung begründete Annahme aufmerksam machen, daß man die Punkte (a, b) und (x, y) durch eine L und L' nur in ihren Endpunkten treffende Kurve L'' verbinden könne, sowie daß eine einfache geschlossene Kurve die Ebene in einen äußeren und einen inneren Bereich teile.

Indem wir uns jetzt zu Betrachtungen hinwenden, welche an den soeben genannten Mängeln nicht leiden, legen wir unserer ganzen Beweisführung die Sätze vom 5. Kapitel, §§ 9, 10 zugrunde. Doch

---

1) Man pflegte wohl früher von der Bedingung zu reden, daß der Ausdruck $Pdx + Qdy$ ein *vollständiges Differential* sei, und der Sprachgebrauch hat sich noch bei den Physikern erhalten. Die Bedingung besteht darin, daß $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ sei. Unter dieser sehr unvollständigen Ausdrucksweise hat man eigentlich den ganzen Inhalt des gegenwärtigen Paragraphen zu verstehen.

Das Integral $\int Pdx + Qdy$ tritt schon bei Clairaut in einer physikalischen Untersuchung auf, *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743, p. 38. Bereits im Jahre 1740 hatte derselbe Mathematiker die Bedingung dafür gegeben, daß $Pdx + Qdy$ ein „vollständiges Differential" sei, nämlich die Bedingung: $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$; *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1740) S. 294. Er bemerkt auch, daß Fontaine und Euler diese Bedingung ebenfalls ermittelt haben, ibid., S. 294.

wollen wir vor allem unsere Aufgabe genau präzisieren. Sie besteht im Beweise der nachstehenden drei Sätze.

Satz A). *In einem Bereiche S seien P und Q zwei Funktionen, welche im Innern und am Rande von S stetig sind und im Innern stetige erste Ableitungen nach y bzw. x besitzen.*[1] *Sei ferner in jedem inneren Punkte von S*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dann ist

$$\int_C P dx + Q dy = 0,$$

wo das Integral über den ganzen Rand C von S in positivem Sinne zu erstrecken ist.

Satz B). *Den Voraussetzungen von Satz A) werde noch die weitere hinzugefügt, daß S einfach zusammenhänge. Wird dann das Integral*

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} P dx + Q dy$$

über eine beliebige in S gelegene reguläre Kurve erstreckt, so hängt der Wert des Integrals lediglich von den Integrationsgrenzen, nicht aber von der besonderen Wahl des Integrationsweges ab. Die dadurch definierte Funktion $F(x, y)$ ist im Innern und am Rande von S stetig, und innerhalb S gelten die Relationen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Der Beweis wird geführt, indem wir, an Arbeiten der Herren Pringsheim und Bôcher[2]) anknüpfend, Satz B) vorab für einen sogleich näher zu definierenden Bereich σ von normalem Typus (Fig. 34) begründen, woraus sich dann Satz A) für denselben Bereich sofort ergibt. Auf Grund des vorhin zitierten Satzes vom 5. Kapitel, § 9 erweist sich hierauf Satz A) auch im allgemeinen Falle

1) Die Randkurven von S wollen wir uns zunächst als geschlossen und im übrigen sich gegenseitig nicht schneidend denken. Von hier aus erhält man dann im Anschluß an den für allgemeine Bereiche S geltenden Satz von Kap. 5, § 9 leichte Verallgemeinerungen von Satz A).

2) Pringsheim, „Über den Cauchyschen Integralsatz", *Sitzungsber. d. k. bayer. Akad. d. Wiss.* 25 (1895), S. 39. Davon unabhängig Bôcher, *Bull. Am. Math. Soc.* (2) 2 (1896), S. 146.

als richtig. Um endlich Satz B) allgemein herzuleiten, breiten wir schrittweise, unter Benutzung des Satzes vom 5. Kapitel, § 10, eine Funktion $F(x, y)$ über den Bereich S aus, welche so bestimmt wird, a) daß sie sich eindeutig und stetig in S inkl. des Randes verhält und b) daß sie innerhalb S partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y zuläßt, wofür

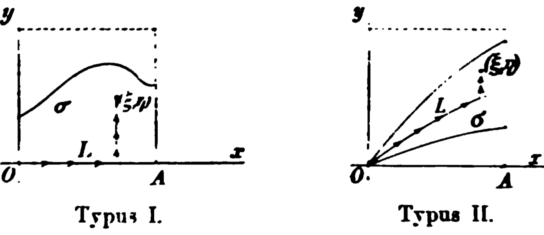
$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

ist. Hieraus erkennt man, daß

$$F(x, y) - F(a, b) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

ist, über was auch immer für eine die Punkte (a, b) und (x, y) miteinander verbindende Kurve integriert werden möge, und damit ist der Beweis fertig. Gehen wir jetzt zu den Einzelheiten des Beweises über.

Die Funktion $F(x, y)$ im Bereich σ. Vorerst handelt es sich also um den Beweis von Satz B) für einen Bereich σ, wie er in



Typus I. Typus II.

Fig. 34.

Kap. 5, § 9, definiert wird. Dabei genügt es, den Beweis für die ursprüngliche Orientierung der Bereiche σ zu liefern, denn der Satz bleibt bestehen, wie man sofort nachrechnet, wenn man irgend eine der dort zur Erweiterung des Bereiches σ angewandten Transformationen ausführt. Wir wollen den Beweis also zuerst für Typus I durchführen. Im übrigen sollen hier P_y, Q_x in den Randpunkten $y = 0$, $0 < x < A$ stetig sein.

In den Punkten von σ werde eine Funktion $F(x, y)$, wie folgt, erklärt. Sei (ξ, η) ein innerer Punkt von σ und man fasse die den Punkt $(0, 0)$ mit diesem Punkte verbindende Linie

$$L: \quad \left.\begin{matrix} 0 \leqq x \leqq \xi \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x = \xi \\ 0 < y \leqq \eta \end{matrix}\right\}$$

ins Auge. Dann definiere ich die Funktion $F(x, y)$ zunächst für solche Punkte durch die Gleichung:

$$F(\xi, \eta) = \int_{(0,0)}^{(\xi,\eta)} P dx + Q dy,$$

wo das Integral über L zu erstrecken ist. Wir wollen zeigen, daß $F(\xi, \eta)$ in jedem inneren Punkte von σ eine Ableitung nach η, sowie nach ξ besitzt. Zu dem Zwecke schreiben wir F in der Form:

$$F(\xi, \eta) = \int_0^\xi P(x, 0)\, dx + \int_0^\eta Q(\xi, y)\, dy.$$

Dann findet man:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta), \qquad \frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, 0) + \int_0^\eta Q_x(\xi, y)\, dy.$$

Dabei ist die Differentiation unter dem Integralzeichen nach dem ersten Kriterium vom 3. Kapitel, § 8 gestattet.

Das letzte Integral läßt sich noch wegen der Relation $Q_x = P_y$ auswerten:

$$\int_0^\eta Q_x(\xi, y)\, dy = \int_0^\eta P_y(\xi, y)\, dy = P(\xi, \eta) - P(\xi, 0).$$

Hiermit erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta).$$

Jetzt knüpfen wir an die Entwicklungen von Kap. 2, § 3 an. Nach der 3. Aufgabe erweist sich $F(x, y)$ als stetig am Rande von σ, und $F(x, y)$ werde nunmehr daselbst durch die Randwerte definiert, womit denn alle die Bedingungen des letzten Satzes jenes Paragraphen erfüllt sind. Wir schließen daraus, daß das Integral

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} P dx + Q dx,$$

über eine beliebige reguläre die Punkte (a, b) und (x, y) miteinander verbindende Kurve von σ erstreckt, mit dem Integral

$$\int_0^l (F_x \varphi' + F_y \psi')\, ds = \int_0^l \frac{d}{ds} F(\varphi, \psi)\, ds,$$

(wir behalten ja die Bezeichnungsweise des früheren Paragraphen

bei,) über die nämliche Kurve erstreckt, identisch ist, und daher ist

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} P dx + Q dy = F(x, y) - F(a, b).$$

Für Typus II tritt nun folgende Modifikation des Beweises ein. Als Kurve L wollen wir jetzt die Linie nehmen:

$$L: \quad \left.\begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq \xi, \\ y = \omega(x); \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} x = \xi, \\ \omega(\xi) < y \leqq \eta \text{ resp. } \eta \leqq y < \omega(\xi), \end{array}\right\}$$

wo $\omega(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + \varphi(x)\}$ ist. Dann wird $F(\xi, \eta)$ als das über L erstreckte Integral von $Pdx + Qdy$ definiert, also ist

$$F(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} [P + Q y'] dx + \int_{\omega(\xi)}^{\eta} Q dy$$

$$= \int_0^{\xi} [P(x, \omega(x)) + Q(x, \omega(x))\, \omega'(x)] dx + \int_{\omega(\xi)}^{\eta} Q(\xi, y) dy.$$

Hieraus folgt zunächst, wie früher:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta).$$

Dagegen ist jetzt nach dem zweiten Kriterium von Kap. 3, § 8:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \omega(\xi)) + Q(\xi, \omega(\xi))\, \omega'(\xi) + \int_{\omega(\xi)}^{\eta} Q_x(\xi, y)\, dy - Q(\xi, \omega(\xi))\, \omega'(\xi).$$

Hier heben sich der zweite und der vierte Term auf, das Integral wird, wie vorhin, ausgewertet:

$$\int_{\omega(\xi)}^{\eta} Q_x(\xi, y)\, dy = \int_{\omega(\xi)}^{\eta} P_y(\xi, y)\, dy = P(\xi, \eta) - P(\xi, \omega(\xi)).$$

Es ergibt sich somit auch in diesem Falle, daß im Innern von σ

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta)$$

ist. Von hier ab bleibt die frühere Schlußweise noch in Kraft.[1])

---

1) Wir wollen doch noch darauf aufmerksam machen, daß der Fall von Ecken und Spitzen auch ohne Benützung von Bereichen σ von Typus II mit Leichtigkeit direkt erledigt werden kann. Dazu wird man die Ecken und Spitzen zunächst durch kurze Übergangskurven ausschneiden, welche den Rand in der

Beweis von Satz A). Aus dem hiermit erhaltenen Resultate ergibt sich zunächst Satz A) für einen Bereich σ unter der genannten Einschränkung. Dazu braucht man nur die Punkte (x, y), (a, b) in ein und denselben Randpunkt zu legen und dann als Verbindungslinie den ganzen Rand zu nehmen.

Um den Satz jetzt allgemein zu beweisen, wird man den Bereich S nach Kap. 5, § 9 in Bereiche σ zerlegen, um jeden dieser Bereiche herumintegrieren, und die also erhaltenen Integrale zusammenaddieren. Einerseits hat dann nach dem Vorhergehenden jedes dieser Integrale und somit auch ihre Summe den Wert 0. Andererseits heben sich die von den innerhalb S gelegenen geradlinigen Begrenzungsstücken herrührenden Bestandteile der Integrale gegenseitig auf,

$$\int_0^l (P \sin \nu - Q \cos \nu)\, ds = -\int_0^l (P \sin \nu' - Q \cos \nu')\, ds,$$

wo ν, ν' sich auf die inneren Normalen beziehen und $\nu' = \nu + \pi$ ist. Was an jener Gesammtsumme noch überbleibt, macht nun gerade dasjenige Integral aus, um dessen Verschwinden es sich handelt.

Beweis von Satz B). Nach dem Satze vom 5. Kapitel, § 10, läßt sich der einfach zusammenhängende Bereich S des zu beweisenden Satzes in eine endliche Reihe einfach zusammenhängender Bereiche S_i $(i = 1, \ldots, N)$ entwickeln, wobei $S_1 = \sigma_1$, $S_N = S$ und $S_i - S_{i-1} = \sigma_i$, $i > 1$, ist. Sei (a, b) ein beliebiger Punkt von S und σ_1 derjenige Bereich σ, in welchem (a, b) liegt. Nach den vorausgeschickten Entwicklungen gilt Satz B) sodann zunächst für den Bereich $S_1 = \sigma_1$. Durch den Schluß von n auf $n + 1$ wollen wir nun zeigen, daß er auch für die weiteren Bereiche $S_2, \ldots, S_N = S$ bestehen bleibt. Nehmen wir also an, er gelte für $S_1, \ldots, S_n$, $n < N$, so handelt es sich nur noch um den Nachweis, daß er für S_{n+1} ebenfalls richtig ist. Nun

---

Nähe der betreffenden Ecke oder Spitze berühren. Für den also erhaltenen Bereich S' gilt dann zufolge der nachstehenden Entwicklungen sowohl Satz A) als Satz B). Beschränken wir uns auf Satz B). Durch das Integral $\int_{(a,b)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$ wird also zunächst eine in allen Punkten von S mit Ausnahme der Ecken und Spitzen eindeutige stetige Funktion $F(x, y)$ definiert, wofür außerdem im Innern von S

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

ist. Nach Kap. 2, § 3 wird dann $F(x, y)$ auch in den Ausnahmepunkten stetig und gleich dem Integrale sein.

stößt aber σ_{n+1} längs eines einzigen innerhalb S gelegenen, aus einer, zwei oder drei geraden Strecken bestehenden Randbogens an S_n. Sei C der Wert der bisher erst über S_n ausgebreiteten Funktion $F(x, y)$ in einem Punkte (X, Y) dieses Randes und man breite ferner auf Grund des vorhin erlangten Resultates die Funktion

$$C + \int_{(X, Y)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

über σ_{n+1} aus, wobei der Integrationsweg aus σ_{n+1} nicht austreten darf. Alsdann schließt sich diese neue Funktion längs der ganzen gemeinsamen Begrenzung von S_n und σ_{n+1} an $F(x, y)$ stetig an und ergänzt $F(x, y)$ somit, da sich ja auch die Ableitungen erster Ordnung daselbst stetig anschließen, zu einer im Bereiche S_{n+1} allen Forderungen von Satz B) genügenden Funktion. — Hiermit ist der Beweis von Satz B) erbracht.

Zum Schluß fügen wir noch den zu den Sätzen A) und B) umgekehrten Satz C) hinzu.

Satz C). *Unter Beibehaltung der Stetigkeitsvoraussetzungen von Satz* A) *verlangen wir jetzt, entweder*

a) *daß*

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0$$

sei, wo Γ eine beliebige einfache reguläre geschlossene Kurve ist, welche nur innere Punkte von S in ihrem Innern birgt; oder

b) *daß der Wert des Integrals*

$$J = \int_{(a, b)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

nur von den Integrationsgrenzen, nicht aber vom Integrationswege abhänge.[1]) *Alsdann wird in jedem innern Punkte von S die Relation gelten:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

1) Den zweiten Teil b) des Satzes kann man im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche allgemeiner aussprechen, indem man nur verlangt, daß der Wert des Integrals J für je zwei Kurven $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ gleich ausfällt, welche zusammengenommen eine einfache, keinen Randpunkt von S im Innern umfassende Kurve $\mathfrak{C}$ bilden. Hierüber vergleiche man ferner § 4.

Auch die Voraussetzung a) kann durch eine engere ersetzt werden, indem man sich auf Rechtecke Γ beschränkt, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel verlaufen; vgl. den erweiterten Moreraschen Satz, Kap. 7, § 5.

Der Beweis des zweiten Teils b) des Satzes ist im wesentlichen bereits am Ende des vorhergehenden Paragraphen geliefert. Denn dort hat man ja unter denselben Hypothesen wie die gegenwärtigen gezeigt, und zwar nach einer auch hier als befriedigend anzusehenden Methode, daß

$$\frac{\partial J}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = Q$$

ist. Auf dieses Resultat braucht man also nur noch den Satz anzuwenden, daß

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y}$$

ist.

Um nun auch den ersten Teil des Satzes zu beweisen, sei (x', y') ein beliebiger innerer Punkt von S, und man konstruiere ein Quadrat:

$$\alpha \leqq x \leqq \alpha + h, \qquad \beta \leqq y \leqq \beta + h,$$

welches (x', y') im Innern enthält und im übrigen ganz innerhalb S liegt. In diesem Quadrat definiere man dann eine Funktion $F(\xi, \eta)$ genau so, wie im vorhergehenden:

$$F(\xi, \eta) = \int_\alpha^\xi P(x, \beta)\,dx + \int_\beta^\eta Q(\xi, y)\,dy.$$

Dann findet man sofort, daß

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta)$$

ist. Die Funktion $F(\xi, \eta)$ läßt sich aber auch nach den Voraussetzungen des Satzes, wie folgt, darstellen, indem man über den anderen in der Figur angedeuteten Weg L' integriert:

$$F(\xi, \eta) = \int_\beta^\eta Q(\alpha, y)\,dy + \int_\alpha^\xi P(x, \eta)\,dx.$$

Fig. 35.

Demgemäß ist

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Hängt S mehrfach zusammen, so bezeichne man die äußere Randkurve mit C_n, die übrigen mit $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Wir können dann den folgenden Zusatz aussprechen.

Zusatz. *Unter Beibehaltung der Voraussetzungen von Satz* A) *sei* $\mathfrak{C}_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ *eine einfache reguläre geschlossene Kurve des*

Bereiches S, welche C_i umfaßt, die übrigen Kurven C_j $(j \neq i)$ aber ausschließt. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{C}_i} P dx + Q dy = \int_{C_i} P dx + Q dy,$$

wo beide Integrale in positiver Richtung über ihre respektiven Kurven zu erstrecken sind.

In der Tat bilden C_i und $\mathfrak{C}_i$ zusammengenommen die vollständige Begrenzung eines ringförmigen Bereiches Σ, vgl. Kap. 5, § 7, 2. Satz. Erstreckt man das Integral in positiver Richtung (Kap. 5, § 8) über den Rand $\mathfrak{C}$ von Σ, so kommt:

$$0 = \int_{\mathfrak{C}} P dx + Q dy = \int_{\mathfrak{C}_i} P dx + Q dy - \int_{C_i} P dx + Q dy,$$

was zu beweisen war.

Wir erwähnen noch an dieser Stelle eine zweite Form des Ergebnisses von Satz A), nämlich:

$$\int_{C_n} P dx + Q dy = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{C_i} P dx + Q dy. \tag{2}$$

Um verwandte Dinge nicht voneinander zu trennen, setzen wir hierher noch ein mit Satz B) verbundenes Theorem, dessen Beweis freilich erst in Kap. 5, § 10 erfolgen kann.

Satz B′). *Im Innern eines beliebigen im Endlichen gelegenen*[1] *einfach zusammenhängenden Bereichs T seien P, Q stetige mit stetigen partiellen Ableitungen $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ versehene Funktionen, und sei ferner*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Wird dann das Integral

$$\int_{(a,\, b)}^{(x,\, y)} P dx + Q dy$$

über eine beliebige in T gelegene reguläre Kurve erstreckt, so hängt der Wert des Integrals lediglich von den Integrationsgrenzen, nicht aber von der besonderen Wahl des Integrationsweges ab. Die dadurch definierte Funktion $F(x, y)$ ist in T stetig, und außerdem ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

1) Allgemeiner darf sich T ins Unendliche erstrecken, sofern der Rand, falls einer überhaupt vorhanden ist, nur nicht ganz im Endlichen liegt. Hier handelt es sich selbstverständlich um die erweiterte Definition eines einfach zusammenhängenden Bereiches, Kap. 5, § 7.

§ 4. Mehrfach zusammenhängende Bereiche.[1]

Den Satz B) haben wir bloß für den Fall ausgesprochen, daß der Bereich S eine einzige Randkurve besitzt. In der Tat braucht er sonst nicht richtig zu sein. Sei beispielsweise

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

während S aus dem Kreisringe

$$0 < a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2$$

besteht. Alsdann geht das Integral

$$J = \int_{(a,\,0)}^{(x,\,y)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

durch Einführung neuer Variabelen:

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta$$

einfach in

$$J = \int_{(a,\ )}^{(r,\,\theta)} d\theta = \theta$$

über. Erstreckt man es mithin über einen geschlossenen Weg, der den Anfangspunkt in positivem Sinne einmal umkreist, so kommt nicht 0, sondern 2π dabei heraus.

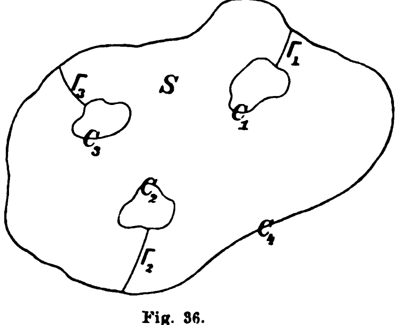


Fig. 36.

Allgemein sei S ein regulärer Bereich, welcher von n einfachen regulären geschlossenen einander nicht treffenden Kurven begrenzt wird. Dann liegen $n-1$ dieser Kurven $C_1, \ldots, C_{n-1}$ innerhalb der letzten C_n und zugleich außerhalb einander. Vermöge $n-1$ *Querschnitte*, also Kurven, welche zwei Randpunkte von S miteinander verbinden und sonst innerhalb S verlaufen, kann man S in einen einfach zusammenhängenden Bereich S' verwandeln, und zwar kann das auf mannigfache Weise geschehen.

1) In diesen Paragraphen stützen wir uns wieder, wie in § 2, auf die Anschauung. Wegen einer arithmetischen Behandlung der in Betracht kommenden geometrischen Tatsachen wird auf das 5. Kapitel hingewiesen.

Dabei denken wir uns die Querschnitte als dehnbare Fäden, welche innerhalb S beliebig verschoben werden können, ohne jedoch miteinander in Kollision geraten zu dürfen. Hiernach sehen wir auch zwei verschiedene Querschnittsysteme als äquivalent an, wenn das eine durch eine geeignete Verschiebung in das andere übergeführt werden kann. Der Bestimmtheit halber soll Γ_i den Rand C_i mit C_n verbinden.[1])

Wir ziehen ferner das Integral

$$\int Pdx + Qdy$$

in Betracht, wobei P und Q den Bedingungen von Satz A), § 3 genügen sollen. Aus dem soeben angeführten Beispiel erhellt, daß im allgemeinen zu erwarten steht, daß

$$\omega_i = \int\limits_{C_i} Pdx + Qdy \tag{1}$$

nicht verschwindet. Sei $\mathfrak{C}_i$ eine einfache reguläre geschlossene Kurve des Bereiches S, welche C_i umfaßt, dagegen C_j $(j \neq i)$ ausschließt. Wir wollen uns diese Kurve wieder als eine dehnbare Schleife denken, welche in S beliebig verschoben werden kann, wobei dann die Kurven $C_1, \ldots, C_n$ Hindernisse vorstellen, über welche $\mathfrak{C}_i$ nicht hinaus kann. Nach dem Zusatze von § 3 haben wir dann

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_i} Pdx + Qdy = \omega_i, \tag{2}$$

wo sowohl das Integral (1) als das Integral (2) in positivem Sinne über die jeweilige Kurve zu erstrecken ist, vgl. § 1, gegen Ende.

Wir wenden uns jetzt zum Hauptgegenstande dieses Paragraphen, — dem Verhalten des Integrals

$$J = \int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy \tag{3}$$

in einem mehrfach zusammenhängenden Bereiche S. Das Integral stellt nun im allgemeinen keine eindeutige Funktion mehr vor. Untersuchen wir, in welcher Weise die Werte der Funktion zu eindeutigen Zweigen zusammengefaßt werden können. Dazu wollen wir S vorab

---

1) Hierdurch wird zwar das Querschnittsystem noch nicht eindeutig bestimmt. Indessen genügt ein besonderes derartiges System, um zu Anfang unnütze Allgemeinheit zu vermeiden.

mittels eines der besonderen vorhin besprochenen Querschnittsysteme $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ in einen einfach zusammenhängenden Bereich S' verwandeln, um darauf den Integrationsweg für das Integral (3) auf S' zu beschränken.[1]) Alsdann stellt sich heraus, daß sich die Werte von J in zwei einander gegenüberliegenden Punkten ein und desselben Querschnitts Γ_i stets um die gleiche Größe ω_i voneinander unterscheiden. Denn diese Punkte können ja durch eine Γ_i sonst nicht treffende Kurve $\mathfrak{C}_i$ miteinander verbunden werden. Veranschaulicht man sich nun die auf besagte Weise in S' eindeutig erklärte Funktion J durch eine im Raume gelegene Fläche

$$z = J_0(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} P dx + Q dy \tag{4}$$

und verschiebt man diese Fläche parallel zur z-Achse einmal um ω_i, dann aber um $-\omega_i$, so kommen dadurch stetige Fortsetzungen der Funktion (4) über den einen, sowie über den anderen Rand des Querschnittes Γ_i hinaus zu Stande. Hiermit schließen sich nämlich an den ursprünglichen Mantel $z = J_0(x, y)$ zwei neue Mäntel

$$z = J_0(x, y) + \omega_i, \qquad z = J_0(x, y) - \omega_i$$

längs derjenigen beiden Ränder jenes Mantels stetig an, welche über der Kurve Γ_i im Raume verlaufen. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Anhängens neuer Mäntel entsteht sonach eine stetige Fläche,

$$z = J(x, y),$$

welche von einer Parallelen zur z-Achse unendlich oft getroffen wird[2]) und den Gesamtverlauf der Funktion $J(x, y)$ vorstellt.[3])

Hiernach läßt sich eine beliebige Bestimmung der Funktion J in der Gestalt ausdrücken:

---

1) Insbesondere darf der Integrationsweg teilweise mit einem Querschnitte Γ_i zusammenfallen, er darf aber diese Kurve nicht überschreiten. Es ist bequem, die Querschnitte als schmale Lücken im Bereiche S, etwa als Kanäle aufzufassen, um dann zwischen den beiden einander gegenüberliegenden Ufern derselben zu unterscheiden. Demnach darf man also noch längs eines Ufers integrieren, man darf aber den Kanal nicht passieren.

2) Sofern nicht insbesondere alle $\omega_i = 0$ sind. — Die Fläche kann sich im übrigen durchsetzen.

3) Im Falle des zu Anfang des Paragraphen erwähnten Beispiels ist die Gleichung dieser Fläche

$$z = \theta, \quad \text{wo} \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

$$J(x, y) = J_0(x, y) + \alpha_1 \omega_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \omega_{n-1},$$

wo die α_i ganzzahlige Werte haben. Dabei denkt man sich $J_0(x, y)$ jedesmal an dem einen Ufer eines Querschnitts erklärt, aber nicht an dem gegenüberliegenden.

Insbesondere folgt daraus, daß der Wert des Integrals

$$\int^{*} P dx + Q dy,$$

über eine beliebige geschlossene Kurve des Bereiches S erstreckt, den Wert

$$\alpha_1 \omega_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \omega_{n-1}$$

haben muß, wo die α_i ganzzahlig sind. — Die Größen $\omega_1, \ldots \omega_{n-1}$ heißen *Periodizitätsmoduln.*

Gehen wir jetzt zu einer beliebigen Zerlegung des Bereichs S in einen einfach zusammenhängenden Bereich mittels der Querschnitte $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_{n-1}'$. Wird mit $J_0'(x, y)$ diejenige eindeutige Funktion bezeichnet, welche durch das Integral (3) unter Beschränkung des Integrationsweges auf diesen Bereich definiert wird, so unterscheiden sich auch seine Werte an verschiedenen Seiten eines Querschnittes Γ_i' stets um die gleiche Größe ω_i', und zwar ist

$$\omega_i' = \alpha_1^{(i)} \omega_1 + \cdots + \alpha_{(n-1)}^{(i)} \omega_{n-1}.$$

Die zweite Behauptung erhellt schon daraus, daß die beiden betreffenden Uferpunkte durch eine geschlossene, Γ_i' sonst nicht treffende Kurve $\mathfrak{C}'$ des Bereichs S miteinander verbunden werden können. Betrachtet man ferner ein zweites Paar von Uferpunkten desselben Querschnitts Γ_i', so lassen sich diese offenbar durch eine zweite, Γ_i' sonst nicht treffende Kurve $\mathfrak{C}''$ miteinander verbinden, derart daß $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ die vollständige Begrenzung eines ringförmigen in S gelegenen Bereiches bilden. Auf diesen Bereich wende man nun den Zusatz von § 3, Ende an, indem man C_i und $\mathfrak{C}_i$ resp. mit den beiden Randkurven $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$ identifiziert. Hiermit ergibt sich die erste Behauptung.[1])

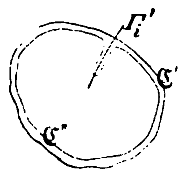


Fig. 37.

1) Ein zweiter Beweis verläuft so. Die beiden in Betracht kommenden Werte von $J'(x, y)$ an verschiedenen Seiten von Γ_i' fallen ja mit Werten von $J(x, y)$ in diesem Punkte zusammen und unterscheiden sich deshalb schon voneinander um eine Größe von besagter Gestalt. Läßt man nun jenen Punkt (x, y) die Kurve Γ_i' stetig durchlaufen, so muß sich die in Rede stehende Differenz stetig ändern. Da die Koeffizienten $\alpha_j^{(i)}$ aber stets ganzzahlig ausfallen müssen, kann die bewußte Summe nur eine abzählbare Menge verschiedener Werte annehmen, und daher vermag sie überhaupt nicht vom ursprünglichen Werte zu weichen.

Ähnlich wie im Falle der obigen speziellen Zerschneidung wird auch hier der Gesamtverlauf der Funktion J durch die Formel gegeben:

$$J(x, y) = J_0'(x, y) + \alpha_1'\omega_1' + \cdots + \alpha_{n-1}'\omega_{n-1}',$$

wo die α_i' ganzzahlige Werte haben. Insbesondere folgt hieraus, daß

$$\omega_i = \alpha_1'^{(i)}\omega_1' + \cdots + \alpha_{n-1}'^{(i)}\omega_{n-1}'$$

ist, wo die $\alpha_j'^{(i)}$ ganzzahlig sind.

Aufgabe. Seien P und Q zwei Funktionen, welche in einem Bereiche S allen in Satz A) an diese Funktionen gestellten Anforderungen genügen. Überdies sei (ξ_i, η_i) ein innerhalb der Kurve C_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ gelegener Punkt. Man zeige, daß die Koeffizienten $c_1, \cdots, c_{n-1}$ dann stets so bestimmt werden können, daß die Funktion

$$F(x, y) = J(x, y) - c_1 \operatorname{arc\,tan} \frac{y - \eta_1}{x - \xi_1} - \cdots - c_{n-1} \operatorname{arc\,tan} \frac{y - \eta_{n-1}}{x - \xi_{n-1}} =$$

$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} \left(P + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i(y - \eta_i)}{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2} \right) dx + \left(Q + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-c_i(x - \xi_i)}{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2} \right) dy$$

in S eindeutig wird, so daß sich also J in der Form darstellen läßt:

$$J(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \operatorname{arc\,tan} \frac{y - \eta_i}{x - \xi_i} + F(x, y),$$

wo $F(x, y)$ in S eindeutig und stetig ist und stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt.

Fünftes Kapitel.

Mengenlehre.

Einer Funktion mehrerer reellen Veränderlichen, sowie einer Funktion einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen liegt ein Stück eines n-dimensionalen Raumes als Definitionsbereich zugrunde. Dieser Bereich kann sowohl durch explizite Angabe seiner Punkte, — z. B. durch eine Ungleichung, etwa im Falle $n = 2$

$$x^2 + y^2 < a^2,$$

— als auch vermöge impliziter Forderungen bestimmt werden. Zur Erläuterung letzterer Bestimmungsweise diene der Bereich einer Ebene, welcher aus dem Inneren einer geschlossenen Kurve besteht. Die Behandlung der Funktion erfordert die Zerlegung des Definitionsbereiches — bleiben wir noch bei $n = 2$ — vermöge Kurven, welche darin gezogen werden. Hierzu, sowie zur zweiten Bestimmungsweise jenes Bereiches benötigt man eine Reihe von Sätzen aus der Analysis situs, deren Richtigkeit zwar aus Anschauungs- und Analogiegründen schon einleuchtet, deren strenge Begründung aber — sei es auf arithmetischem, sei es auf geometrischem Wege — spezielle Untersuchungen erheischt. Die ersten zehn Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels sind einer arithmetischen Behandlung dieser Sätze gewidmet. Wegen des durchaus speziellen Charakters des Gegenstandes wird der Leser, welcher jetzt zum ersten Male an die Funktionentheorie herantritt, gut tun, die Beweise zu übergehen und sich bloß die Definitionen und die Sätze zu merken.

Hieran schließt sich noch eine Besprechung einiger weiterer Begriffe und Sätze aus der Mengenlehre, welche namentlich durch zahlreiche zur Erläuterung dienende Beispiele den Leser mit wichtigen Auffassungen der modernen Funktionentheorie bekannt machen, sowie ihn in den Stand setzen soll, die einschlägige Literatur leichter zu verfolgen.

Nachdem sich der Leser die Entwicklungen dieses Kapitels zu eigen gemacht hat, wird es ihm von Nutzen sein, dem ersten Teil

von C. Jordan, *Cours d'analyse*, Bd. 1, 2. Aufl., 1893, eine Lektüre zu widmen. Wegen der Literatur der Mengenlehre sei auf A. Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 8, 1900 verwiesen, woselbst auch die hauptsächlichsten Sätze dieser Theorie in übersichtlicher Weise zusammengestellt sind.

§ 1. Kurven.

a) *Jordansche Kurven.* Vom Standpunkte der Funktionentheorie aus, wenn es sich um die Arithmetisierung des Bereichs der unabhängigen Variabelen handelt, ist eine Kurve als eine Punktmenge aufzufassen. Die allgemeinste Klasse von einfachen Kurven, welche wir auch mit dem Namen Jordanschen Kurven[1]) belegen wollen, wird durch folgende Definition eingeführt: Unter einer ***Jordanschen Kurve*** versteht man eine Punktmenge $C = \{(x, y)\}$, deren Elemente (x, y) ein-eindeutig und stetig auf das eindimensionale Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$, sofern C nicht geschlossen, auf die Punkte des Kreises

$$(1) \qquad \xi = \cos \lambda t, \qquad \eta = \sin \lambda t,$$

falls C geschlossen sein soll, abgebildet werden können.[2]) Analytisch heißt das, daß

$$(2) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

ist, wo $f(t)$ und $\varphi(t)$ stetige Funktionen von t sind, welche im ersten Falle für alle Punkte des genannten Intervalls $t_0 \leqq t \leqq t_1$ eindeutig erklärt sind. Im zweiten Falle sind diese Funktionen für alle Werte von t definiert, sie lassen ferner die primitive[3]) Periode $\omega = 2\pi/\lambda$ zu. Überdies besitzen die beiden Gleichungen

$$x' = f(t), \qquad y' = \varphi(t),$$

---

1) Nach C. Jordan, welcher diese Kurven eingehend untersucht hat; *Cours d'analyse*, Bd, 1, 2. Aufl., 1893, S. 90.

2) Diese Formulierung der Jordanschen Definition rührt von A. Hurwitz her, Züricher Vortrag, 1897, *Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig, 1898, S. 102. Was die Stetigkeit anbetrifft, so verlangt Hurwitz, daß beim Grenzübergange $\lim t = \bar{t}$ der Bildpunkt (x, y) einer Grenzlage $(\bar{x}, \bar{y})$ zustreben soll, und zwar soll $(\bar{x}, \bar{y})$ eben derjenige Punkt von C sein, welcher $\bar{t}$ entspricht. Daraus schließt man leicht, daß, wenn umgekehrt $(\bar{x}, \bar{y})$ die einzige Häufungsstelle einer beliebigen Teilmenge $\{x_i, y_i\}$ von C ist, $\lim t_i = \bar{t}$ vorhanden ist, sowie daß der Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ dann dem Punkte $\bar{t}$ entspricht und somit zu C gehört. Hiernach ist auch C abgeschlossen und perfekt.

3) D. h. jede Periode ist ein ganzzahliges Vielfaches von ω.

wo (x', y') ein beliebiger Punkt von C ist, im ersten Falle nur eine einzige Lösung $t = t'$, im zweiten Falle nur solche Lösungen, welche sich um Perioden voneinander unterscheiden.

Umgekehrt definieren die Gleichungen (2), sofern $f(t)$ und $\varphi(t)$ den genannten Bedingungen genügen, eine einfache Kurve.[1])

Zu beachten ist, daß die obige Definition keine besondere Zuordnung der Punkte von C den Punkten t bevorzugt. Im übrigen deckt sich die Gesamtheit aller möglichen Zuordnungen, wie man leicht zeigt, mit der Gesamtheit der Transformationen

$$\tau = \chi(t), \tag{3}$$

wo χ eine eindeutige stetige monotone, in keinem Intervalle konstante Funktion von t ist. Dabei spielen im Falle einer nicht-geschlossenen Kurve zwei Punkte derselben, nämlich die Endpunkte, eine ausgezeichnete Rolle, indem sie stets dem größten und dem kleinsten Werte von τ entsprechen. Dieses Punktepaar bleibt also invariant gegenüber den Transformationen (3).

Eine zweite invariante Eigenschaft einer nicht-geschlossenen Kurve besteht in der Anordnung dreier Punkte P, Q, R derselben. Wir sagen, Q liegt *zwischen* P und R, wenn entweder $t_P < t_Q < t_R$ oder $t_R < t_Q < t_P$ ist. Wie man sieht, liegt von drei Punkten stets einer zwischen den beiden anderen. Nach Ausführung von (3) liegt dann der transformierte jenes mittleren Punktes wieder zwischen den beiden anderen transformierten. — Im Falle einer geschlossenen Kurve liefert erst die Anordnung von vier Punkten eine Invariante.

b) *Reguläre Kurven.* Es hat gewiß begrifflichen Wert, die Kurven so in die Analysis einzuführen, wie wir es soeben getan. Glücklicherweise braucht man aber nicht den bisherigen Grad der Allgemeinheit hinfort beizubehalten, es genügt vielmehr für die allermeisten Zwecke der Analysis, wenn man sich auf eine besondere Klasse von Kurven beschränkt, welche der gewohnten Anschauung entsprechen und als regulär bezeichnet werden. Wir haben solche

---

1) Bekanntlich können die Gleichungen (2), sofern man nur verlangt, daß $f(t)$ und $\varphi(t)$ eindeutig und stetig seien, eine Abbildung der Strecke $0 \leq t \leq 1$ auf das volle Quadrat $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ definieren. Eine derartige Abbildung ist indessen nicht umkehrbar eindeutig. Man vergleiche Peano, *Math. Ann.*, Bd. 36 (1890) S. 157; Hilbert. *ebenda*, Bd. 38 (1891), S. 459; Moore, *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 1 (1900), S 72.

Der äußere Flächeninhalt (vgl. § 12) einer Jordanschen Kurve braucht nicht gleich 0 zu sein. Cf. Osgood, „A Jordan curve of positive area", *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 4 (1903), S. 107.

Kurven bereits von der Anschauung aus in Kap. 2, § 2 definiert, und die Definition dann noch erhärtet. Im Anschluß an die gegenwärtige arithmetische Auffassungsweise soll jene Definition noch einmal hergesetzt werden.

Eine einfache Kurve möge *glatt* heißen, wenn sie eine überall stetig sich drehende Tangente besitzt, d. h. wenn sie sich so auf die Strecke $t_0 \leq t \leq t_1$ resp. auf den Kreis (1) abbilden läßt, daß die entsprechenden Funktionen $f(t)$, $\varphi(t)$ ausnahmslos stetige Ableitungen besitzen und daß überdies für jeden in Betracht kommenden Wert von t

$$f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 > 0 \tag{4}$$

ist. Nach der früheren Terminologie deckt sich also die Definition von *glatt* mit derjenigen eines *regulären Kurvenstückes*, Kap. 2, § 2.

Eine *reguläre Kurve* entsteht, indem man eine endliche Anzahl nicht-geschlossener glatter Kurven stetig aneinander reiht. Wegen der analytischen Darstellung derselben wird auf Kap. 2, § 2 verwiesen.

Eine reguläre Kurve kann sowohl einfach sein als auch mehrfache Punkte enthalten, ja diese können sogar in unendlicher Anzahl auftreten. Man denke etwa an die aus den beiden glatten Kurven a) und b) zusammengesetzte Kurve:

a)
$$\begin{cases} x = t, & -T < t \leq T, \\ y = t^3 \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0; \end{cases} \qquad y = 0,\ t = 0.$$

Hierbei ist $T = 1/k\pi$ ($k =$ einer natürlichen Zahl) zu nehmen.

b)
$$\begin{cases} x = 2T - t, & T < t \leq 3T, \\ y = 0. \end{cases}$$

Fallen zwei Bestandteile einer regulären Kurve längs eines ganzen Bogens zusammen, so kann man, ähnlich wie bei den Riemannschen Flächen (man vgl. den zweiten Abschnitt), auch hier Riemannsche Elemente einführen.

Von grundlegender Bedeutung ist der folgende leicht zu beweisende

Satz. *Eine reguläre Kurve läßt sich stets in eine endliche Anzahl von Teilbogen zerlegen, deren jeder in der Gestalt dargestellt werden kann:*

$$y = F(x), \quad \text{resp.} \quad x = \Phi(y),$$

wobei $F(x)$ resp. $\Phi(y)$ eindeutig und nebst der ersten Ableitung stetig ist

Wir werden später die Definition noch auf den Fall ausdehnen, daß die Kurve sich ins Unendliche erstreckt, indem wir dann verlangen, daß sie im Endlichen regulär verlaufe und eine Asymptote besitze, deren Richtung sich die Tangentenrichtung nähert. Es zeigt sich, daß eine also definierte reguläre Kurve der erweiterten Ebene (Kap. 7, § 9) diese Eigenschaft bei einer Transformation letzterer durch reziproke Radien beibehält.

In diesem Kapitel versteht man schlechtweg unter einer *Kurve* eine Jordansche Kurve; sonst aber im Buche eine endliche reguläre Kurve.

Aufgabe 1. Seien $f(t)$, $\varphi(t)$ im Intervalle $a \leq t \leq b$ stetige Funktionen, und seien

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

Dann ist die Punktmenge $\{(x, y)\}$ abgeschlossen und im allgemeinen perfekt.

Aufgabe 2. Man untersuche die Kurven, welche durch die Gleichungen

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

definiert werden, wobei $f(t)$ und $\varphi(t)$ im nicht-abgeschlossenen Intervalle

$$t_0 < t < t_1$$

eindeutig und nebst den ersten Ableitungen stetig sind. Außerdem soll stets

$$f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 > 0$$

sein; auch sollen mehrfache Punkte nicht vorhanden sein, d. h. die Gleichungen

$$x' = f(t), \qquad y' = \varphi(t)$$

sollen höchstens eine Lösung $t = t'$ zulassen.

Als erste Beispiele seien die in Polarkoordinaten durch die Gleichungen gegebenen Kurven erwähnt:

a) $$r = 1/\theta \qquad 0 < \theta < \infty;$$

b) $$\theta = \tan r, \qquad \frac{\pi}{2} < r < \frac{3\pi}{2}.$$

§ 2. Das zweidimensionale Kontinuum.

In einer Ebene sei eine Punktmenge von folgender Beschaffenheit vorgelegt:

a) jeder Punkt der Menge ist ein *innerer* Punkt, d. h. zu jedem

Punkte (x_0, y_0) der Menge gibt es eine positive Größe h, derart daß alle Punkte (x, y), wofür $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < h$ ist, zur Menge gehören;

b) die Menge *hängt zusammen*, d. h. je zwei Punkte der Menge lassen sich durch eine einfache reguläre Kurve miteinander verbinden, deren Punkte sämtlich zur Menge gehören.[1])

Eine derartige Punktmenge nennt man ein *zweidimensionales Kontinuum*. Wir werden es häufig in der Folge als einen *Bereich T* bezeichnen, doch wollen wir an dieser Stelle nicht unterlassen, den Leser darauf aufmerksam zu machen, daß, wenn in der Mathematik von einem Bereich die Rede ist, die Frage stets vor allem entschieden werden muß, ob der Rand mit dazu gerechnet werden soll oder nicht. Im Falle eines Kontinuums wird in der Analysis der Rand niemals einbegriffen, und dies soll in der Folge auch von einem Bereich T gelten, sofern das Gegenteil nicht bemerkt ist.

Wegen der Definition von *Umgebung, Häufungsstelle, abgeschlossen, perfekt* usw. vergleiche man das 1. Kapitel, § 8.

Analytisch kann ein Bereich T durch Ungleichungen definiert werden. Beispiele:

1. das Innere eines Rechtecks:

$$a < x < A, \qquad b < y < B;$$

2. das Innere eines Kreises:

$$a - r < x < a + r, \qquad b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2} < y < b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2};$$

3. das Innere eines Dreiecks oder allgemeiner die Punkte (x, y), deren Koordinaten gleichzeitig den drei Ungleichungen genügen:

$$a_i x + b_i y + c_i > 0, \qquad 0 < |a_i| + |b_i|, \qquad i = 1, 2, 3,$$

wobei noch vorausgesetzt wird, daß es wenigstens einen Punkt gibt, für welchen die drei Relationen gleichzeitig bestehen;

4. der Streifen

$$a < x < b, \quad f(x) < y < f(x) + g,$$

wo $f(x)$ eine stetige Funktion von x im genannten Intervalle und g eine positive Konstante bedeutet.

1) Dieser Teil der Definition kann anders gefaßt werden, indem man etwa verlangt, daß die Verbindungskurve eine Jordansche sei. Andererseits genügt die Voraussetzung, daß jene Kurve ein Polygonzug sei. Alle drei Definitionen laufen auf ein und dasselbe hinaus.

Zur Probe führen wir den Beweis im Falle 4. aus. Sei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt des Streifens; dann ist

$$f(x_0) < y_0 < f(x_0) + g.$$

Man nehme eine positive Größe k so an, daß gleichzeitig

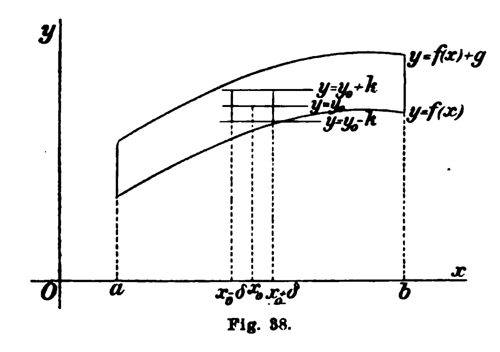


Fig. 38.

$$f(x_0) < y_0 - k,$$
$$y_0 + k < f(x_0) + g$$

sei. Sodann kann man nach Kap. 1, § 4, Aufgabe 6 eine positive Größe δ finden, derart, daß gleichzeitig

$$f(x) < y_0 - k,$$
$$y_0 + k < f(x) + g$$

bleibt, sofern $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ist. Bezeichnet man die kleinere der beiden Größen k, δ mit h, so wird der Bedingung a) der Definition genügt.

Um jetzt nachzuweisen, daß Bedingung b) ebenfalls erfüllt ist, seien A: (x_0, y_0) und B: (x_1, y_1) irgend zwei Punkte des Streifens. Ist insbesondere $x_0 = x_1$, so lassen sich A und B direkt durch die Strecke

$$x = x_0, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1 \quad \text{resp.} \quad y_1 \leqq y \leqq y_0$$

miteinander verbinden. Sonst kann man die gesuchte Verbindungskurve, wie folgt, herstellen. Sei $x_0 < x_1$. Von A aus ziehe man die Kurve

$$\Gamma: \qquad y - y_0 = f(x) - f(x_0), \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1$$

und sei B': (x', y') der Punkt, in welchem Γ die Gerade $x = x_1$ trifft, also

$$x' = x_1, \qquad y' = f(x_1) + y_0 - f(x_0).$$

Dann liegt Γ im Streifen, denn für Γ ist

$$y = f(x) + y_0 - f(x_0),$$

und es ist ja

$$0 < y_0 - f(x_0) < g.$$

An Γ füge man nun noch die geradlinige Verbindungsstrecke $B'B$ an, womit denn die in Aussicht gestellte Kurve zu stande kommt, sofern $y = f(x)$ eine reguläre Kurve ist.

Die Ergänzung im allgemeinen Falle ist nicht schwierig. Wegen

der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ im abgeschlossenen Intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_1$ hat man

$$|f(x) - f(x')| < \eta, \qquad |x - x'| < \delta.$$

Dabei soll η gleich der kleineren der beiden Größen $y_0 - f(x_0)$ und $f(x_0) + g - y_0$ gesetzt werden. Zerlegt man nun das Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ durch die Punkte $a_0 = x_0, \cdots, a_n = x_1$ in eine endliche Anzahl von Teilintervallen, deren Länge stets kleiner als δ bleibt, so kann man Γ durch folgende gebrochene Linie ersetzen:

$$a_i < x < a_{i+1}, \qquad y = f(a_i) + y_0 - f(x_0);$$

$$x = a_i, \qquad f(a_{i-1}) + y_0 - f(x_0) \leqq y \leqq f(a_i) + y_0 - f(x_0),$$

$$\text{resp.} \qquad f(a_i) + y_0 - f(x_0) \leqq y \leqq f(a_{i-1}) + y_0 - f(x_0).$$

Dazu wird noch der Punkt (x_0, y_0) gerechnet.

Der Leser wolle den Beweis im Falle 3. durchführen, indem er bemerkt, daß jeder Punkt der Verbindungsstrecke der beiden Punkte (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2):

$$x - \xi_1 = (\xi_2 - \xi_1)t, \qquad y - \eta_1 = (\eta_2 - \eta_1)t, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

zur Menge gehört, sofern dies von den Endpunkten gilt, da man dann hat:

$$a_i x + b_i y + c_i = (a_i \xi_2 + b_i \eta_2 + c_i)t + (a_i \xi_1 + b_i \eta_1 + c_i)(1 - t).$$

Über den Rand eines Kontinuums. Der Rand eines Bereiches T kann aber noch ganz anderer Natur sein, als man sich ihn gewöhnlich denkt, wie folgende Beispiele zeigen.

A) Der Bereich T bestehe aus allen Punkten der oberen Halbebene $(y > 0)$, die Punkte

$$x = \frac{m}{n!}, \qquad y = \frac{1}{n!}, \qquad \begin{cases} n = 1, 2, \cdots \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

ausgenommen. Hier gibt es isolierte Randpunkte, es gibt aber auch Randpunkte, die eine Kurve bilden, nämlich die Gerade $y = 0$. Durch keinen Bogen dieser Kurve werden jedoch alle in der Nachbarschaft desselben gelegenen Randpunkte erschöpft.

B) Der Bereich T bestehe aus den Punkten des in der oberen Halbebene gelegenen Halbkreises

$$x^2 + y^2 < 25, \qquad 0 < y,$$

mit Ausnahme der folgenden Punkte: in den Punkten der x-Achse:

$$y = 0, \quad x = 0, \ 1/n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

errichte man ein Lot auf derselben von der Länge 1, und zwar nach der Seite hin, wofür $y > 0$ ist; die Punkte dieser Lote:

$$x = 0, \ 1/n, \quad 0 < y \leqq 1$$

sollen nicht zu T gehören.

Hier gibt es Randpunkte, welche die merkwürdige Eigenschaft haben, daß sich ein veränderlicher Punkt P von T keinem davon als Grenzpunkt stetig nähern kann, ohne aus T herauszutreten. Fassen wir etwa den Punkt

$$A: \qquad x = 0, \quad y = \tfrac{1}{2}$$

ins Auge. Von einem festen Punkte O von T aus kann ein Punkt P allerdings, längs eines ganz in T gelegenen Weges fortrückend, in eine beliebig kleine vorgegebene Nachbarschaft von A gelangen, etwa in einen um A beschriebenen Kreis vom Radius $\delta < \frac{1}{2}$. Das sei nun einmal geschehen; der Punkt P liegt in diesem Kreise. Jetzt kann man eine zweite Umgebung von A so wählen, daß P, um in diese zu gelangen, aus jenem Kreise wieder heraustreten und sich sogar von A um mehr als die Entfernung $\frac{1}{2}$ zurückziehen muß.

In diesem Beispiele bilden die Punkte von der ausgezeichneten Eigenschaft des Punktes A bloß eine endliche Anzahl regulärer Kurvenstücke, nämlich eine einzige geradlinige Strecke. Einen allgemeineren Fall erhält man, wenn man die Lote in den Punkten einer in der Strecke $y = 0, \ -1 \leqq x \leqq 1$ gelegenen perfekten, in keinem Intervalle dichten Menge errichtet. Ein Beispiel einer solchen Menge wird später mitgeteilt, vgl. § 12. Ist x' ein Endpunkt der dabei benutzten Intervalle (n), und A ein Punkt (x', y'), wo $0 < y' < 1$ ist, so kann sich P dem Punkte A zwar von der einen Seite her stetig nähern, nicht aber von der andern. Ist dagegen x' eine Häufungsstelle derartiger Endpunkte, ohne selbst ein Endpunkt zu sein, so kann P längs keines in T gelegenen Weges dem Punkte A zustreben.

Durch dieses Beispiel wird der Begriff eines Randes resp. eines Randstückes nahegelegt, auf welchem Punkte dieser merkwürdigen Eigenschaft sogar überall dicht gesäet sind.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einigen Sätzen über Kontinuen.

1. Satz. *Die Randpunkte eines endlichen Bereiches T bilden eine abgeschlossene Punktmenge.*

2. Satz. *Ist C eine Kurve, welche ganz in einem Bereich T liegt, so hat der Abstand eines variabelen Punktes derselben von den verschiedenen Randpunkten von T ein positives Minimum.*

Der erste Satz ist evident. Zum Beweise des zweiten zeigt man allgemein, wenn $\{(x, y)\}$ und $\{(x', y')\}$ zwei beliebige abgeschlossene Punktmengen ohne gemeinsamen Punkt sind und man die untere Grenze der Entfernung $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ zweier Punkte derselben voneinander mit $\varkappa$ bezeichnet, daß es dann stets einen Punkt der einen Menge $(\bar{x}, \bar{y})$ und einen Punkt der anderen Menge $(\bar{x}', \bar{y}')$ gibt, deren Entfernung voneinander genau $\varkappa$ beträgt.[1])

3. Satz. *Sei P ein Punkt eines Bereichs T und sei Q ein zweiter Punkt, der T nicht angehört. Verbindet man P mit Q mittels einer Kurve C, so wird mindestens ein Punkt von C zum Rande von T gehören.*

4. Satz. *Stoßen zwei Bereiche, welche keinen gemeinsamen Punkt besitzen, längs einer oder mehrerer regulärer Kurven zusammen, so bilden die inneren Punkte dieser Bereiche nebst den Punkten der Kurven (die Endpunkte letzterer ausgenommen) einen Bereich T.*

5. Satz. *Haben zwei Bereiche T_1 und T_2 einen gemeinsamen Punkt und ist jeder Randpunkt von T_1 entweder ein Rand- oder ein äußerer Punkt von T_2, so liegt T_2 in T_1.*

Zusatz. *Haben T_1 und T_2 einen gemeinsamen Punkt und fallen alle ihre Randpunkte zusammen, so sind sie miteinander identisch.*

Der Beweis dieser Sätze bietet keine Schwierigkeit und wird dem Leser überlassen. Wir fügen noch als Aufgaben einige weitere Sätze hinzu.

Aufgabe 1. Sei P ein Punkt eines Bereiches T und Q ein Punkt, welcher nicht zu T gehört und auch kein Randpunkt von T ist. Man zeige, daß es dann einen Randpunkt von T gibt, dessen Abstand von Q weniger als derjenige des Punktes P von Q beträgt.

Aufgabe 2. Seien T_1, T_2 zwei Bereiche ohne gemeinsamen Punkt. Dann bildet die Gesamtheit ihrer Punkte keinen Bereich T.

---

1) Man vgl. Jordan, *Cours d'analyse*, Bd. 1, 2. Aufl., 1893, S. 24, § 30. Das Wort *parfait* wird daselbst im Sinne von *abgeschlossen* (nicht *perfekt*) gebraucht.

Für die allgemeinen Zwecke der Analysis hat Jordan den Begriff *domaine* (S. 22) zu weit gefaßt, da er z. B. die Punkte des Kreises $x^2+y^2 \leqq 1$ nebst der Geraden $x = 1$, $0 < |y| \leqq 1$, sowie die aus den beiden Kreisen $x^2+y^2<1$, $(x-2)^2+y^2 \leqq 1$ zusammengesetzte Menge mit einbegreift.

Aufgabe 3. Haben zwei Bereiche T_1, T_2 einen gemeinsamen Punkt, so bildet die Menge aller Punkte, welche mindestens einem dieser Bereiche angehören, einen Bereich T. Die gemeinsamen Punkte von T_1 und T_2 bilden ein oder mehrere Kontinuen.

Aufgabe 4. Man zeige, daß das Innere eines Kreises, dessen Mittelpunkt ein gewöhnlicher Punkt oder eine Ecke einer einfachen regulären Kurve ist, bei passender Einschränkung des Radius durch die Kurve in zwei Kontinuen zerlegt wird.

§ 3. Darstellung eines Bereiches durch eine unendliche Reihe von Teilbereichen.

Die Entwicklung einer Funktion in eine unendliche Reihe von Funktionen findet ihr Analogon hier in dem folgenden

Fundamentalsatz.[1]) *Sei ein beliebiger Bereich T vorgelegt. Dann läßt sich eine Reihe von Bereichen T_0, T_1,... angeben, welche sich einzeln aus Quadraten zusammensetzen, ineinander eingeschachtelt sind, und T genau ausfüllen. Genauer ausgedrückt haben die Teilbereiche folgende Eigenschaften:*

a) *jeder innere und Randpunkt von T_n liegt sowohl in T als in T_{n+1};*

b) *jedem Punkte P von T entspricht ein Wert von n, für welchen P in T_n liegt.*[2])

Wir denken uns den Bereich T in arithmetischer Weise (diesen Ausdruck im weitesten Sinne verstanden, vergleiche die Beispiele des vorhergehenden Paragraphen) festgelegt; dann kann der Bereich T_n durch eine endliche Anzahl von Ungleichungen bestimmt werden, denn er setzt sich aus einer endlichen Anzahl von Quadraten zusammen, und ein Quadrat läßt sich ja durch Ungleichungen erklären.

Sei T zunächst endlich, und man fasse einen Punkt O von T ins Auge. Durch die Geraden

$$x = \frac{m}{2^n}, \qquad y = \frac{m'}{2^n}, \qquad m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

werde die Ebene in ein Quadratnetz eingeteilt. Bei geeigneter Wahl

1) Wir denken uns den Bereich T als ein Kontinuum, doch gilt der Satz auch für jeden Bereich, welcher aus den Punkten eines Kontinuums nebst einigen oder auch allen Randpunkten desselben besteht. Andererseits kann man die Bereiche T_i, t_i sowohl als Kontinuen wie als Bereiche S, Kap. 2, § 2 auffassen. Dabei wird man in den Bedingungen a) und b) das Wort in durch innerhalb zu ersetzen, sowie unter P einen innern Punkt von T zu verstehen haben.

2) Der Bereich T_n entspricht der Summe s_n der ersten n Glieder der unendlichen Reihe, nicht dem einzelnen Gliede u_n derselben.

von $n = n_0$ kann man dann erreichen, daß einige der Quadrate $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ inklusive ihrer Ränder in T liegen und daß überdies der Punkt O im Innern oder auf dem Rande eines derselben, welches wir t nennen wollen, liegt. Die Quadrate $Q_1, \cdots, Q_k$ bilden eine endliche Anzahl zweidimensionaler Kontinuen, die nirgends übereinander greifen, die aber im allgemeinen gemeinsame Randstücke besitzen werden. Gehen wir vom Bereiche t aus und sehen wir zu, ob ein zweites Quadrat Q_i längs einer ganzen Seite daran grenzt. Falls es ein solches gibt, so werde dasselbe auf Grund des 4. Satzes von § 2 an diesen Bereich angefügt. Dadurch entsteht ein neuer Bereich t_1, der ebenso wie t inklusive seines Randes in T liegt und über keines der übrigen $k-2$ Quadrate hinübergreift. Am Bereiche t_1 wird jetzt dieselbe Überlegung wieder angestellt und t_1 wird so womöglich durch eines der $k-2$ übrig gebliebenen Quadrate zu einem Bereiche t_2 ergänzt, welcher ähnlich beschaffen ist wie t und t_1.

Wiederholt man diesen Schritt, so gelangt man schließlich zu einem Bereiche T_0, der den Punkt O enthält, sich aus den Quadraten $Q_1, \cdots, Q_k$ bzw. aus einem Teil derselben zusammensetzt, und nebst seinem Rande (der inzwischen in mehrere Stücke zerfallen sein kann) in T liegt. Dieser Bereich bildet nun das erste Glied der Reihe. Wie man leicht erkennt, ist er unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die einzelnen Quadrate angehängt werden, nicht aber von der Wahl des Punktes O. Jedem Randpunkte P von T_0 entspricht mindestens ein Randpunkt von T, der höchstens um die Größe $2^{-n_0}\sqrt{2}$ von P absteht. Sei h_1 die kleinste Entfernung von einem Punkte des Randes von T_0 bis zu einem Punkte des Randes von T (vgl. den 2. Satz von § 2). Dann ist $0 < h_1 \leqq 2^{-n_0}$. Nach der 1. Aufgabe von § 2 steht jeder Punkt des Bereiches T_0 um mehr als h_1 vom Rande des Bereiches T ab.

Wir wenden uns jetzt zur Herstellung des zweiten Bereiches T_1. Indem wir die Einteilung der Ebene in Quadrate weiter fortsetzen, wählen wir $n = n_1$ so, daß die Diagonalen der Quadrate des Netzes kleiner als h_1 ausfallen — es muß also $2^{-n_1}\sqrt{2} < h_1$ sein — und richten unser Augenmerk auf die neuen Quadrate $Q_1', \cdots, Q_{k'}'$, welche in T, aber nicht in T_0 liegen. An jeden Randpunkt von T_0 muß dann mindestens ein solches Quadrat stoßen, wie der Leser streng arithmetisch nachweisen kann. Und nun wird man, von T_0 ausgehend, diesen Bereich durch sukzessive Adjungierung von Quadraten Q' gerade so erweitern, wie vorhin beim Bereiche t geschehen ist. Das Ergebnis wird ein aus einer endlichen Anzahl von Quadraten Q, Q'

bestehender, mit seinem Rande in T gelegener Bereich T_1 sein, in welchem T_0 nebst seinem Rande liegt, und welcher ferner, analog wie T_0, so beschaffen ist, daß jedem Randpunkte P von T_1 mindestens ein Randpunkt von T entspricht, der höchstens um die Größe $2^{-n_1}\sqrt{2}$ von P absteht.

Sei ferner h_2 die kleinste Entfernung von einem Punkte des Randes von T_1 bis zu einem Punkte des Randes von T. Dann wird man einen Bereich T_2 in ähnlicher Weise herstellen, wie soeben T_1. Durch fortgesetzte Wiederholung des Verfahrens entspringt hiermit eine unbegrenzte Folge von Bereichen $T_0, T_1, \cdots$, deren alle der Forderung a) des Satzes entsprechen, und es erübrigt also nur noch zu zeigen, daß auch der Forderung b) Genüge geleistet wird.

Dazu verbinde man O mit P durch eine in T verlaufende Kurve C und bezeichne mit h die kleinste Entfernung von einem Punkte von C bis zum Rande von T (vgl. § 2, 2. Satz). Nimmt man dann k so, daß $2^{-n_k}\sqrt{2} < h$ wird, so wird C ganz im Bereiche T_k liegen. In der Tat, würde C aus T_k heraustreten, so müßte C nach dem 3. Satze von § 2 einen Randpunkt A von T_k enthalten. Demnach gäbe es einen Randpunkt von T, dessen Abstand von A höchstens $2^{-n_k}\sqrt{2}$ beträgt und somit kleiner als h wäre. Mit diesem Widerspruch schließt der Beweis des Satzes im Falle eines endlichen Bereiches T.

Erstreckt sich T dagegen ins Unendliche, so sieht man leicht, wie die nötige Ergänzung zu bewerkstelligen ist. Man könnte etwa eine Reihe konzentrischer Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkte O und den Radien $R = 1, 2, \cdots$ nehmen und dann bei jedem Schritte des Verfahrens alle solchen Quadrate Q, aber auch nur diese, in Betracht ziehen, welche innerhalb des n^{ten} Kreises liegen.

Indem wir die Entwicklungen von §§ 6, 7 antizipieren, fügen wir noch die folgende Ergänzung des vorstehenden Satzes hinzu.

Der Rand eines beliebigen T_n besteht aus einer endlichen Anzahl regulärer Kurven (Polygonzüge), welche höchstens eine endliche Anzahl von Doppelpunkten besitzen.

Die äußeren Punkte von T_n bilden k Kontinuen, $\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_k$, wovon das eine aus dem Äußeren einer einfachen regulären geschlossenen Kurve (§ 6) *besteht; jedes der übrigen macht das Innere einer solchen Kurve aus.*

Wir bemerken vorerst, daß jede zum Rande von T_n gehörige Quadratseite ein zu T_n gehöriges Quadrat von einem nicht zu T_n gehörigen Quadrat trennt, wie aus der Entstehungsweise von T_n sofort

ersichtlich ist. Fangen wir mit einer beliebigen Quadratseite an, welche zum Rande von T_n gehört. Dann reiht sich mindestens eine zweite solche Quadratseite ans Ende dieser, — welches Ende wir nehmen, ist da gleichgültig. An letztere hängen wir wieder eine dritte Quadratseite des Randes an, und wiederholen den Schritt. Da der ganze Rand von T_n nur aus einer endlichen Anzahl von solchen Quadratseiten besteht, so muß die Fortsetzung des Prozesses schließlich zu einer Quadratseite führen, welche bereits einmal angetroffen ist. Hiermit stellt sich eine einfache reguläre geschlossene Kurve Γ_1 ein, welche ganz zum Rande von T_n gehört und die Ebene nach § 6 in zwei Kontinuen zerlegt. Nach dem 1. Satze von § 7 liegt T_n ganz auf einer Seite von Γ_1, also entweder ganz im Innern oder ganz außerhalb dieser Kurve. Das auf der anderen Seite von Γ_1 gelegene Kontinuum möge mit $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet werden.

Ist der Rand von T_n hiermit noch nicht erschöpft, so fange man mit einer weiteren zur Begrenzung gehörigen Quadratseite s an und wiederhole den obigen Prozeß. Entweder erhält man auf diese Weise wiederum eine einfache reguläre geschlossene Kurve Γ_2, welche ganz zum Rande von T_n gehört und die Ebene in zwei Kontinuen zerlegt, wovon das eine, $\mathfrak{T}_2$, ganz außerhalb T_n und $\mathfrak{T}_1$ liegt; oder aber man stößt auf einen Punkt von Γ_1. Im letzteren Falle wollen wir zu s zurückkehren und vom anderen Ende dieser Seite ausgehen. Dann können wieder dieselben beiden Fälle eintreten. Ergibt sich nun hier eine einfache reguläre geschlossene Kurve, Γ_2, so hat man im wesentlichen den früheren Fall vor sich, da Γ_2 die Ebene in zwei Kontinuen zerfällt, wovon das eine, $\mathfrak{T}_2$, ganz außerhalb T_n, $\mathfrak{T}_1$ liegt. Trifft dies indessen nicht zu, so wird man wieder zu Γ_1 zurückgeführt. In diesem Falle müssen aber die beiden auf Γ_1 erhaltenen Endpunkte der bewußten Kurve zusammenfallen. Denn sonst läßt sich aus dieser Kurve und einem Bogen C von Γ_1 wieder eine einfache reguläre geschlossene Kurve zusammensetzen, die zum Rande von T_n gehört und die Ebene in zwei Kontinuen zerlegt, wozu das eine $\bar{\mathfrak{T}}$ außerhalb T_n, $\mathfrak{T}_1$ liegt. Hiermit stoßen wir aber auf einen Widerspruch, indem sowohl $\mathfrak{T}_1$ als $\bar{\mathfrak{T}}$ an C grenzen, und zwar von verschiedenen Seiten her, da $\bar{\mathfrak{T}}$ außerhalb $\mathfrak{T}_1$ liegt. Wir erhalten also auch in diesem Falle eine einfache reguläre geschlossene Kurve Γ_2 von der früheren Beschaffenheit, nur hat diese jetzt einen Punkt mit Γ_1 gemeinsam. Hier bilden Γ_1 und Γ_2 zusammengenommen eine reguläre geschlossene Kurve mit einem Doppelpunkte.

Sollten noch Randpunkte von T_n vorhanden sein, so werden wir

wieder in derselben Weise verfahren. Es kann jetzt vorkommen, daß die schrittweise hergestellte Kurve L mit einem Endpunkte A_1 an Γ_1 und mit dem anderen Endpunkte A_2 an Γ_2 heranreicht. Haben Γ_1 und Γ_2 keinen gemeinsamen Punkt, — sonst unterscheidet sich ja der Fall nicht wesentlich von einem bereits behandelten, — so wird man L von A_1 aus weiter fortsetzen. Dies ist sicher möglich, da in diesem Falle vier zum Rande von T_n gehörige Quadratseiten in A_1 zusammenstoßen, wovon bisher erst drei in Betracht kamen. Dann muß L entweder in sich selbst oder in einem Punkte von Γ_2 schließen, und im letzteren Falle muß dieser Punkt eben der Punkt A_2 sein. In allen Fällen stellt sich also eine weitere einfache reguläre geschlossene Kurve Γ_3 von der bewußten Beschaffenheit ein.

Wenn mehrere getrennte Kurven $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_l$ vorliegen, erfährt die Schlußweise nur insofern eine Modifikation, daß die Kurve L mehr als zwei Kurven Γ_i antreffen kann, ehe sie schließt. Hiermit ist denn der Satz völlig bewiesen.

Hängt der Bereich T einfach zusammen (vgl. unten, § 7), *so wird auch jeder T_n einfach zusammenhängen, sofern man nur den einen Fall ausschließt, daß T sich ins Unendliche erstreckt und dabei einen im Endlichen befindlichen Rand hat.*

Sollte T_n nämlich mehrfach zusammenhängen, so wird sein Rand zum Teil aus einer einfachen regulären geschlossenen Kurve bestehen, innerhalb deren Randpunkte von T liegen. Da nun aber auch außerhalb dieser Kurve Randpunkte von T liegen, so wird man hiermit zu einem Widerspruch geführt.

Aufgabe. Gegeben seien ein Bereich T und eine beliebig kleine positive Größe ε. Dann läßt sich n so bestimmen, daß ein vorgegebener Randpunkt von T um weniger als ε von einem Randpunkt von T_n absteht. Gilt der Satz gleichmäßig für den ganzen Rand von T im Falle T endlich ist?

§ 4. Vorbereitungen zum Beweise des Hauptsatzes von § 6.

Die Anschauung zeigt, daß einfach gestaltete geschlossene Kurven, wie z. B. ein Kreis oder ein Quadrat, die Ebene in zwei Teile, — in ein inneres und in ein äußeres Gebiet, — zerlegen, und man überträgt diesen Satz allgemein auf alle geschlossenen Kurven, sofern sie sich selbst nicht überschneiden. Allein für die Polygone ist der Satz schon nicht mehr anschaulich, denn man kann sich ja nur von einer

äußerst beschränkten Klasse von Polygonen eine deutliche Vorstellung machen. In der Tat beruht der Satz selbst für die allgemeinen einfachen Polygone bloß auf einem Analogieschlusse.

In der Analysis ist dieser Satz von grundlegender Bedeutung. Für ihre Zwecke genügt es, ihn in folgendem Umfange auszusprechen: *Eine einfache reguläre geschlossene Kurve teilt die Ebene in zwei Bereiche.* Wir haben uns in diesem und den beiden folgenden Paragraphen mit einem arithmetischen Beweise desselben zu beschäftigen, welcher von Hrn. L. D. Ames herrührt und wegen Strenge und Einfachheit wohl als befriedigend angesehen werden kann.[1])

Definition der Strecken. Unter einer *Strecke* $\mathfrak{A}$ verstehen wir die aus der regulären Kurve

$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) = a_1 t + a_2 \\ y = \varphi(t) = b_1 t + b_2 \end{array}\right\}, \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$
$$f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 = a_1^2 + b_1^2 > 0$$

bestehende Punktmenge $\{(x, y)\}$, der wir noch ein weiteres, geo-

1) Bisher war meines Wissens nur ein Beweis des Satzes bekannt, und zwar derjenige des Hrn. Schoenflies: *Göttinger Nachrichten*, 1896, S. 79; der Satz wird daselbst nicht ganz in dem Umfange des Textes bewiesen. Hrn. Schoenflies gebührt auch das Verdienst, die Notwendigkeit eines arithmetischen Beweises für die Analysis zuerst hervorgehoben zu haben. An Einfachheit läßt jedoch sein Beweis zu wünschen übrig. Um einen geometrisch so nahe liegenden Satz arithmetisch zu begründen, bieten sich nämlich in der Regel mehrere Wege dar. Schlägt man einen bestimmten davon ein, so kann es einem leicht begegnen, daß man bald in ein Gestrüpp von geometrischen Tatsachen gerät, deren jede eine besondere Arithmetisierung erfordert, so daß man sich genötigt sieht, den Angriff von einer anderen Seite zu versuchen. Im vorliegenden Falle führt der Weg, den Hr. Ames gegangen ist, direkt zum Ziele; man vergleiche Ames, *Bull. Amer. Math. Soc.* 2. Reihe, Bd. 10 (1904), S. 301, sowie *Amer. Journ. of Math*, Bd. 27 (1905). Andere Beweise sind später von G. A. Bliss, *Bull. Amer. Math. Soc*, 2. Reihe, Bd. 10, (1904), S. 398 und von O. Veblen, *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 5 (1904), S. 365, sowie *ebenda* Bd. 6 (1905) gegeben worden. Der Veblensche Beweis ist ein geometrischer und beruht direkt auf dem von Hrn. Veblen in der zuerst genannten Abhandlung aufgestellten Systeme von Axiomen der Geometrie. Indessen ziehen wir hier eine arithmetische Behandlung deshalb vor, weil sich der Leser hierbei mit neuen Begriffen und Beweismethoden wenig zu plagen braucht, er gelangt mit seinen analytisch definierten regulären Kurven und den ihm geläufigen Beweismethoden bequemer zum Ziele.

Es sei noch auf die Untersuchungen von C. Jordan, *Cours d'analyse*, Bd. 1, 2. Aufl., 1893, S. 90 verwiesen, wo der Satz, unter Annahme seiner Richtigkeit für Polygone, allgemein für Jordansche Kurven (§ 1) begründet wird. Jordan beweist hiermit mehr als die Funktionentheorie gebraucht; dagegen macht er Voraussetzungen, welche diese Theorie streng begründet wissen will.

metrisch dem Sinne der Strecke entsprechendes Merkmal beifügen, indem wir zwischen den beiden Permutationen der extremen Punkte A: (x_0, y_0) und B: (x_1, y_1) unterscheiden:

$$\mathfrak{A} = [(x_0, y_0), (x_1, y_1)] = [A, B].$$

Der Punkt (x_0, y_0) heißt der *Anfang*, und (x_1, y_1) heißt der *Endpunkt* der Strecke. Diesen entsprechen in beliebiger Reihenfolge die Parameterwerte t_0, t_1.

Zwei Strecken $\mathfrak{A} = [(x_0, y_0), (x_1, y_1)]$ und $\mathfrak{A}' = [(x_0', y_0'), (x_1', y_1')]$ heißen einander *gleich*, wenn

$$x_1 - x_0 = x_1' - x_0', \qquad y_1 - y_0 = y_1' - y_0'$$

ist. Sie heißen einander *entgegengesetzt gleich*, wenn

$$x_1 - x_0 = -(x_1' - x_0'), \qquad y_1 - y_0 = -(y_1' - y_0')$$

ist; in Zeichen: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ resp. $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'$. Es ist insbesondere

$$[A, B] = -[B, A].$$

Unter der *Länge* einer Strecke versteht man die Entfernung zwischen ihren Endpunkten:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Definition des Winkels. Den Winkel zwischen zwei Strecken faßt man in der Geometrie als die Figur auf, welche durch gleiche Strecken mit gemeinsamem Anfang gebildet wird, und man ordnet demselben eine Zahl zu, welche man dann als das Winkelmaß oder schlechtweg als den Winkel bezeichnet. Diese Zahl definieren wir, wie folgt: Unter dem *Winkel* zwischen zwei Strecken

$$\mathfrak{A} = [(x_0, y_0), (x_1, y_1)] \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}' = [(x_0', y_0'), (x_1', y_1')],$$

in Zeichen[1])

$$\theta = \sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'),$$

versteht man jede Lösung θ der beiden simultanen Gleichungen[2])

$$(1) \qquad \begin{aligned} \cos\theta &= \varkappa \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & -(x_1 - x_0) \\ x_1' - x_0' & y_1' - y_0' \end{vmatrix}, \\ \sin\theta &= \varkappa \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_1' - x_0' & y_1' - y_0' \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

1) Haben die Strecken $\mathfrak{A} = [A, B]$ und $\mathfrak{A}' = [A', B']$ die Anfangspunkte A und A' gemein: $A = A'$, so wird auch $\theta = \sphericalangle BAB'$ geschrieben.

2) Hierbei darf man sich selbstverständlich nicht auf die geometrische Definition von $\sin\theta$, $\cos\theta$ stützen. Wegen einer arithmetischen Definition dieser Funktionen sei auf Kapitel 12, § 5 verwiesen.

wo

$$\varkappa^{-1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,\sqrt{(x_1' - x_0')^2 + (y_1' - y_0')^2}$$

ist. Doch greift man häufig bloß eine Lösung heraus und nennt diese schlechtweg den Wert des Winkels. Bei dieser Definition treten die beiden Strecken unsymmetrisch auf; vertauscht man sie, so wechselt der Winkel sein Vorzeichen:

$$\sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = -\sphericalangle(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}).$$

Zwei gleiche Strecken bilden denselben Winkel mit einer gegebenen Strecke und den Winkel 0 miteinander; zwei entgegengesetzt gleiche Strecken bilden den Winkel π miteinander.

Vermöge der Funktionaleigenschaften der analytisch definierten trigonometrischen Funktionen (vgl. Kapitel 12, § 5 et seq.) begründet man für die also eingeführten Winkel die gewöhnlichen geometrischen Eigenschaften, zum Beispiel:

$$\sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + \sphericalangle(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}).$$

Der vorstehenden Definition zufolge wird der von den Strecken

$$\mathfrak{A}:\quad \left.\begin{aligned} x &= a_1 t + a_2 \\ y &= b_1 t + b_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &t_0 \leqq t \leqq t_1 \\ &a_1^2 + b_1^2 > 0 \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{A}':\quad \left.\begin{aligned} x &= a_1' t + a_2' \\ y &= b_1' t + b_2' \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &t_0' \leqq t \leqq t_1' \\ &a_1'^2 + b_1'^2 > 0 \end{aligned}$$

gebildete Winkel $\theta = \sphericalangle(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$, falls der Parameter t so gewählt ist, daß der Anfang (x_0, y_0) und der Anfang (x_0', y_0') den Parameterwerten t_0 resp. t_0' entsprechen, mittels der Koeffizienten a, b, usw. durch die Formeln ausgedrückt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a_1 a_1' + b_1 b_1'}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_1'^2 + b_1'^2}}, \\ \sin\theta &= \frac{a_1 b_1' - a_1' b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_1'^2 + b_1'^2}} \end{aligned}$$

und hängt somit nur von den Koeffizienten von t, nicht von den konstanten Termen ab.

Halbstrahlen. Unter einem *Halbstrahl* versteht man die aus den Punkten (x, y):

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 t + a_2 \\ y &= b_1 t + b_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &t_0 \leqq t < \infty \\ &a_1^2 + b_1^2 > 0 \end{aligned}$$

bestehende Punktmenge $\{(x, y)\}$. Durch den Anfang A: (x_0, y_0), welcher dem Parameterwerte $t = t_0$ entspricht, und einen beliebigen zweiten Punkt (x_1, y_1) des Halbstrahls wird eine Strecke $[(x_0, y_0), (x_1, y_1)]$ definiert, und alle derartigen Strecken bilden den Winkel 0 miteinander. Den Winkel zwischen zwei Halbstrahlen bzw. zwischen einem Halbstrahl und einer Strecke definieren wir nun als denjenigen Winkel, welcher entsteht, wenn man jeden der beteiligten Halbstrahlen durch eine auf die soeben erklärte Weise ihm zugeordnete Strecke ersetzt und den Winkel zwischen diesen Strecken nimmt. Wie man sieht, wird der Winkel auch in diesem Falle durch die Formeln (2) gegeben.

Insbesondere bildet die Strecke bzw. der Halbstrahl $\mathfrak{A}$ mit der positiven x-Achse einen Winkel α, wo

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}.$$

Ein Halbstrahl wird somit durch den Anfang A: (x_0, y_0) und den Winkel α, (3) bestimmt.

Invariante Eigenschaften. In der Geometrie bedient man sich a) einer starren Bewegung der Ebene in sich, b) einer Transformation von einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf ein zweites solches, wobei die Ordinatenachse gegen die Abszissenachse im neuen System ebenso orientiert ist wie im alten. Beide Transformationen drücken sich analytisch durch die Formeln aus:

$$(4) \qquad \left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{aligned}\right\}.$$

Bei rein arithmetischen Betrachtungen handelt es sich allein um diese Transformation. Durch Ausrechnung findet man nun, *daß sich die Länge einer Strecke, sowie die Winkelmaße invariant gegenüber der Transformation* (4) *verhalten.*

§ 5. Fortsetzung: Ordnung eines Punktes; zwei Hilfssätze.

Wir führen jetzt einen für die folgenden Entwicklungen wichtigen Begriff ein, nämlich die Ordnung eines Punktes in Bezug auf eine geschlossene Kurve C:

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

wo $f(t)$ und $\varphi(t)$ die primitive Periode ω haben. Sei O: (ξ, η) ein beliebiger Punkt der Ebene, der nur nicht auf C liegt, und sei

P: (x, y) ein Punkt von C. Dann ist der Winkel θ, welchen die Strecke OP mit der positiven x-Achse bildet, eine mehrdeutige Funktion des Parameters t, deren Werte sich um Vielfache von 2π voneinander unterscheiden und zu eindeutigen stetigen Funktionen zusammengefaßt werden können; vgl. 1. Kap., § 10. Verstehen wir unter $\theta(t)$ schlechtweg eine von diesen Funktionen und greifen wir einen beliebigen Punkt P': $t = t'$, von C heraus, so erhalten wir

$$\theta(t' + \omega) = \theta(t') + 2n\pi,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Diese Zahl definieren wir als die *Ordnung* des Punktes O in Bezug auf die Kurve C. Die Ordnung hängt nicht von der Wahl des Punktes P' ab; denn die Differenz

$$\theta(t + \omega) - \theta(t)$$

ist eine stetige Funktion von t, welche stets gleich einem Vielfachen von 2π ist und für $t = t'$ den Wert $2n\pi$ hat, darum behält sie diesen Wert durchweg bei. Auch hängt die Ordnung, vom Vorzeichen abgesehen, nicht von der besonderen Wahl des Parameters t ab. Wird nämlich t durch einen neuen Parameter

$$\tau = \chi(t)$$

ersetzt (vgl. § 1, Formel (3)), so hat die Ordnung, welche doch als die einer primitiven Periode ω resp. $\bar{\omega}$ entsprechende Differenz in den Funktionswerten $\theta(t' + \omega) - \theta(t')$ resp. $\bar{\theta}(\tau' + \bar{\omega}) - \bar{\theta}(\tau')$ definiert ist, offenbar denselben bzw. den entgegengesetzten Wert. Endlich kann man die positive x-Achse durch jeden anderen Halbstrahl der Ebene ersetzen, ohne die Ordnung des Punktes O dadurch zu ändern. Überhaupt ist die Ordnung invariant in Bezug auf jede Transformation (4) des vorhergehenden Paragraphen.

1. Satz. *Alle Punkte gleicher Ordnung bilden ein oder mehrere Kontinuen.*

Mit anderen Worten haben alle Punkte einer bestimmten Umgebung des Punktes O: (ξ_0, η_0) gleiche Ordnung. Sei nämlich O_1: (ξ, η) ein zweiter Punkt der Umgebung $|x - \xi_0| < h$, $|y - \eta_0| < h$, und seien $\theta(t)$ und $\theta_1(t)$ die Winkel, welche die Strecken OP bzw. O_1P mit der positiven x-Achse bilden. Schreibt man die Formel hin, welche $\cos(\theta_1 - \theta)$ als eine Funktion von ξ, η, t darstellt, so erhellt sofort, daß bei passender Einschränkung von h

$$\cos(\theta_1 - \theta) > 0$$

bleibt, was auch immer t für einen Wert annehmen möge. Daraus schließt man, daß es bei geeigneter Wahl von h eine eindeutige stetige Bestimmung der Funktion $\theta_1(t)$ gibt, welche sich von $\theta(t)$ um weniger als $\pi/2$ unterscheidet. Aus den Gleichungen

$$\theta(t+\omega) = \theta(t) + 2n\pi,$$
$$\theta_1(t+\omega) = \theta_1(t) + 2n_1\pi$$

folgt dann, daß $n = n_1$ ist, w. z. b. w.

2. Satz. *Können zwei Punkte O, O' durch eine die Kurve C nicht treffende Kurve Γ miteinander verbunden werden, so haben sie dieselbe Ordnung.*

Die Kurve Γ werde durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

dargestellt, wobei $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$ die Koordinaten des Punktes O sind. Alle in der Nähe von t_0 gelegenen Werte von t, $t_0 \leqq t \leqq h$, liefern Punkte von Γ, die in der Nähe von O liegen, und diese haben nach dem vorstehenden Satze dieselbe Ordnung wie O. Nun lasse man h wachsen. Entweder bleiben die Punkte von Γ, welchen Werte von t im Intervalle $t_0 \leqq t < h$ entsprechen, stets von derselben Ordnung wie O, — dann wird aber der Satz schon zugestanden, — oder aber solche Werte von h haben eine obere Grenze $\bar{t}$, die kleiner als t_1 ist. Demgemäß müssen in jeder Umgebung des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$, wo $\bar{x} = \varphi(\bar{t})$, $\bar{y} = \psi(\bar{t})$ ist, Punkte von verschiedenen Ordnungen liegen. Dies führt aber zu einem Widerspruch. Denn dem soeben bewiesenen Satze zufolge müssen alle Punkte einer bestimmten Umgebung von $(\bar{x}, \bar{y})$ gleiche Ordnung haben. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Zusatz. *Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Punkte der Ebene, welche eine bestimmte Ordnung haben. Dann liegen die Randpunkte von $\mathfrak{M}$ alle auf C.*

Wir wollen jetzt zwei Hilfssätze aufstellen, auf welche Hr. Ames seinen Beweis des Hauptsatzes von § 6 stützt.

Erster Hilfssatz. *Ist C eine geschlossene Kurve*[1]*, die einen*

1) Für unsere Zwecke kommen nur einfache geschlossene reguläre Kurven in Betracht. Doch gilt der Beweis ungeändert für Jordansche Kurven, welche nur einen Bogen Γ der genannten Beschaffenheit besitzen.

Andererseits ist die Gültigkeit des Satzes nicht an eine besondere Wahl

Punkt A enthält, in dessen Umgebung C lediglich aus einem einfachen Bogen

$$\Gamma: \quad y = f(x)$$

besteht, wo $f(x)$ eine im Intervalle $a < x < b$ eindeutige stetige Funktion von x ist, so gibt es in der Nähe von A Punkte, deren Ordnungen sich in Bezug auf C um 1 voneinander unterscheiden.

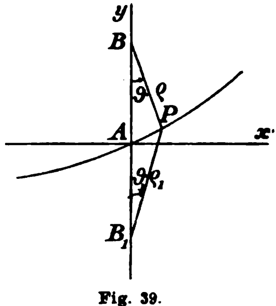


Fig. 39.

Sei A: (x_0, y_0) ein Punkt von Γ und man nehme zwei Punkte B: $(x_0, y_0 + h)$ und B_1: $(x_0, y_0 - h)$ so an, daß kein Punkt der Strecke $[B, B_1]$ mit Ausnahme von A auf C liegt. Von den Punkten B und B_1 aus lege man dann bzw. zwei Strecken BP, B_1P an einen veränderlichen Punkt P von C und führe man die Winkel

$$\theta = \sphericalangle ABP, \qquad \theta_1 = \sphericalangle AB_1P$$

ein. Denken wir uns den Anfang in den Punkt A verlegt, so ist

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{x}{\varrho} \\ \cos\theta &= \frac{h-y}{\varrho} \\ \varrho^2 &= x^2 + (h-y)^2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \sin\theta_1 &= \frac{-x}{\varrho_1} \\ \cos\theta_1 &= \frac{h+y}{\varrho_1} \\ \varrho_1^2 &= x^2 + (h+y)^2 \end{aligned}\right\}.$$

Hieraus findet man, indem man noch $\psi = \theta - \theta_1$ einträgt:

$$\sin\psi = \frac{2hx}{\varrho\varrho_1}, \qquad \cos\psi = \frac{h^2 - x^2 - y^2}{\varrho\varrho_1}.$$

Es handelt sich nun um den Beweis, daß

$$|n - n_1| = 1$$

ist, wo

$$\theta(t_A + \omega) = \theta(t_A) + 2n\pi,$$
$$\theta_1(t_A + \omega) = \theta_1(t_A) + 2n_1\pi.$$

Sei $\theta(t_A) = \theta_1(t_A) = 0$, dann ist auch $\psi(t_A) = 0$, und

$$\psi(t_A + \omega) = \theta(t_A + \omega) - \theta_1(t_A + \omega) = 2(n - n_1)\pi.$$

---

der Koordinatenachsen gebunden. Kann man nämlich die Kurve C mittels der Transformation (4), § 4 in eine Kurve C' überführen, welche einen Bogen Γ' der bewußten Beschaffenheit besitzt:

$$\Gamma': \quad y' = f(x'),$$

so gilt der Satz auch für C und den Γ' entsprechenden Bogen Γ. Denn die in Betracht kommenden Winkel verhalten sich invariant gegenüber der Transformation (4).

Wir wollen die Wertänderungen von ψ, als Funktion von t betrachtet, im Intervalle $t_A \leqq t \leqq t_A + \omega$ verfolgen und zeigen, daß der Gesamtzuwachs $\psi(t_A + \omega) - \psi(t_A)$ entweder 2π oder -2π beträgt.

Den Punkten t des Intervalls $t_A < t < t_A + \delta$ entsprechen bei geeigneter Wahl von δ Punkte P, welche entweder alle rechts oder alle links von der Strecke $[B, B_1]$ liegen und wofür also durchweg entweder $x > 0$ oder $x < 0$ ist. Nehmen wir an, der erste Fall liege vor. Dann wird im genannten Intervalle

$$0 < \psi(t)$$

sein. Andererseits fasse man das Intervall $(t_A + \omega) - \delta < t < (t_A + \omega)$ ins Auge. Seinen Punkten entsprechen Punkte P, wofür $x < 0$ ist, und demgemäß wird dort

$$\psi(t) < \psi(t_A + \omega) - 2(n - n_1)\pi$$

sein; denn $\psi(t)$ ist stetig, und $\sin\psi$ ist hier negativ.

Wir wollen ferner zeigen, daß $\psi(t)$ im Intervalle $t_A < t < t_A + \omega$ keinen Wert annimmt, welcher ein ganzzahliges Vielfache von 2π wäre. Dazu müßte nämlich erstens

$$\sin\psi = 0, \quad \text{also} \quad x = 0,$$

sodann auch

$$\cos\psi = 1, \quad \text{also} \quad h^2 = y^2 - \varrho\varrho_1$$

sein. Nun liegt aber kein Punkt von C außer A auf der Strecke $[B, B_1]$, folglich ist für die in Betracht kommenden Punkte $y \neq h$, und der letzten Bedingung wird somit nicht genügt.

Aus dieser Überlegung geht nun hervor, daß für alle Werte von t im Intervalle $t_A < t < t_A + \omega$

$$0 < \psi(t) < 2\pi$$

ist, während sich beim Grenzübergange $\lim t = (t_A + \omega)$ die Funktion $\psi(t)$ dem Werte 0 nicht nähern kann und deshalb notgedrungen dem Werte 2π zustreben muß. Mithin ist

$$\psi(t_A + \omega) - 2(n - n_1)\pi = 2\pi,$$

also ist

$$n - n_1 = 1.$$

Im Falle daß die dem Intervalle $t_A < t < t_A + \delta$ entsprechenden Punkte P links von $[B, B_1]$ liegen, ergibt sich in ähnlicher Weise, daß $n - n_1 = -1$ ist.

Zweiter Hilfssatz. *Sei T ein beliebiger Bereich und sei*

$$C: \quad y = F(x), \quad a \le x \le b$$

resp.

$$x = \Phi(y), \quad \alpha \le y \le \beta$$

eine Kurve, welche höchstens mit Ausnahme ihrer Endpunkte in T liegt. Dabei soll die Funktion $F(x)$ bzw. $\Phi(y)$ in ihrem Definitionsintervalle eindeutig und stetig sein.[1] *Fallen nun beide Endpunkte von C mit Randpunkten von T zusammen, so wird T durch C höchstens in zwei Bereiche zerlegt. Sonst bilden die Punkte von T, welche nicht auf C liegen, immer noch einen einzigen Bereich.*

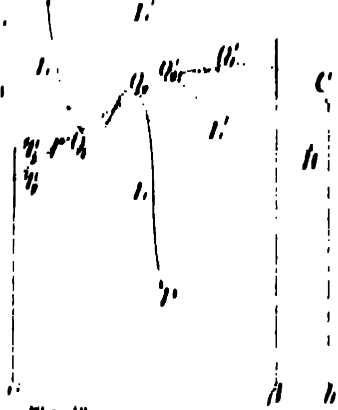


Fig. 40.

Nehmen wir an, daß der Bereich T im ersten Falle durch C zerfällt wird, und bezeichnen wir die durch die Entfernung der Punkte von C aus T entstandene Menge mit T'. Dann besteht T' aus mehreren Kontinuen. Seien A und B zwei Punkte von T', welche nicht miteinander verbunden werden können, ohne aus T' herauszutreten. Wir wollen zeigen, daß dann ein beliebiger dritter Punkt P von T' entweder mit A oder mit B verbunden werden kann. Zu dem Zwecke verbinde man zunächst A mit P durch eine in T' verlaufende reguläre Kurve

$$L: \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

wobei $t = 0$ dem Punkte A entspreche. Wird C von L getroffen, — sonst wäre ja die Behauptung zugegeben, — so seien t_1 und t_2 der kleinste resp. der größte Wert von t, der einem Schnittpunkte dieser Kurven entspricht:

$$t = t_1, \quad Q_1 = (x_1, y_1); \qquad t = t_2, \quad Q_2 = (x_2, y_2).$$

Ferner verbinde man A mit B durch eine zweite in T' verlaufende reguläre Kurve L' und zeichne man wieder den ersten und den letzten Schnittpunkt derselben mit C auf: $Q_1' = (x_1', y_1')$; $Q_2' = (x_2', y_2')$. Als

[1] Wir sprechen den Satz auch für den zweiten Fall $x = \Phi(y)$ bloß der Einfachheit der Anwendung halber aus.

Wir wollen die Wertänderungen von ψ, als Funktion von t betrachtet, im Intervalle $t_A \leqq t \leqq t_A + \omega$ verfolgen und zeigen, daß der Gesamtzuwachs $\psi(t_A + \omega) - \psi(t_A)$ entweder 2π oder -2π beträgt.

Den Punkten t des Intervalls $t_A < t < t_A + \delta$ entsprechen bei geeigneter Wahl von δ Punkte P, welche entweder alle rechts oder alle links von der Strecke $[B, B_1]$ liegen und wofür also durchweg entweder $x > 0$ oder $x < 0$ ist. Nehmen wir an, der erste Fall liege vor. Dann wird im genannten Intervalle

$$0 < \psi(t)$$

sein. Andererseits fasse man das Intervall $(t_A + \omega) - \delta < t < (t_A + \omega)$ ins Auge. Seinen Punkten entsprechen Punkte P, wofür $x < 0$ ist, und demgemäß wird dort

$$\psi(t) < \psi(t_A + \omega) = 2(n - n_1)\pi$$

sein; denn $\psi(t)$ ist stetig, und $\sin \psi$ ist hier negativ.

Wir wollen ferner zeigen, daß $\psi(t)$ im Intervalle $t_A < t < t_A + \omega$ keinen Wert annimmt, welcher ein ganzzahliges Vielfache von 2π wäre. Dazu müßte nämlich erstens

$$\sin \psi = 0, \quad \text{also} \quad x = 0,$$

sodann auch

$$\cos \psi = 1, \quad \text{also} \quad h^2 - y^2 = \varrho \varrho_1$$

sein. Nun liegt aber kein Punkt von C außer A auf der Strecke $[B, B_1]$, folglich ist für die in Betracht kommenden Punkte $|y| > h$, und der letzten Bedingung wird somit nicht genügt.

Aus dieser Überlegung geht nun hervor, daß für alle Werte von t im Intervalle $t_A < t < t_A + \omega$

$$0 < \psi(t) < 2\pi$$

ist, während sich beim Grenzübergange $\lim t = (t_A + \omega)^-$ die Funktion $\psi(t)$ dem Werte 0 nicht nähern kann und deshalb notgedrungen dem Werte 2π zustreben muß. Mithin ist

$$\psi(t_A + \omega) = 2(n - n_1)\pi = 2\pi,$$

also ist

$$n - n_1 = 1.$$

Im Falle daß die dem Intervalle $t_A < t < t_A + \delta$ entsprechenden Punkte P links von $[B, B_1]$ liegen, ergibt sich in ähnlicher Weise, daß $n - n_1 = -1$ ist.

Zweiter Hilfssatz. *Sei T ein beliebiger Bereich und sei*

$$C: \qquad y = F(x), \qquad a \leqq x \leqq b$$

resp.

$$x = \Phi(y), \qquad \alpha \leqq y \leqq \beta$$

eine Kurve, welche höchstens mit Ausnahme ihrer Endpunkte in T liegt. Dabei soll die Funktion $F(x)$ bzw. $\Phi(y)$ in ihrem Definitionsintervalle eindeutig und stetig sein.[1] *Fallen nun beide Endpunkte von C mit Randpunkten von T zusammen, so wird T durch C höchstens in zwei Bereiche zerlegt. Sonst bilden die Punkte von T, welche nicht auf C liegen, immer noch einen einzigen Bereich.*

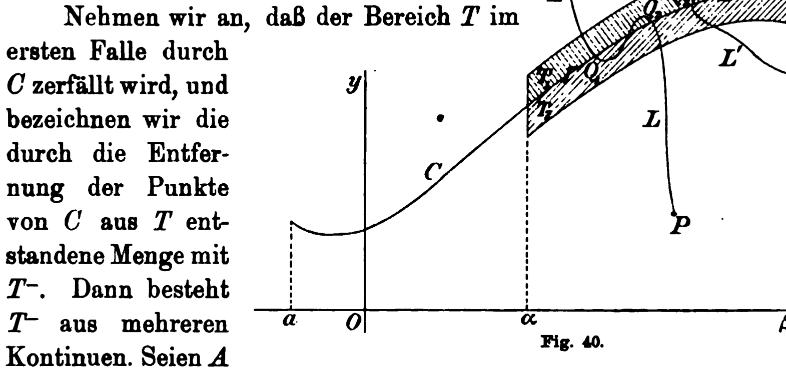


Fig. 40.

Nehmen wir an, daß der Bereich T im ersten Falle durch C zerfällt wird, und bezeichnen wir die durch die Entfernung der Punkte von C aus T entstandene Menge mit T^-. Dann besteht T^- aus mehreren Kontinuen. Seien A und B zwei Punkte von T^-, welche nicht miteinander verbunden werden können, ohne aus T^- auszutreten. Wir wollen zeigen, daß dann ein beliebiger dritter Punkt P von T^- entweder mit A oder mit B verbunden werden kann. Zu dem Zwecke verbinde man zunächst A mit P durch eine in T verlaufende reguläre Kurve

$$L: \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

wobei $t = 0$ dem Punkte A entspreche. Wird C von L getroffen, — sonst wird ja die Behauptung zugegeben, — so seien t_1 und t_2 der kleinste resp. der größte Wert von t, der einem Schnittpunkte dieser Kurven entspricht:

$$t = t_1, \quad Q_1 = (x_1, y_1); \qquad t = t_2, \quad Q_2 = (x_2, y_2).$$

Ferner verbinde man A mit B durch eine zweite in T verlaufende reguläre Kurve L' und zeichne man wieder den ersten und den letzten Schnittpunkt derselben mit C auf: $Q_1' = (x_1', y_1')$; $Q_2' = (x_2', y_2')$. Als-

[1] Wir sprechen den Satz noch für den zweiten Fall $x = \Phi(y)$ bloß der Einfachheit der Anwendung halber aus.

dann fasse man einen Bogen Γ von C ins Auge:

$$\Gamma: \qquad y = F(x), \qquad a < \alpha \leqq x < \beta < b,$$

welcher alle vier Punkte Q_1, Q_2, Q_1', Q_2' im Innern enthält.[1]) Jetzt kann man eine positive Größe h finden, derart, daß sowohl der Bereich (man vergleiche § 2, Beispiel 4)

$$T_1: \qquad \alpha < x < \beta, \qquad F(x) < y < F(x) + h$$

als auch der Bereich

$$T_2: \qquad \alpha < x < \beta, \qquad F(x) - h < y < F(x)$$

in T und somit auch in T^- liegen. Vermöge eines Teiles des Bogens AQ_1' von L' wird dann A mit einem der Bereiche T_1, T_2 durch eine ganz in T^- verlaufende reguläre Kurve verbunden. Darum wird es notwendig der andere dieser Bereiche sein, welcher durch einen Teil des Bogens BQ_2' von L' mit B verbunden wird, denn sonst könnten ja A und B mittels dieser beiden Bogen und einer dritten im betr. T_i verlaufenden regulären Kurve miteinander verbunden werden, ohne T^- zu verlassen. Andererseits wird P durch einen Teil des Bogens PQ_2 mit einem der beiden Bereiche T_1, T_2 verbunden, woraus dann folgt, daß P entweder mit A oder mit B durch eine in T^- verlaufende reguläre Kurve verbunden werden kann. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Um den Beweis des zweiten Teiles zu führen, nehmen wir an, daß etwa das Ende $x = b$, $y = F(b)$ von C in T liege, und konstruieren dann unter der Voraussetzung, daß es einen Punkt B gebe, welcher mit A nicht verbunden werden könnte, ohne T^- zu verlassen, wiederum die Punkte Q_1 und Q_2. Sei

$$\Gamma: \qquad y = F(x), \qquad a < \alpha < x < b$$

ein Bogen von C, welcher die Punkte Q_1 und Q_2 enthält, und man stelle die Bereiche T_1, T_2, wie vorhin, her. Darauf ergänze man dieselben unter Benutzung des 4. Satzes von § 2 mittels des Halbkreises

$$b < x < b + h, \quad F(b) - \sqrt{h^2 - (x - b)^2} < y < F(b) + \sqrt{h^2 - (x - b)^2}$$

1) Wir beschränken uns hier auf die erste Formel $y = F(x)$, da die Entwicklung im zweiten Falle $x = \Phi(y)$ parallel verläuft. Im übrigen genügt es, den Satz bloß im ersten Falle zu beweisen, um darauf durch die Transformation (4) von § 4: $x' = y$, $y' = -x$ dem zweiten Fall gerecht zu werden.

zu einem einzigen Bereiche $\overline{T}$, welcher übrigens bei eventueller weiterer Beschränkung von h auch in T^- liegen wird. Daraus sieht man, daß beide Punkte A und B mit $\overline{T}$ verbunden werden können, ohne T^- zu verlassen, und hiermit ist der Satz bewiesen.

§ 6. Der Fundamentalsatz.

Wir sind jetzt in der Lage, den bereits in § 4 angekündigten Hauptsatz zu beweisen, welchen wir in folgendem Umfange aussprechen.

Hauptsatz. *Eine einfache geschlossene reguläre Kurve teilt die Ebene in zwei Kontinuen, wovon das eine im Endlichen liegt, während sich das andere ins Unendliche erstreckt. Die Kurve bildet die volle Begrenzung eines jeden der beiden Bereiche.*

Nach dem ersten Hilfssatze von § 5 zerfallen die Punkte der Ebene in Bereiche mindestens zweier verschiedener Ordnungen in Bezug auf die vorgelegte Kurve C. Demgemäß wird die Ebene durch C mindestens in zwei verschiedene Bereiche zerlegt.

Andererseits schließt man vermöge des zweiten Hilfssatzes, daß die Ebene durch C höchstens in zwei Bereiche zerfällt wird. Man zerlege nämlich C nach dem Satze von § 1 in aufeinander folgende Bogen $C_1, \cdots, C_n$, wovon sich jeder durch eine Gleichung von der Gestalt

$$y = F(x) \quad \text{resp.} \quad x = \Phi(y)$$

darstellen läßt. Aus der vollen Ebene, welche doch einen Bereich T bildet, hebe man dann zuerst die Punkte von C_1 heraus. Dadurch wird die Ebene zufolge des 2. Hilfssatzes nicht zerstückelt. Hierauf hebe man noch die Punkte von C_2 heraus, wodurch wieder keine Zerlegung eintritt; usw. Erst der Bogen C_n stößt mit beiden Endpunkten an den Rand des vorhergehenden Bereiches und ruft somit eine Zerlegung höchstens in zwei Bereiche hervor. Darum wird die Ebene durch C in genau zwei Kontinuen zerlegt.

Nach dem Zusatze des 2. Satzes, § 5, liegen die Randpunkte dieser beiden Bereiche alle auf C.

Die entfernten Punkte der Ebene — d. h. alle Punkte, welche außerhalb eines bestimmten Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ liegen, — haben offenbar die Ordnung 0. Demgemäß können wir das Äußere der Kurve C als diejenige Punktmenge definieren, deren Punkte die Ordnung 0 haben. Das Innere besteht dann aus den Punkten von der

Ordnung 1 resp. aus denjenigen von der Ordnung -1. Dieser Bereich liegt innerhalb jenes Kreises, also im Endlichen.

Hiermit ist der Satz völlig bewiesen.

Satz. *Sei T ein endlicher Bereich, dessen Begrenzung von den Punkten einer einfachen geschlossenen regulären Kurve C gebildet wird. Dann fällt T mit dem Innern von C zusammen.*

Denn die Punkte von T liegen innerhalb C, sonst würde es ja möglich sein, einen Punkt von T mit einem entfernten Punkte der Ebene zu verbinden, ohne C zu überschreiten. Demnach sind also alle Bedingungen des Zusatzes vom 5. Satze von § 2 erfüllt, womit denn der Beweis geliefert ist.

Aufgabe 1. Sei C_1 eine einfache nicht-geschlossene reguläre Kurve. Man zeige, daß C_1 durch eine zweite derartige Kurve C_2 zu einer einfachen geschlossenen regulären Kurve C ergänzt werden kann.

Aufgabe 2. Man zeige, daß der Kurve C_1 der 1. Aufgabe zwei Bereiche T^+, T^- zugeordnet werden können, welche keinen gemeinsamen Punkt haben und beide an C_1 stoßen, derart, daß die Umgebung eines jeden Punktes von C_1, die Endpunkte ausgenommen, ausschließlich aus Punkten von C_1, T^+, T^- besteht, und zwar beteiligen sich Punkte sowohl von T^+ als von T^- an jeder solchen Umgebung.

Nach § 2, Aufgabe 4, wird die Umgebung eines jeden Punktes von C_1, der nur kein Endpunkt ist, durch C_1 in zwei Kontinuen zerlegt, wovon dann das eine in T^-, das andere in T^+ liegt.

Insbesondere können T^+ und T^- so gewählt werden, daß jeder Punkt dieser Bereiche von einem ihm entsprechenden Punkte von C_1 um weniger als die willkürlich vorgegebene positive Größe h absteht.

§ 7. Weitere Sätze aus der Analysis situs.

An den Hauptsatz des vorhergehenden Paragraphen, sowie an das zur Begründung desselben verwendete Verfahren knüpft sich noch eine Reihe von Sätzen aus der Analysis situs, wovon wir einige der wichtigsten in diesem Paragraphen betrachten wollen. Wir schicken zunächst den folgenden Satz voraus.

1. Satz. *Besteht der Rand eines Bereiches T zum Teil oder ganz aus einer einfachen geschlossenen regulären Kurve C und liegt ein Punkt von T in (außerhalb) C, so liegt T ganz in (außerhalb) C.*

Der Satz folgt unmittelbar aus dem 5. Satze von § 2.

Unter einem *Rückkehrschnitt* versteht man eine einfache reguläre geschlossene Kurve, welche in einem gegebenen Bereiche T gezogen ist. Als *Querschnitt* bezeichnet man jede einfache Kurve, deren Endpunkte sich am Rande von T befinden, sonst aber in T liegt, und wovon außerdem jeder an keinen Endpunkt stoßende Bogen regulär ist.

2. Satz. *Ein Rückkehrschnitt Γ zerlegt einen Bereich in zwei Bereiche, wovon der eine in Γ, der andere außerhalb Γ liegt. Jeder Punkt von Γ ist ein Randpunkt beider Bereiche.*

Der erste und der letzte Teil des Satzes ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes von § 6 und wird durch denselben Beweis begründet. Der zweite Teil ergibt sich aus dem 1. Satze.

Aus den vorhergehenden Entwicklungen folgert man noch den

Zusatz. *Besteht T aus dem Innern einer einfachen regulären geschlossenen Kurve, so liegt das Innere eines Rückkehrschnittes Γ in T, das Äußere von T liegt außerhalb Γ, und die übrigen Punkte der Ebene bilden einen endlichen, in T enthaltenen Bereich, dessen Begrenzung aus Γ und dem Rande von T besteht.*

Eine Menge $\mathfrak{R}$ der Randpunkte eines Bereiches T bildet ein einziges *Randstück*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) es gibt einen Rückkehrschnitt derart, daß alle auf der einen Seite desselben befindlichen Randpunkte von T zur Menge $\mathfrak{R}$ gehören;

b) es gibt keinen Rückkehrschnitt derart, daß ein Teil von $\mathfrak{R}$ innerhalb und ein anderer Teil außerhalb desselben liegt.

Erstrecken sich insbesondere mehrere Randkurven ins Unendliche, so werden diese hiernach stets nur als ein einziges Randstück gezählt. Ein Randstück, welches aus mehr als einem Punkte besteht, ist übrigens eine perfekte Menge.

3. Satz. *Ein Querschnitt, dessen Endpunkte in ein und demselben Randstücke liegen, zerlegt den Bereich in zwei Bereiche. Liegen dagegen seine Endpunkte in zwei verschiedenen Randstücken, so zerfällt der Bereich nicht.*

Man teile den Querschnitt zunächst in drei Bogen AB, BC, CD, wo A und D am Rande liegen, während sich BC in der Gestalt $y = F(x)$ resp. $x = \Phi(y)$ darstellen läßt; vgl. den Satz von § 1. Im übrigen sollen B und C gewöhnliche Punkte des Querschnitts, also keine Ecken sein. Sind AB und CD regulär, so zerlegen sie den Bereich T nicht; vgl. den 2. Hilfssatz, § 5. Im anderen Falle ist

eine weitere Überlegung nötig, welche auch sogleich erfolgen soll. Hebt man nun noch den Bogen BC fort, so zerfällt der Bereich nach jenem Hilfssatze höchstens in zwei Teile. Sei M: (x_0, y_0) ein Punkt des Bogens BC, welch letzterer in der Gestalt $y = F(x)$ darstellbar sei, und seien M_1: $(x_0, y_0 + h)$ und M_2: $(x_0, y_0 - h)$ zwei benachbarte Punkte von M. Ist soeben bei der Forthebung von BC keine Zerstückelung von T eingetreten, so kann man jetzt M_1 mit M_2 durch eine einfache reguläre Kurve verbinden, welche in T verläuft und den Querschnitt gar nicht, die Strecke $M_1 M_2$ nur in deren Endpunkten [redacted] trifft. Aus dieser Kurve nebst der Strecke $M_1 M_2$ läßt sich sodann ein Rückkehrschnitt von T zusammensetzen, welcher die Punkte A und B voneinander trennt. Das verstößt aber gegen die Voraussetzung, daß A und B zu einem einzigen Randstücke gehören.

Die vorhin erwähnte Ergänzung soll nun erbracht werden. Wir wollen zunächst bloß die Punkte von AB aus T fortheben. Die resultierende Menge $\mathfrak{M}$ hat nur innere Punkte, denn alle in T gelegenen Häufungsstellen von AB gehören zu dieser Menge. Demnach besteht $\mathfrak{M}$ aus einem oder mehreren Kontinuen. Seien P, Q zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{M}$. Ich behaupte: P und Q lassen sich durch eine einfache reguläre Kurve miteinander verbinden, ohne aus $\mathfrak{M}$ hinauszutreten. Durch eine solche Kurve L des Bereiches T können sie schon nach Voraussetzung verbunden werden. Trifft L die Kurve AB, so häufen sich die Schnittpunkte jedenfalls nicht in der Nähe von A, und darum kann man einen Bogen AB' von AB bestimmen, welcher inkl. des Endpunktes B' frei von Schnittpunkten ist. Fangen wir jetzt wieder von vorne an und heben wir bloß die Punkte von AB' aus T fort, so liegen P und Q in einem einzigen der sich also ergebenden Kontinuen, welches auch B' als Randpunkt besitzt. Letzteres wird aber nie zerstückelt, wenn der Bogen BB' nach Art des Vorganges beim Beweise des Hauptsatzes von § 6 in Teilbogen zerlegt wird und diese der Reihe nach fortgehoben werden.

Daraus folgt, daß $\mathfrak{M}$ aus einem einzigen Kontinuum besteht. Hierauf wendet man dieselbe Überlegung wieder an, indem man nun aus $\mathfrak{M}$ die Punkte von CD forthebt. So erhält man schließlich das Resultat, daß T durch Forthebung der Punkte von AB und CD nicht zerfällt, w. z. b. w.

Um jetzt den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, beginnen wir wieder mit der Forthebung der Bogen AB und CD, wodurch ein Bereich T^- entstehe. Die Randstücke von T^-, wozu AB und CD gehören, mögen mit $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ bezeichnet werden, wobei $\mathfrak{R}_1$ im End-

lichen liege. Sodann läß sich ein Rückkehrschnitt Γ ziehen, der $\mathfrak{R}_1$ im Innern enthält, während $\mathfrak{R}_2$ außerhalb Γ liegt. Man konstruiere jetzt zwei Streifen T_1, T_2, welche beide an den Bogen BC stoßen, wie dies beim Beweise des 2. Hilfssatzes, § 5, geschah, ohne einen Randpunkt von T^- zu umfassen. Diese Streifen liegen beide in T^- und werden durch einen auch in T^- gelegenen Bogen von Γ miteinander verbunden. Andererseits schließt man unter Wiederaufnahme des beim genannten Beweise verfolgten Gedankenganges, daß ein beliebiger Punkt P von T^- entweder mit T_1 oder mit T_2 durch eine einfache reguläre in T^- verlaufende Kurve verbunden werden kann. Damit ist der Satz völlig bewiesen.

Unter einem *einfach zusammenhängenden Bereiche* versteht man ein Kontinuum, welches nach Ausführung eines beliebigen Querschnitts zerfällt oder aber aus der ganzen Ebene besteht.[1]) Man zeigt leicht, daß jedes der beiden Stücke, in welche ein solcher Bereich zerlegt wird, wieder einfach zusammenhängt. Aus den vorhergehenden Entwicklungen folgert man ohne Schwierigkeit nachstehende Sätze.

4. Satz. *Damit ein berandeter Bereich T einfach zusammenhänge, ist notwendig und hinreichend, daß der Rand nur aus einem einzigen Stücke bestehe, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, daß einer der beiden Teile, in welche ein beliebiger Rückkehrschnitt den Bereich zerlegt, nur aus Punkten von T bestehe.*

5. Satz. *Ist T ein Bereich, dessen Rand aus n Stücken besteht, so läßt sich T durch Ausführung von $n-1$ Querschnitten in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandeln, und zwar kann man einerseits niemals mehr als $n-1$ Querschnitte ziehen, ohne T zu zerstückeln, während T andererseits niemals durch weniger als $n-1$ Querschnitte zu einem einfach zusammenhängenden Bereich wird.*

---

1) Diese Definition ist so verfaßt, daß die Eigenschaft eines Bereiches, einfach zusammenhängend zu sein, invariant gegenüber den linearen Transformationen der Ebene, Kap. 6, §§ 11, 16—19, bleibt. In der Physik kann es wohl vorkommen, daß die ganze Ebene exkl. eines einzigen Punktes nicht als einfach zusammenhängend gelten soll; man denke etwa an das Kräftefeld

$$X = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad Y = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \int_{(a,b)}^{(x,y)} X\,dx + Y\,dy = \tan^{-1}\frac{y}{x} + C.$$

Dasselbe ist nicht konservativ. Demgemäß empfiehlt es sich hier, ein berandetes Kontinuum, welches alle außerhalb eines bestimmten Kreises gelegenen Punkte umfaßt, als mehrfach zusammenhängend anzusehen, selbst wenn nur ein Randstück vorhanden ist.

Definition. Ein Bereich T heißt *n-fach zusammenhängend,* wenn er durch Ausführung von $n-1$ Querschnitten in einen einfach zusammenhängenden verwandelt werden kann. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß dessen Rand aus n Stücken bestehe.

6. Satz. *Sind n einfache reguläre geschlossene Kurven gegeben, derart daß jede derselben außerhalb aller anderen liegt, so bilden die Punkte der Ebenen, welche gleichzeitig außerhalb aller der Kurven liegen, einen n-fach zusammenhängenden Bereich.*

Sind $n-1$ solche Kurven gegeben und liegen sie ebenfalls außerhalb einander, jedoch innerhalb einer n^{ten}, so begrenzen alle n Kurven zusammengenommen einen endlichen n-fach zusammenhängenden Bereich.

§ 8. Innere Normale und Integration in positivem Sinne über den Rand eines Bereiches.

Unter der Tangente und der Normale einer regulären Kurve

$$C: \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

in einem gewöhnlichen Punkte $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = \varphi(t_0)$ versteht man die Gerade

$$f'(t_0)(y - y_0) = \varphi'(t_0)(x - x_0)$$

resp.

$$\varphi'(t_0)(y - y_0) + f'(t_0)(x - x_0) = 0.$$

Sei T ein Bereich, dessen Begrenzung zum Teil oder ganz aus einer einfachen regulären geschlossenen Kurve C besteht, wobei sich übrigens in der Nähe keines Punktes derselben zu C nicht gehörige Randpunkte von T befinden dürfen. Als *innere Normale* in einem gewöhnlichen Punkte P von C bezeichnen wir dann denjenigen von P ausgehenden Halbstrahl n, welcher mit der Normale zusammenfällt und zunächst in den Bereich T eintritt. Sei ν der Winkel, welchen n mit der positiven x-Achse bildet, und sei $\tau = \nu - \pi/2$. Denjenigen Halbstrahl, der von P ausgeht und den Winkel τ mit der positiven x-Achse bildet, nennen wir die *positive Tangente* im Punkte P. Er liegt in der Tangente in diesem Punkte. Ferner ist

$$\cos\tau = \frac{\varepsilon f'(t)}{\sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2}}, \qquad \sin\tau = \frac{\varepsilon\varphi'(t)}{\sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2}},$$

wo ε, je nach der Wahl des Parameters t, den Wert 1 oder -1 hat und sich später als die Ordnung eines innern Punktes von C erweisen wird.

Ist dagegen eine einfache reguläre geschlossene Kurve vorgelegt, welche nicht als Randkurve eines Bereiches angesehen wird, so soll die positive Tangente von C, wie folgt, erklärt werden. Man betrachte das Innere T von C; dann wird der Kurve C, als Randkurve des Bereichs T aufgefaßt, nach der vorstehenden Definition eine positive Tangente zugeordnet, und letztere ist es eben, welche als die positive Tangente der vorgelegten Kurve C definiert werden soll.

Satz. *Hat ε in einem Punkte von C den Wert* 1, *so hat ε in jedem Punkte von C diesen Wert.*

Der Satz ist gleichbedeutend mit folgendem: *Die Ebene der Analysis ist keine Doppelfläche.*

Wir setzen voraus, daß T im Innern von C liegt. Der Beweis für den anderen Fall verläuft diesem parallel.

Sei P: (x_0, y_0) ein gewöhnlicher Punkt von C. Man nehme die innere Normale und die positive Tangente zur positiven y'- resp. x'-Achse eines neuen Koordinatensystems. Arithmetisch heißt das, daß man die Transformation von § 4 ausübt:

(1) $$\begin{cases} x = x'\cos\tau_0 - y'\sin\tau_0 + x_0, \\ y = x'\sin\tau_0 + y'\cos\tau_0 + y_0, \end{cases}$$

und dann die transformierte Kurve

$$C'\colon \qquad x' = f_1(t), \qquad y' = \varphi_1(t)$$

ins Auge faßt. Die Ordnung des Innern von C' ist bekanntlich gleich der Ordnung des Innern von C und werde ε' genannt. Der Beweis wird nun geliefert, indem wir feststellen, daß

$$\cos\tau_0 = \frac{\varepsilon' f'(t_0)}{\sqrt{f'(t_0)^2 + \varphi'(t_0)^2}}, \qquad \sin\tau_0 = \frac{\varepsilon' \varphi'(t_0)}{\sqrt{f'(t_0)^2 + \varphi'(t_0)^2}}$$

ist. In der Tat ergibt sich aus (1):

(2) $$\begin{cases} f'(t) = f_1'(t)\cos\tau_0 - \varphi_1'(t)\sin\tau_0, \\ \varphi'(t) = f_1'(t)\sin\tau_0 + \varphi_1'(t)\cos\tau_0, \end{cases}$$

(3) $$f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 = f_1'(t)^2 + \varphi_1'(t)^2 > 0.$$

Im übrigen ist

(4) $$\varphi_1'(t_0) = 0, \qquad \text{also} \qquad f_1'(t_0)^2 > 0.$$

Anderseits seien B: $(x' = 0,\ y' = h)$ und B_1: $(x' = 0,\ y' = -h)$ $(h > 0)$ zwei Punkte der Umgebung von P. Dann hat B_1, als äußerer Punkt von T, die Ordnung 0. Dagegen wird der innere Punkt B,

wie man aus dem Beweisverfahren des 1. Hilfssatzes von § 5 erkennt, die Ordnung 1 haben, falls x' in der Nähe von P zugleich mit t wächst; im anderen Falle hat B die Ordnung -1. Demgemäß wird gleichzeitig entweder

$$\left.\frac{dx'}{dt}\right|_{t=t_0} = f_1'(t_0) > 0, \qquad \varepsilon' = 1,$$

oder

$$\left.\frac{dx'}{dt}\right|_{t=t_0} = f_1'(t_0) < 0, \qquad \varepsilon' = -1$$

sein, also hat man in allen Fällen

$$\frac{\varepsilon' f_1'(t_0)}{\sqrt{f_1'(t_0)^2 + \varphi_1'(t_0)^2}} = \frac{\varepsilon' f_1'(t_0)}{|f_1'(t_0)|} = 1.$$

Setzt man endlich in (2) $t = t_0$ und multipliziert man diese Gleichungen mit

$$\varepsilon' / \sqrt{f'(t_0)^2 + \varphi'(t_0)^2} = \varepsilon' / \sqrt{f_1'(t_0)^2 + \varphi_1'(t_0)^2},$$

so kommt

$$\cos \tau_0 = \frac{\varepsilon' f'(t_0)}{\sqrt{f'(t_0)^2 + \varphi'(t_0)^2}}, \qquad \sin \tau_0 = \frac{\varepsilon' \varphi'(t_0)}{\sqrt{f'(t_0)^2 + \varphi'(t_0)^2}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

In der Integralrechnung bedient man sich des geometrischen Begriffs des Sinnes, in welchem eine Kurve durchlaufen wird, um das Vorzeichen festzulegen, welches einem über den Rand eines Bereichs erstreckten Integrale beigelegt werden soll. Arithmetisch entsprechen wir diesem Bedürfnisse durch folgende Definition, welche an den soeben erklärten Begriff der positiven Tangente anknüpft. Sei S ein Bereich, dessen Rand C aus einer oder mehreren einfachen regulären geschlossenen Kurven besteht, und seien P, Q zwei längs C eindeutige stetige Funktionen von x, y. Unter dem in positivem Sinne über C erstreckten Integrale

$$\int_C P dx + Q dy \tag{5}$$

verstehen wir die Summe der über jede Kurve des Randes erstreckten Integrale

$$\int_0^l (P \cos \tau + Q \sin \tau)\, ds,$$

wobei τ den von der positiven Tangente mit der positiven x-Achse gebildeten Winkel und l die Länge der jeweiligen Randkurve bedeutet. Unter ersichtlicher Modifikation des Wortlauts paßt die

Definition auch für den Fall einer einfachen regulären geschlossenen Kurve C, welche nicht als Randkurve eines Bereiches aufgefaßt wird.

Satz. *Sei S ein von einer oder mehreren einfachen regulären geschlossenen Kurven begrenzter Bereich und seien S_1, S_2 die beiden Bereiche, in welche S durch einen bestimmten regulären Querschnitt Γ zerlegt wird. Dann ist*

$$\int_C P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy,$$

wobei die Integrale je in positivem Sinne resp. über C, C_1, C_2 erstreckt werden.

Seien C', C'' die zu C_1 resp. C_2 gehörigen Teile von C, so daß sich also C_1 aus C' und Γ, C_2 aus C'' und Γ zusammensetzt. In jedem gewöhnlichen Punkte von C' fällt die innere Normale des Bereiches S_1 mit der innern Normale von S zusammen und darum liefert C' denselben Beitrag zum ersten wie zum zweiten Integrale. Ebenso liefert C'' denselben Beitrag zum ersten wie zum dritten Integrale. Dagegen bildet die innere Normale von S_1 in jedem gewöhnlichen Punkte von Γ den Winkel π mit der innern Normale von S_2 in demselben Punkte, was zur Folge hat, daß der von Γ herrührende Beitrag zum zweiten Integral entgegengesetzt gleich dem entsprechenden Beitrag zum dritten Integral ist.

§ 9. Zerlegung eines regulären Bereiches in Teilbereiche von normalem Typus.

Unter einem *regulären Bereiche* verstehen wir einen Bereich S, wie er in Kap. 2, § 2 des näheren definiert ist. Der allgemeinste derartige Bereich entsteht, indem man mit dem Innern einer einfachen regulären geschlossenen Kurve (nebst Rande) beginnt und in diesem Bereiche einen Rückkehrschnitt zieht. Das Innere der letzten Kurve wird aus dem genannten Bereiche entfernt, und der Prozeß wird endlich oft wiederholt. Alsdann bringt man neue Randpunkte an, indem man Querschnitte konstruiert, deren Punkte dann doppelt zählen. Endlich verwandelt man der Reihe nach in Randstücke eine endliche Anzahl regulärer Kurvenstücke, deren jedes entweder ganz im Innern des jeweiligen Bereichs liegt oder höchstens einen Endpunkt am Rande desselben hat; auch diese Punkte werden doppelt gezählt. Selbstverständlich können einige oder auch alle die Kurven dieser verschiedenen Gattungen bis auf die äußere Begrenzung fehlen.

Wir wollen in diesem Paragraphen einen arithmetischen Beweis für eine gewisse Zerlegung eines regulären Bereiches geben, deren man sich bei der Ableitung einer Reihe von grundlegenden Sätzen der Analysis bedient. Es handelt sich namentlich um die Arithmetisierung des Bereiches der unabhängigen Veränderlichen in der Integralrechnung und der Funktionentheorie.

Definition eines Bereiches σ. Unter einem *Bereich* σ verstehen wir zunächst einen zweidimensionalen abgeschlossenen Bereich, welcher aus den Punkten (x, y) besteht, wofür

$$0 \leqq x \leqq a, \qquad \varphi(x) \leqq y \leqq f(x)$$

ist. Hierbei sollen $f(x)$, $\varphi(x)$ im abgeschlossenen Intervalle $0 \leqq x \leqq a$ eindeutige, stetige, mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehene Funktionen von x sein, welche innerhalb des Intervalls der Ungleichung genügen:

$$\varphi(x) < f(x), \qquad a < x < b.$$

Für unsere Zwecke sind es insbesondere Bereiche σ von zweierlei Typen, die in Betracht kommen.

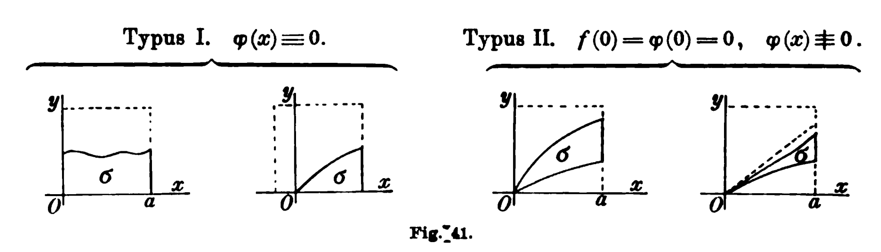


Fig. 41.

Ein besonderer Fall des zweiten Typus ist die Schnabelspitze, doch kann die Gerade $y = x\varphi'(0)$ sowohl von einer, als auch von beiden Kurven unendlich oft getroffen werden. Beispiel:

$$\varphi(x) = x^3 \sin 1/x, \qquad x > 0; \qquad \varphi(0) = 0.$$

Hierauf erweitern wir die Definition des Bereiches σ, so daß sie jeden Bereich umfaßt, welches durch eine oder mehrere der folgenden Transformationen aus einem der soeben definierten Bereiche σ hervorgeht:

a) eine Parallelverschiebung;

b) eine Drehung um den Winkel $\pi/2$;

c) eine Spiegelung in der x-Achse.

Arithmetisch wird der neue Bereich σ mittels einer der Transformationen definiert:

$$\begin{cases} x - x_0 = \varepsilon x', \\ y - y_0 = \eta y', \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x_0 = \varepsilon y', \\ y - y_0 = \eta x', \end{cases}$$

wobei (x, y) ein beliebiger Punkt des neuen Bereiches σ, (x', y') den entsprechenden Punkt eines der vorhin definierten Bereiche σ' bedeutet, während die Koeffizienten ε, η unabhängig voneinander die Werte 1 und -1 annehmen.

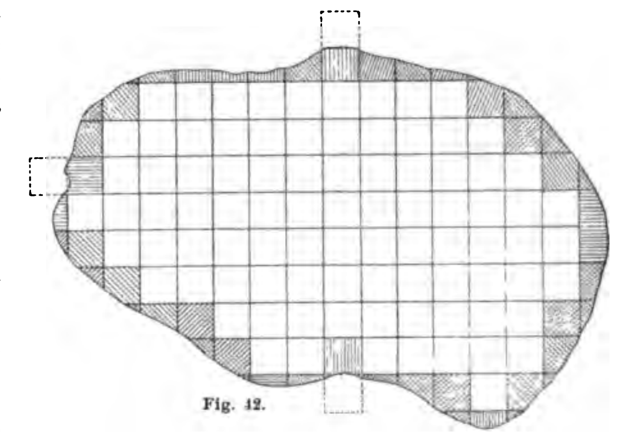
Wir wenden uns nunmehr zu der in Aussicht genommenen Zerlegung, welche durch nachstehenden Satz genau präzisiert wird.

Theorem. *Ein regulärer Bereich läßt sich in eine endliche Anzahl von Bereichen σ zerlegen.*

Um das Wesentliche an dem Beweise hervortreten zu lassen, wollen wir zuvörderst voraussetzen, daß der Rand C des vorgelegten Bereiches S lediglich aus einfachen regulären geschlossenen sich gegenseitig nicht treffenden Kurven ohne Ecken bestehe. Hierbei wird man bereits mit Bereichen σ von Typus I auskommen. Man teile die Ebene mittels der Geraden

$$x = \frac{m}{2^\mu}, \qquad y = \frac{n}{2^\mu}, \qquad m, n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \cdots,$$

in ein Quadratnetz ein. Hier soll die natürliche Zahl μ zunächst so groß genommen werden, daß einige der Quadrate inklusive ihrer Ränder innerhalb S liegen. Solche werden zu den betreffenden Bereichen σ gerechnet. Und nun wollen wir zeigen, daß μ fernerhin so gewählt werden kann, daß auch die übrigen Quadrate, welche einen inneren Punkt mit S gemein haben, entweder einzeln oder in Paaren durch C in zwei Bereiche zerlegt werden, wovon der eine in S liegt und ein Bereich σ von Typus I ist oder aus zwei solchen besteht.


Fig. 12.

Um einen beliebigen Punkt P einer Randkurve

$$C: \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

kann man einen Kreis beschreiben, welcher einen P enthaltenden Bogen derart abgrenzt, daß die Schwankung von τ, wo

$$\cos\tau = \frac{f'(t)}{\sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2}}, \qquad \sin\tau = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2}}$$

ist, in den Punkten desselben die Größe $\pi/6$ nicht überschreitet:

$$|\tau - \tau'| \leqq \frac{\pi}{6}.$$

Ferner soll der Kreis außer diesem Bogen keinen weiteren Randpunkt von S in seinem Innern oder auf seinem Rande enthalten. Es ist klar, daß jeder kleinere Kreis um P derselben Eigenschaften teilhaftig wird. Sei ϱ die obere Grenze der Radien solcher Kreise, welche den vorstehenden Bedingungen genügen. Ferner sei h die untere Grenze dieser Werte ϱ für die sämtlichen Punkte P des ganzen Randes von S. Daß $h > 0$ ist, beweist man in wohl bekannter Weise.

Jetzt wollen wir μ so annehmen, daß die Diagonale eines Quadrats des Netzes von der Seitenlänge $\varkappa$ kleiner als $h/2$ ausfällt:

$$\varkappa = \frac{1}{2^\mu}, \quad \varkappa\sqrt{2} < \frac{h}{2},$$

damit ein Quadrat, welches einen Randpunkt P im Innern oder auf seiner Grenze enthält, nebst den acht anstoßenden Quadraten innerhalb eines um P beschriebenen Kreises vom Radius h' liegen wird, wobei $2\varkappa\sqrt{2} < h' < h$ ist. Wie man sieht, gelten die also bestimmten Größen $\varkappa, h'$ gleichmäßig für den ganzen Rand von S.

Hiermit ist μ endgültig bestimmt. Die Quadrate des Netzes, welche einen innern Punkt mit S gemein haben, liegen zum Teil nebst ihren Rändern ganz innerhalb S und sind bereits als Bereiche σ aufgenommen worden. Um für die übrigen noch die vorhin aufgestellte Behauptung zu erweisen, zeichnen wir zuerst alle Punkte von C auf, in welchen C parallel zur x-Achse verläuft. Sei P ein solcher Punkt und sei

$$Q: \ x_0 \leqq x \leqq x_0 + \varkappa, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \varkappa,$$

ein Quadrat, welches sowohl P (im Innern oder am Rande) als auch innere Punkte von S enthält. Dann lassen sich diejenigen Punkte

von C, welche in Q und den acht benachbarten Quadraten:

$$x_0 - \varkappa \leq x \leq x_0 + 2\varkappa, \quad y_0 - \varkappa \leq y \leq y_0 + 2\varkappa$$

liegen, durch die Gleichung darstellen:

$$y = f(x),$$

wo $f(x)$, sowie $f'(x)$ im Intervalle $x_0 - \varkappa \leq x \leq x_0 + 2\varkappa$ stetig sind und im übrigen

$$|f'(x)| \leq 1/\sqrt{3}$$

ist. Trifft diese Kurve keine zur x-Achse parallele Seite von Q, so zerlegt sie Q schon in zwei Bereiche, wovon der eine in S liegt und ein Bereich σ von Typus I ist. Im anderen Falle sei es die Seite $y = y_0 + \varkappa$, welche von C getroffen wird, und man betrachte das Rechteck:

$$R: \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + \varkappa, \qquad y_0 \leq y \leq y_0 + 2\varkappa.$$

Da die Schwankung der Funktion $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leq x \leq x_0 + \varkappa$ die Größe $\varkappa/\sqrt{3}$ nicht übertrifft, vgl. Kap. 1, § 6, Aufgabe 4, so gilt für R derselbe Schluß wie vorhin für Q. Der also gewonnene Bereich σ wird nicht immer in Q liegen. Man kann ihn aber stets durch die Gerade $y = y_0 + \varkappa(1 - 1/\sqrt{3})$ in zwei neue Bereiche σ spalten, deren jeder in einem Quadrate mit der Seitenlänge $\varkappa$ liegt.

Jetzt ziehe man einen zweiten, dem Innern des soeben benutzten Quadrats Q bzw. Rechtecks R (beide mögen der Kürze halber mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden) nicht angehörigen Punkt in Betracht, in welchem C parallel zur x-Achse verläuft, und stelle man dieselbe Überlegung wieder an. Das dabei benutzte neue Rechteck $\mathfrak{R}'$ wird keinen innern Punkt mit dem früheren $\mathfrak{R}$ gemein haben. Denn sonst hätten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ ein Quadrat gemein, welches dann im Innern oder auf seinem Rande Punkte von zwei getrennten Bogen des Randes C enthielte, und das geht eben nicht an.

Man wiederhole das Verfahren, so lange noch unerledigte Punkte vorhanden sind, in welchen C parallel zur x-Achse verläuft. Der Prozeß muß eventuell schließen, da es ja nur eine endliche Anzahl von Quadraten gibt, die überhaupt in Betracht kommen können. Nachdem nun diese Punkte alle erledigt sind, ziehe man die Punkte heran, in welchen C parallel zur y-Achse verläuft, und verfahre mit diesen in ähnlicher Weise. Hierdurch entsteht eine zweite Reihe von Bereichen σ, die jedenfalls nicht übereinander greifen. Daß sie aber auch nicht mit den früheren Bereichen σ in Kollision geraten, geht

daraus hervor, daß τ hier einen Wert hat, wofür $|\cot \tau| \leq 1/\sqrt{3}$ ist, während ja bei den anderen Bereichen $|\tan \tau| \leq 1/\sqrt{3}$ war.

Jetzt bleibt eine endliche Anzahl von Randbogen übrig, welche nirgends parallel mit einer Koordinatenachse sind. Folglich wird jedes Quadrat, in welches einer dieser Bogen eintritt, dadurch in zwei Bereiche zerlegt, wovon der eine in S liegt und entweder schon ein Bereich σ ist oder durch eine Parallele zu einer seiner Seiten in zwei Bereiche σ zerfällt. Endlich kann es noch Quadrate geben, welche nur eine Ecke mit C gemeinsam haben, sonst aber in S liegen. Ein solches Quadrat kann direkt als ein Bereich σ aufgenommen werden. Will man aber vermeiden, daß ein Bereich σ bloß mit einem Punkte an C heranreicht, so kann man das in Rede stehende Quadrat zunächst mit einem anstoßenden Bereich σ vereinigen, um dann den neuen Bereich, wie ersichtlich möglich, in Bereiche σ der bisher betrachteten Arten wieder zu zerlegen.

Es könnte noch der Einwand erhoben werden, daß die Ränder der in Betracht gezogenen Bereiche σ stellenweise zusammenfallen, daß also der vorgelegte Bereich S nun doch nicht so zerlegt sei, wie in Aussicht genommen. Für die Anwendungen ist dies nicht störend. Um jedoch eine einwandfreie Formulierung des Satzes zu haben, können wir uns, wie folgt, ausdrücken.

Ein regulärer Bereich S läßt sich durch eine endliche Anzahl von Bereichen σ überdecken, welche höchstens in ihren Randpunkten übereinander greifen und jeden Punkt von S mindestens einmal enthalten.

Hiermit ist der Beweis des Satzes in dem in Aussicht genommenen Umfange erbracht. Will man μ durch einen größeren ganzzahligen Wert ersetzen, so läßt sich die neue Einteilung dadurch bewerkstelligen, daß jeder der obigen Bereiche für sich in leicht ersichtlicher Weise in kleinere Bereiche σ zerlegt wird.

Ecken und Spitzen. Indem wir jetzt an den Fall herantreten, daß Ecken und Spitzen vorhanden sind, setzen wir immer noch voraus, daß der Rand von S aus einfachen regulären geschlossenen sich gegenseitig nicht treffenden Kurven bestehe. Durch passende Wahl des Index μ des Netzes können wir zunächst erreichen, daß die Umgebung einer Ecke oder Spitze in Bereiche σ zerlegt wird. Hebt man diese Bereiche fort, so hat der neue Bereich S' nur Ecken, — das Auftreten von Spitzen kann man hier offenbar durch geschickte Wahl jener Bereiche σ vermeiden, — und zwar wird stets mindestens eine Seite einer Ecke von einer geradlinigen Strecke gebildet, welche in einer Geraden des Netzes liegt. Jetzt wird man

die frühere Überlegung mit der folgenden Modifikation wiederholen. Der Rand C' von S' besteht aus einer endlichen Anzahl regulärer Kurvenstücke. Sei P ein beliebiger Punkt von C', und man beschreibe einen Kreis um P, dessen Inneres durch C' in zwei Kontinuen zerlegt wird. Der Radius dieses Kreises soll nun so beschränkt werden, daß der Kreis höchstens eine Ecke von C' enthält, und daß außerdem die Schwankung von τ in den im Kreise befindlichen Punkten ein und desselben Kurvenstückes die Größe $\pi/6$ nicht überschreitet. Von hier ab verläuft der Beweis wie im früheren Falle.

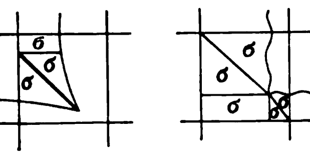


Fig. 43.

Der allgemeinste Fall wird nunmehr auf die bereits erledigten zurückgeführt, indem man S durch eine endliche Anzahl regulärer Querschnitte in Bereiche der vorstehenden Art verwandelt. Jeder dieser Querschnitte kann als eine geradlinige, einer Koordinatenachse parallele Strecke genommen werden.

Aufgabe. Man zeige, daß der Gesamtflächeninhalt der an den Rand C stoßenden Bereiche σ durch passende Wahl von μ beliebig klein gemacht werden kann.

§ 10. Zusammenstellung eines einfach zusammenhängenden Bereiches aus Teilbereichen von normalem Typus.

Nach dem Hauptsatze von § 3 kann ein Bereich T in eine unendliche Reihe von Teilbereichen entwickelt werden, wovon ein jeder aus einer endlichen Anzahl von Quadraten besteht. Im Falle T im Endlichen liegt und einfach zusammenhängt, wurde auch gezeigt, daß die Teilbereiche T_n ebenfalls einfachen Zusammenhang aufweisen. An das Resultat des vorhergehenden Paragraphen anknüpfend wollen wir jetzt beweisen, daß ein einfach zusammenhängender regulärer Bereich S durch eine endliche Reihe dargestellt werden kann, deren einzelne Glieder je aus einem Bereich σ bestehen, während die Summe der ersten n Glieder derselben stets einen einfach zusammenhängenden Bereich bildet. Wir sprechen den Satz, wie folgt, aus:

Hauptsatz. *Ist S ein einfach zusammenhängender regulärer Bereich, und sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ die Bereiche σ, in welche sich S nach dem Satze von § 9 zerlegen läßt, so existiert eine Reihe einfach zusammenhängender Bereiche $S_1, \ldots S_N$, wovon der erste S_1 mit σ_1 und der letzte S_N mit S zusammenfällt und welche im übrigen so beschaffen sind, daß S_k aus S_{k-1} durch Hinzufügung von σ_k entsteht.*

Wir wollen zuerst voraussetzen, daß der Bereich σ_1 an den Rand C von S stößt. Seien $\sigma_2, \ldots \sigma_p$ die weiteren Bereiche σ, welche ebenfalls an C stoßen. Dann zerfällt der Rand von σ_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ in zwei Teile, wovon der eine, — entweder ein Punkt oder ein Bogen, — zum Rande von S gehört, während der andere einen Querschnitt Γ_i von S bildet. Außerdem stößt σ_i an σ_{i-1}, sowie an σ_{i+1} längs eines Bogens von Γ_i, aber an keinen weiteren dieser Bereiche, sofern wir die Bereiche σ von vornherein so bestimmen, daß keiner davon bloß mit einem Punkte an den Rand von S reicht. Um nun von S_N auf S_{N-1} herabzusteigen, heben wir σ_2 aus S heraus. Da nämlich Γ_2 einen Querschnitt von S bildet, so wird S nach dem 3. Satze von § 7 et seq. durch denselben in zwei einfach zusammenhängende Bereiche zerlegt, wovon der eine aus σ_2, der andere, S_{N-1}, aus den $N-1$ übrigen Bereichen σ besteht. Wiederholt man das Verfahren, indem man der Reihe nach $\sigma_3, \ldots \sigma_p$ forthebt, so erhält man sukzessive die weiteren Bereiche S_{N-p+1}, welche, ebenso wie S_{N-1}, alle einfach zusammenhängen.

Bei der Ausführung des nächsten Schrittes, nämlich bei der Forthebung eines Bereiches σ_{p+1}, kann es indessen vorkommen, daß der Bereich S_{N-p} zerfällt. Wir wollen aber zeigen, daß diesem Übelstande durch passende Wahl von σ_{p+1} stets vorgebeugt werden kann. In der Tat wird S_{N-p+1} einen Punkt (x, y) umfassen, wofür mindestens einer der folgenden vier Fälle eintritt:

a) x ist größer als das x irgend eines Punktes von σ_1,
b) x „ kleiner „ „ x „ „ „ „ σ_1,
c) y „ größer „ „ y „ „ „ „ σ_1,
d) y „ kleiner „ „ y „ „ „ „ σ_1.

Nehmen wir an, Fall a) liege vor. Sei dann X der größte Wert von x, welcher einem Randpunkte von S_{N-p+1} entspricht. Sodann sei Y der größte Wert von y, welcher einem der Randpunkte (X, y) entspricht. Hiermit erhält man einen Punkt (X, Y) des Randes von S_{N-p+1}, in welchem zwei Seiten eines rechteckigen, S_{N-p+1} angehörigen Bereiches σ zusammenstoßen, und überdies gehören diese Seiten zum Rande von S_{N-p+1}. Eine weitere Seite resp. die beiden übrigen Seiten dieses Bereiches bilden dann einen Querschnitt von S_{N-p+1}.

Infolgedessen wird S_{N-p+1} durch Forthebung dieses Bereiches nicht zerstückelt, und hiermit hat man einen solchen Bereich σ_{p+1} erlangt, wie man ihn sucht.

Durch Wiederholung dieser Überlegung vermeidet man jedesmal eine etwaige Zerstückelung des jeweiligen Bereiches S_k und gelangt somit schließlich zum Bereiche $S_1 = \sigma_1$.

Wir haben vorausgesetzt, daß σ_1 an den Rand von S stößt. Ist das nicht der Fall, so seien $\sigma_1', \sigma_2', \ldots \sigma_q'$ die Bereiche, welche an den Rand von S stoßen, und man hebe zunächst diese Bereiche der Reihe nach fort. Alsdann zeigt man genau so wie vorhin, daß man stets einen weiteren von σ_1 verschiedenen Bereich σ fortheben kann, ohne den jeweiligen Bereich S_k zu zerstückeln. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Für andere einfach zusammenhängende Bereiche läßt das Theorem auf eine Entwicklung schließen, welche mit dem letzten Satze von § 3 im wesentlichen identisch ist.

Zusatz.[1]) *Sei T ein einfach zusammenhängender Bereich, und sei A ein Punkt von T. Dabei soll aber der Fall ausgeschlossen werden, daß T sich ins Unendliche erstreckt und einen im Endlichen gelegenen Rand hat. Dann läßt sich eine unendliche Folge einfach zusammenhängender, den Punkt A im Innern enthaltender regulärer Bereiche T_n angeben, welche folgendermaßen beschaffen sind:*

a) *T_n liegt inkl. seines Randes in T;*

b) *T_{n+1} geht aus T_n hervor, indem ein Quadrat zu T_n hinzugefügt wird; dabei braucht die Diagonale dieses Quadrats, sowie der größte Durchmesser von T_1 eine vorgegebene positive Größe h nicht zu überschreiten; im übrigen darf T_1 als Quadrat gewählt werden;*

c) *jeder vorgegebene Punkt von T, sowie jeder vorgegebene inklusive seines Randes in T gelegene Bereich wird eventuell innerhalb eines bestimmten T_m, und daher auch innerhalb jedes späteren T_n, $n > m$, zu liegen kommen.*

Der Beweis von Satz B′), Kap. 4, § 3 ergibt sich direkt aus diesem Satze, indem man bloß Satz B) des genannten Paragraphen auf den Bereich T_n anwendet und bemerkt, daß die in T_n einmal definierte Funktion $F(x, y)$ beim Übergange von T_n zu T_{n+1} keine Änderung mehr erleidet.

Anwendung auf mehrdeutige Funktionen.

Die Sätze von Kap. 1, § 10 lassen sich auf Funktionen zweier Variabelen, wie folgt, übertragen.

1) Der Zusatz ist nur für den Fall ausgesprochen, daß T ein Kontinuum ist. Soll der Rand von T mit zum Bereiche gerechnet werden, so sind leichte Modifikationen in der Formulierung nötig; vgl. Anm. 1), S. 156.

1. Satz. *Jeder Stelle* (x_0, y_0) *des endlichen*[1]) *einfach zusammenhängenden Definitionsbereichs* T *einer mehrdeutigen Funktion sollen sich*

a) *eine bestimmte Umgebung*

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < h, \qquad \textit{und}$$

b) *eine Reihe je in derselben ausnahmslos definierter eindeutiger Funktionen*

$$z_1 = f_1(x, y), \quad z_2 = f_2(x, y), \cdots,$$

so zuordnen lassen, daß zwischen diesen Funktionswerten und den Werten der vorgelegten mehrdeutigen Funktion in der genannten Umgebung eine ein-eindeutige Beziehung statt hat.

Dann wird eine ähnliche Zusammenfassung der Werte der mehrdeutigen Funktion auch im großen möglich sein; d. h. es wird eine Reihe je im ganzen Definitionsbereiche T *eindeutig definierter Funktionen geben, deren Werte geradezu den Wertvorrat der mehrdeutigen Funktion einmal, aber auch nur einmal liefern.*

Wir beschränken den Beweis auf die beiden für die Praxis wichtigen Fälle:

i) der Bereich T ist regulär, § 9, und möge demgemäß mit S bezeichnet werden;

ii) der Bereich T ist ein Kontinuum, wozu also die Randpunkte nicht gerechnet werden.

Im Falle i) bedarf vor allem der Begriff: *Umgebung eines Randpunktes,* einer näheren Erklärung. Ist P ein Punkt des Randes C von S und beschreibt man einen Kreis um P als Mittelpunkt, so wird das Innere des Kreises durch C im allgemeinen in eine endliche Anzahl von Bereichen zerlegt, wovon n in S liegen. Bei Verkleinerung des Radius kann sich die Zahl n ändern, doch sieht man, daß n für alle unterhalb einer bestimmten Größe gelegenen Radien einen festen Wert hat. Ist nun dieser Wert von n größer als 1, so müssen die n Bereiche als getrennte Umgebungen des Randpunktes P gerechnet werden, welch letzterer auch als ein n-facher Randpunkt gezählt wird.

Nach dieser Erklärung verläuft der Beweis im Fall i) ähnlich wie in Kap. 1, § 10, indem man S zunächst in Bereiche σ zerlegt und dann zeigt, daß, wenn der Satz nicht richtig wäre, er dann

---

1) Der immer noch als einfach zusammenhängend vorausgesetzte Bereich T darf sich auch ins Unendliche erstrecken, sofern der Rand, falls einer vorhanden ist, nicht ganz im Endlichen liegt.

mindestens für einen Bereich σ' falsch sein müßte. Hierauf zerlegt man σ' weiter in ersichtlicher Weise.

Zur Behandlung von Fall ii) zieht man bloß den Zusatz, S. 187 heran und wendet das Ergebnis von Fall i) auf die Bereiche T_n an. Von hier ab verläuft der Beweis wie früher, Kap. 1, § 10.

2. Satz. *Zu den Voraussetzungen des* 1. *Satzes füge man noch die beiden weiteren hinzu;*

c) *in jedem Punkte von T sollen sich je zwei Werte der mehrdeutigen Funktion um mehr als eine bestimmte positive Konstante G voneinander unterscheiden;*

d) *die Funktionen $f_n(x, y)$ sollen so gewählt werden können, daß sie stetig sind.*

Dann lassen sich die eindeutigen Funktionen, auf die sich nach dem 1. *Satze die Werte der mehrdeutigen Funktion verteilen, so bestimmen, und zwar, von der Reihenfolge abgesehen, nur auf eine einzige Weise, daß auch sie im ganzen Bereich T stetig sind.*

Die Bedingung c) kann durch jede der folgenden Bedingungen ersetzt werden:

c') in einem beliebigen Punkte von T sollen die Werte der mehrdeutigen Funktion sämtlich voneinander verschieden sein und außerdem soll die Anzahl der Werte, welche die Funktion in den verschiedenen Punkten von T annimmt, eine bestimmte feste Zahl N niemals übertreffen;

c'') an Stelle von T, G in der obigen Bedingung c) sollen bzw. S', G' treten, wobei S' einen beliebigen regulären nebst Rande innerhalb T gelegenen Bereich und G' eine nur von S' abhängige positive Größe bedeuten.

Zum Beweise beginnen wir mit dem Fall i) und erkennen sofort, daß es eine feste positive Zahl h gibt, derart daß der Definitionsbereich der Funktion $f_n(x, y)$ jedenfalls so genommen werden kann, daß er den Bereich

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < h$$

umfaßt. Jetzt braucht man die Bereiche σ nur so zu wählen, daß zwei benachbarte σ stets innerhalb eines solchen Bereiches liegen, und von hier ab verläuft der Beweis ähnlich, wie derjenige von Satz B), Kap. 4, § 3.

Die übrigen Fälle ergeben sich nun sofort.

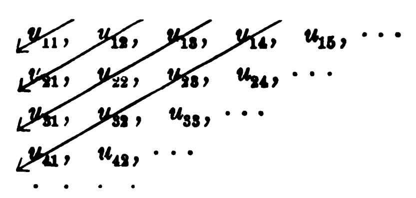
Aufgabe. Man zeige, daß eine unendliche Reihe, welche in der Umgebung eines jeden Punktes eines abgeschlossenen Bereichs gleichmäßig konvergiert, auch im ganzen Bereiche gleichmäßig konvergiert.

§ 11. Über abzählbare und nicht-abzählbare Mengen.

In diesem Paragraphen wollen wir eine Eigenschaft der Mengen besprechen, kraft deren die unendlichen Mengen in zwei Klassen zerfallen, derart daß die einen, nämlich die abzählbaren Mengen, in mancher Hinsicht eine ähnliche Rolle in der Analysis spielen, wie die endlichen Mengen, während die anderen, die nicht-abzählbaren Mengen, von diesen durch eine Kluft geschieden sind, deren genaue Umrisse zwar nicht zu erkennen sind, deren Tiefe man sich aber wohl bewußt ist.

Die Begriffe und Sätze dieses Paragraphen rühren zum großen Teil von G. Cantor her.

Unter einer *abzählbaren Menge* $\{s\}$ von Gegenständen s versteht man eine Menge, deren Elemente den natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ in ein-eindeutiger Weise zugeordnet werden können. Ein einfaches Beispiel hiervon bieten die Doppel-, sowie allgemein die mehrfachen Reihen. Eine solche werde durch das Schema gegeben:



Diese läßt sich bekanntlich in eine einfache Reihe verwandeln, indem man etwa in der Weise summiert, wie durch die Pfeile angedeutet ist. Dementsprechend wird man auf die einfach unendliche Folge geführt:

$$u_{11}, \quad u_{12}, \; u_{21}, \quad u_{13}, \quad u_{22}, \cdots,$$

deren Elemente schon durch ihren Platz in der Folge den natürlichen Zahlen zugeordnet werden können.

1. Satz. *Die aus zwei (und somit aus m) abzählbaren Mengen zusammengesetzte Menge ist wieder abzählbar.*

Die aus einer abzählbaren Menge abzählbarer Mengen zusammengesetzte Menge kann ebenfalls abgezählt werden.

Die Richtigkeit des ersten Teils des Satzes erkennt man sofort.

Zum Beweise des zweiten Teils genügt es, an das soeben besprochene Beispiel anzuknüpfen und die vorgelegten Mengen in der Gestalt eines zweidimensionalen Schemas anzuschreiben. Insbesondere dürfen offenbar beliebig viele der Mengen endlich sein.

2. Satz. *Greift man aus einer abzählbaren Menge eine unendliche Teilmenge heraus, so ist letztere stets abzählbar.*

3. Satz. *Die rationalen Zahlen bilden eine abzählbare Menge.*[1])

Die positiven darunter lassen sich in der Gestalt nachstehenden zweidimensionalen Schemas anschreiben:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \\ \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots \\ \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Diese sind also nach dem 1. Satze abzählbar. Ebenso bilden die negativen rationalen Zahlen inkl. 0 eine abzählbare Menge, und aus diesen beiden Mengen setzt sich wieder eine abzählbare Menge zusammen. Man kann aber auch leicht die negativen rationalen Zahlen inkl. 0 in das obige Schema direkt einschalten.

Nach dem 2. Satze bilden nun die echten Brüche ebenfalls eine abzählbare Menge.

Aufgabe. Unter einem *rationalen Punkte* der Ebene (oder allgemeiner eines n-dimensionalen Raumes) versteht man einen solchen, dessen Koordinaten sämtlich rationale Zahlen sind. Man zeige, daß diese Punkte eine abzählbare Menge bilden.

Begriff der Mächtigkeit. Zwei endliche Mengen $\{s\}$ und $\{\sigma\}$ stehen stets in einer, aber auch nur in einer der drei Beziehungen zueinander:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \{s\} < \{\sigma\}, \\ \text{b)} & \{s\} > \{\sigma\}, \\ \text{c)} & \{s\} = \{\sigma\}, \end{array}$$

je nachdem im Falle a) jedem Element von $\{s\}$ ein Element von $\{\sigma\}$ zugeordnet werden kann, ohne $\{\sigma\}$ zu erschöpfen, mit einer ähnlichen Erklärung für b) und c). Hierbei ist der Umstand wesentlich, daß, wenn bei einer besonderen Zuordnung der Elemente etwa Fall a)

1) Wir wollen später zeigen, daß auch die algebraischen Irrationalitäten abzählbar sind; vgl. weiter unten im Texte, nach dem Beweise des 4. Satzes.

eintritt, dann jede andere Zuordnung Fall a) gleichfalls herbeiführt. *Bei unendlichen Mengen bleibt dieser Satz nicht erhalten.* In der Tat bilden beispielsweise die positiven geraden Zahlen

$\{A\}$: $2, 4, 6, 8, \ldots$

eine Teilmenge der Menge aller natürlichen Zahlen

$\{B\}$: $1, 2, 3, 4, \ldots$

und stehen somit zu diesen in der Beziehung

$$\{A\} < \{B\}.$$

Andererseits kann man eine Teilmenge von $\{A\}$,

$\{C\}$: $4, 8, 12, 16, \ldots$

der Menge $\{B\}$ ein-eindeutig zuordnen, wodurch nun die Beziehung

$$\{A\} > \{B\}$$

erzielt wird. Und ebenso leicht kann man auch die Beziehung

$$\{A\} = \{B\}$$

herstellen.

Es drängt sich jetzt die Frage auf, ob die am vorstehenden Beispiele erläuterte Eigenschaft zweier abzählbarer Mengen, bei zweckmäßiger Zuordnung ihrer Elemente der Reihe nach in alle drei Beziehungen a), b), c) zueinander gebracht werden zu können, sich allgemein auf zwei beliebige unendliche Mengen überträgt. Daß dem nicht so ist, besagt der Satz, daß es in der Tat Mengen $\{\sigma\}$ gibt, welche zur Menge $\{s\}$ der natürlichen Zahlen nur in der Beziehung a) stehen können. Eine solche Menge heißt *nicht-abzählbar*. Zum Existenzbeweis für derartige Mengen möge der folgende Satz dienen.

4. Satz. *Die Menge $\{x\}$ der reellen Zahlen ist nicht-abzählbar.*

Gesetzt, dem wäre nicht so. Dann müßte auch insbesondere die Teilmenge $0 < x < 1$ abzählbar sein. Man stelle die n^{te} Zahl x_n dieser Menge durch einen Dezimalbruch dar[1]):

$$x_n = \frac{c_1^{(n)}}{10} + \frac{c_2^{(n)}}{10^2} + \frac{c_3^{(n)}}{10^3} + \cdots = 0, c_1^{(n)} c_2^{(n)} c_3^{(n)} \ldots.$$

Jetzt vermag man eine Zahl x der Menge anzugeben, die mit keiner

1) Diese Darstellung kann in besonderen Fällen aufhören, eindeutig zu sein, da beispielsweise $0{,}6999 \cdots = 0{,}7$ ist. Um dem vorzubeugen, wollen wir uns nur unendlicher Dezimalbrüche bedienen.

Zahl x_n zusammenfällt. Dazu braucht man nur den Dezimalbruch hinzuschreiben:

$$0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots,$$

wobei die Ziffern γ_k so gewählt sind, daß

$$\gamma_1 \neq c_1^{(1)}, \quad \gamma_2 \neq c_2^{(2)}, \cdots \gamma_k \neq c_k^{(k)}$$

ist, und daß die γ_k überdies nicht schließlich in lauter Nullen oder Neunen ausarten.[1]) Dann unterscheidet sich diese Zahl $0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots$ von jeder Zahl x_n. Aus diesem Widerspruch folgt der Satz.

Der vorstehende Beweis ist dem Cantorschen Beweise für die Existenz nicht-algebraischer Zahlen nachgebildet.[2]) Man zeigt nämlich, daß auch die reellen (und somit sämtliche) algebraischen Zahlen abzählbar sind. Dazu schreibt man die algebraische Gleichung in der Form hin:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad a_0 > 0,$$

wo die Koeffizienten ganzzahlige Werte haben, und setzt

$$a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n| + n = N.$$

Alsdann entspricht jeder natürlichen Zahl $N > 1$ nur eine endliche Anzahl algebraischer Gleichungen, während andererseits jede beliebige algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten einmal in dieser Reihe auftritt. Demgemäß ordnen sich, den sukzessiven Werten von N entsprechend, die algebraischen Irrationalitäten in ein zweidimensionales Schema ein, dessen Zeilen je aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen, und hiermit ist die Abzählbarkeit dieser Zahlen erwiesen. Daß es nun nicht-algebraische Zahlen gibt, hat Cantor nach der soeben beim Beweise des 4. Satzes benutzten Methode dargetan.

Cantor hat ferner gezeigt, daß zwei Kontinuen verschiedener Ordnungen, etwa eine gerade Strecke und ein Quadrat, ein-eindeutig aufeinander bezogen werden können (vgl. unten, 6. Satz). Die Abbildung kann aber keine stetige sein. Darnach dürfte Peano wohl bis an die Grenze der Möglichkeit vorgedrungen sein, als er zeigte, daß die Punkte (x, y) eines Quadrats mittels zweier eindeutiger stetiger Funktionen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

1) Man setze etwa $\gamma_n = 5$, falls $c_n^{(n)} \neq 5$ ist; sonst sei $\gamma_n = 4$.

2) Cantor, *Journ. f. Math.* 77 (1874), S. 258.

dargestellt werden können. Dabei werden jedoch gewisse Punkte des Quadrats mehrmals erhalten, sodaß also die Abbildung nicht eindeutig umkehrbar ist.

Zwei unendliche Mengen $\{s\}$, $\{\sigma\}$ besitzen nach Cantor dieselbe *Mächtigkeit*, wenn sie in die Beziehung c) zueinander gesetzt werden können, d. h. wenn sich ihre Elemente einander ein-eindeutig zuordnen lassen. Die Menge $\{\sigma\}$ hat eine *höhere Mächtigkeit* als $\{s\}$, wenn die Beziehung a), nicht aber die Beziehungen b), c) zwischen ihnen hergestellt werden können. Alsdann hat $\{s\}$ eine *niedere Mächtigkeit* als $\{\sigma\}$. Hiernach haben alle abzählbaren Mengen unter sich, sowie alle Räume unter sich gleiche Mächtigkeit, aber die erste dieser beiden Mächtigkeiten ist eine niedere, als die zweite.

Ein Hauptsatz. Um in einem gegebenen Falle den Nachweis zu führen, daß zwei vorgelegte Mengen gleiche Mächtigkeit besitzen, ist es meist umständlich, die Elemente derselben tatsächlich in die Beziehung c) zueinander zu bringen.[1]) Hier führt der folgende Satz rascher zum Ziele

5. Satz. *Sind* $\{s\}$ *und* $\{\sigma\}$ *irgend zwei Mengen, welche sich sowohl in die Beziehung* a) *als auch in die Beziehung* b) *zueinander bringen lassen, so haben sie gleiche Mächtigkeit.*

Ein Beweis des Satzes ist von F. Bernstein in Cantors Seminar gegeben und von Borel in äußerst einfacher Form veröffentlicht worden.[2]) Wir wollen jetzt einige Anwendungen dieses Satzes kennen lernen.

6. Satz.[3]) *Das Innere eines Quadrats läßt sich ein-eindeutig auf eine Strecke (exklusive der Endpunkte) abbilden.*

Sei

$$\{(x, y)\}: \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

die erste und

$$\{\xi\}: \quad 0 < \xi < 1$$

die zweite Punktmenge. Dann erhält man erstens die Beziehung

$$\{(x, y)\} > \{\xi\},$$

indem man etwa dem Punkte ξ den Punkt $(\xi, \frac{1}{2})$ zuordnet. Zweitens sei

1) Auf diese Weise ist zum Beispiel der Beweis zuerst von Cantor geführt worden, daß sich ein Quadrat auf eine gerade Strecke ein-eindeutig abbilden läßt.

2) Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898, p. 104.

3) Cantor, *Journal für Mathematik*, 84 (1877) § 8.

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots, \qquad y = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots,$$

wo beide Dezimalbrüche unendlich sind, ein beliebiger Punkt von $\{(x, y)\}$. Dann ordne man diesem Punkte den Punkt von $\{\xi\}$:

$$\xi = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3 \ldots$$

zu. Daß man auf diese Weise nur einen Teil von $\{\xi\}$ erhält, sieht man schon an dem einen Beispiel, daß dem Punkte

$$\xi = 0{,}707070 \ldots$$

kein Punkt von $\{(x, y)\}$ entspricht. Hiernach ist

$$\{(x, y)\} < \{\xi\},$$

und damit sind die Voraussetzungen des 5. Satzes alle erfüllt.

Der vorstehende Beweis kann ohne weiteres auf den n-dimensionalen Würfel übertragen werden. Hiermit ist auch dargetan, daß alle Räume gleiche Mächtigkeit haben.[1])

7. Satz. *Die Menge aller Funktionen besitzt eine höhere Mächtigkeit als das Kontinuum.*

Es genügt offenbar schon, den Satz bloß für solche Funktionen zu beweisen, welche im Intervalle $0 < x < 1$ ausnahmslos definiert sind. Diese Funktionen haben ja mindestens die Mächtigkeit des Kontinuums, da sie die Konstanten, $f(x) = \text{const.}$, umfassen. Nehmen wir also an, sie haben dieselbe Mächtigkeit wie das Kontinuum $0 < \xi < 1$. Dann entspricht jeder Funktion ein einziger Wert von ξ und umgekehrt. Diese Zuordnung werde durch die Bezeichnung

$$f_\xi(x)$$

zum Ausdruck gebracht. Jetzt fasse man die Funktion

$$\varphi(x) = f_x(x) + 1$$

ins Auge. Sie gehört zur betreffenden Menge und muß also mit $f_{\xi'}(x)$, $0 < \xi' < 1$, identisch sein. Im Punkte $x = \xi'$ ist aber

$$\varphi(\xi') = f_{\xi'}(\xi') + 1 \neq f_{\xi'}(\xi').$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes.

---

1) Auch das Kontinuum von abzählbar unendlich vielen Dimensionen hat nur die Mächtigkeit des linearen Kontinuums. Vgl. Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 8 (1900) S. 24.

Cantor hat allgemein bewiesen, daß eine beliebige Menge stets zu einer zweiten Menge höherer Mächtigkeit Anlaß gibt.

Im Gegensatze zu dem soeben erhaltenen Resultate beweisen wir jetzt den

8. Satz. *Die Menge aller stetigen Funktionen hat dieselbe Mächtigkeit als das Kontinuum.*

Indem wir wieder an den 5. Satz anknüpfen, konstatieren wir zuerst, daß eine Teilmenge von $\{f(x)\}$, nämlich die Konstanten,

$$f(x) = C,$$

dieselbe Mächtigkeit als das Kontinuum hat. Es handelt sich also jetzt nur noch um den Beweis, daß eine Teilmenge des Kontinuums dieselbe Mächtigkeit als $\{f(x)\}$ hat. Dabei legen wir die Eigenschaft einer stetigen Funktion zu Grunde, in jedem Punkte ihres Definitionsbereichs bekannt zu sein, sobald ihre Werte in den rationalen Punkten desselben (also in den Punkten einer im Definitionsbereiche überall dichten Menge) gegeben sind.

Um das Wesentliche an dem Beweise deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir uns zunächst auf solche stetige Funktionen beschränken, welche für alle Werte des Arguments definiert sind. Ferner dürfen wir noch voraussetzen, daß der Wert der Funktion zwischen 0 und 1 liegt, da dies ja durch die ein-eindeutige Transformation

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \tan f(x)$$

stets zu erzielen ist. Dem 3. Satze entsprechend numerieren wir nun die rationalen Werte von x und schreiben dann den Wert y_n der Funktion in jedem dieser Punkte x_n als unendlichen Dezimalbruch hin:

$$\begin{array}{ll} x_1: & y_1 = 0{,}a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots \\ x_2: & y_2 = 0{,}a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Alsdann fasse man diese Brüche als zweidimensionales Schema auf und ordne man demselben etwa die durch schräge Zusammenfassung der Ziffern definierte Zahl zu:

$$0{,}a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_1^{(2)} a_3^{(1)} a_2^{(2)} a_1^{(3)} a_4^{(1)} \ldots.$$

Hiermit ist jeder der in Betracht gezogenen stetigen Funktionen eine Zahl zugeordnet und zwar so, daß zwei verschiedenen Funktionen ge-

trennte Zahlen entsprechen. Daß man andererseits dadurch nur einen Teil der Zahlen erhält, ist ja evident.

Es bleibt nur noch übrig, den zweiten Teil des Beweises auf den gesamten Vorrat der stetigen Funktionen auszudehnen. Sei also $f(x)$ im beschränkten Intervalle (a, b) stetig. Dann kann man dieser Funktion eine für alle Werte von x definierte Funktion $\varphi(x)$ auf folgende Weise zuordnen. Da, wo $f(x)$ definiert ist, sei $\varphi(x) = f(x)$. Ist $f(x)$ im Endpunkte $x = a$ des Intervalls (a, b) definiert und daher dort auch stetig, so sei

$$\varphi(x) = f(a) + 1, \qquad -\infty < x < a.$$

Ist $f(x)$ dagegen im Punkte $x = a$ nicht definiert, während sich $f(x)$ beim Grenzübergange $\lim x = a^+$ einem Grenzwert A nähert, so sei

$$\varphi(x) = A + 2, \qquad -\infty < x \leqq a.$$

In jedem anderen Falle sei

$$\varphi(x) = 0, \qquad -\infty < x \leqq a.$$

In ähnlicher Weise erkläre man $\varphi(x)$ für Werte von x, die größer als die zum Intervalle gehörigen sind. Wie man sieht, gibt eine Funktion $f(x)$, die im Intervalle $a < x < b$ stetig ist und auch in beiden Endpunkten Grenzwerten zustrebt, Anlaß zu vier verschiedenen Funktionen $\varphi(x)$, je nachdem die Funktion in den Endpunkten des Intervalls erklärt wird oder nicht. Jetzt ersetze man jede stetige Funktion, die nicht für alle Werte des Arguments erklärt ist, durch die zugehörige Funktion $\varphi(x)$, die ausnahmslos definiert ist, und verfahre dann mit der neuen Funktionenmenge genau so wie früher mit der besonderen Teilmenge, welche wir herausgriffen. Hiermit ist die nötige Ergänzung erbracht.

§ 12. Über den Inhalt von Punktmengen.

Im Anschluß an den elementaren geometrischen Begriff des Flächen- bezw. Rauminhalts wird der Inhalt einer im Endlichen gelegenen Punktmenge folgendermaßen definiert. Wir fangen mit einer in einem Raume von einer Dimension R_1, also auf einer Geraden belegenen Menge an und teilen diese Gerade in Intervalle von gleicher Länge 2^{-k} ein. Seien s_k und S_k die Summen derjenigen Intervalle, welche lediglich aus Punkten der Menge bestehen bezw. mindestens einen Punkt der Menge umfassen. Dabei ist es gleichgültig, ob man diese Intervalle als abgeschlossen ansehen will oder nicht. Hiernach ist

$$s_k \leqq S_k.$$

Läßt man k jetzt wachsen, so nimmt s_k niemals ab, und S_k nimmt niemals zu, während andererseits für alle Werte von k

$$s_k \leqq S_1, \qquad 0 < S_k$$

ist. Dem 1. Theorem von Kap. 1, § 7 gemäß streben also s_k und S_k Grenzwerten zu:

$$\lim_{k=\infty} s_k = I_1, \qquad \lim_{k=\infty} S_k = I_2,$$

und zwar ist

$$I_1 \leqq I_2.$$

Diese Größen wollen wir nun bezw. als den *inneren* und den *äußeren Inhalt* der Menge bezeichnen. Ist insbesondere $I_1 = I_2 = I$, so spricht man schlechtweg vom *Inhalt* I der Menge. Man weist leicht nach, daß sich dieselben Größen I_1, I_2 einstellen, wenn man an Stelle der obigen irgend welche andere gleichmäßig gegen 0 abnehmende Intervalle treten läßt.

Bei der Definition des Inhalts einer im zweidimensionalen Raume R_2 belegenen Menge entspricht der Einteilung der Geraden in Intervalle eine Einteilung der Ebene in ein Quadratnetz, und ähnlich im Falle einer Menge des R_n.

Eine besondere Punktmenge. Bei einer Reihe analytischer Untersuchungen erweist sich eine gewisse Punktmenge als nützlich[1]), welche wir hiermit konstruieren wollen. Sei $0 < \lambda \leqq 1$ eine beliebige Konstante.

Erster Schritt. In der Mitte des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ trage man ein erstes Unterintervall (1) von der Länge

$$l_1 = \lambda - \tfrac{1}{2}\lambda$$

auf.

(3) (2) (3) (1) (3) (2) (3)

Fig. 44.

Zweiter Schritt. In der Mitte eines jeden der dabei leer gebliebenen Endintervalle trage man ein Unterintervall (2) von der Länge l_2 auf, derart daß die Gesamtlänge der Intervalle (1) und (2)

$$l_1 + 2l_2 = \lambda - \tfrac{1}{4}\lambda$$

wird.

1) Es ist dies ein besonderer Fall einer von Harnack, *Math. Ann.* Bd. 19 (1881), S. 239, aufgestellten Punktmenge. Die beigefügte Figur ist nur schematisch gezeichnet. Die wirklichen Längen der Intervalle wiederzugeben, ist nicht tunlich.

n-ter Schritt. In der Mitte eines jeden der bisher leer gebliebenen Intervalle zeichne man ein Unterintervall (n) von der Länge l_n auf, derart, daß die Gesamtlänge der Intervalle (1), ..., (n)

$$l_1 + 2l_2 + 2^2 l_3 + \cdots + 2^{n-1} l_n = \lambda - \frac{1}{n+2}\lambda$$

beträgt.

Läßt man n jetzt unbegrenzt wachsen und faßt man die Endpunkte der Intervalle (1), (2), ... ins Auge, so gewinnt man dadurch eine Punktmenge M, welche offenbar abzählbar und in keinem Intervalle dicht ist. Aus letzterem Grunde ist ihr innerer Inhalt gleich 0.

Aus M wollen wir noch eine zweite Menge $\mathfrak{M}$ erzeugen, indem wir zu M alle nicht in M enthaltenen Häufungsstellen von M hinzufügen. Die Menge $\mathfrak{M}$ ist ebenfalls in keinem Intervalle dicht und hat also auch den inneren Inhalt 0, sie ist augenscheinlich perfekt.[1])

Was den äußeren Inhalt sowohl von M als von $\mathfrak{M}$ anbetrifft, so ergänzt dieser offenbar den inneren Inhalt der aus den Punkten der Intervalle (1), (2), ... bestehenden Menge zum Inhalt des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$, also zu 1. Andererseits erkennt man, daß der innere Inhalt dieser letzten Menge den Wert λ hat. *Mithin hat der äußere Inhalt sowohl von M als von $\mathfrak{M}$ den Wert* $1 - \lambda$.

In $\mathfrak{M}$ haben wir also ein Beispiel einer perfekten, in keinem Intervalle dichten Menge, deren äußerer Inhalt mit dem inneren Inhalt nicht übereinstimmt, sobald man $\lambda < 1$ nimmt. Ferner bilden die inneren Punkte der Intervalle (1), (2), ... eine aus einer Reihe von Kontinuen bestehende Punktmenge, deren äußerer Inhalt mit dem inneren nicht übereinstimmt, sobald man $\lambda < 1$ nimmt.

Eine zu $\mathfrak{M}$ analoge Menge der Ebene erhält man, indem man in jedem Punkte von $\mathfrak{M}$ ein Lot von der Länge 1 auf der Geraden errichtet. Liegen die Lote alle an derselben Seite der die Menge $\mathfrak{M}$ tragenden Geraden, so bilden sie eine in keinem zweidimensionalen Bereiche dichte perfekte Menge vom äußeren Inhalt $1 - \lambda$ und vom inneren Inhalt 0. Im übrigen sei noch an die Jordanschen Kurven erinnert, deren äußerer Inhalt positiv ist.[2]) Eine derartige einfache geschlossene Kurve grenzt einen Teil der Ebene ein, dessen äußerer mit seinem inneren Inhalt nicht übereinstimmt.

1) Es ist ein Satz der Mengenlehre, daß eine perfekte Menge niemals abzählbar sein kann.

2) Vgl. einen Aufsatz des Verfassers: „A Jordan Curve of Positive Area", *Transactions Amer. Math. Soc.* Bd. 4 (1903), S. 107.

Zum Schluß wollen wir noch einen Satz erwähnen, dessen Beweis dem Leser nicht schwer fallen wird.

Satz. *Eine unendliche Menge in einer Ebene gelegener zweidimensionaler (oder allgemein in einem R_n gelegener n-dimensionaler) nicht übereinander greifender Kontinuen ist stets abzählbar.*

§ 13. Eine an die Menge M sich anschließende Funktion.

An die Menge M, § 12, anknüpfend wollen wir eine Funktion $f(x)$, wie folgt, definieren. Seien

$$a_1^{(1)} \left(= \tfrac{1}{2}\right),$$
$$a_1^{(2)},\quad a_2^{(2)},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ \ldots\ldots\ldots$$

bezw. die Mittelpunkte der Intervalle (1), (2), ..., (n). Die Funktion $f(x)$ wird nun zunächst der Reihe nach für die Punkte dieser Intervalle erklärt. Sei μ eine beliebige positive Konstante. Sodann

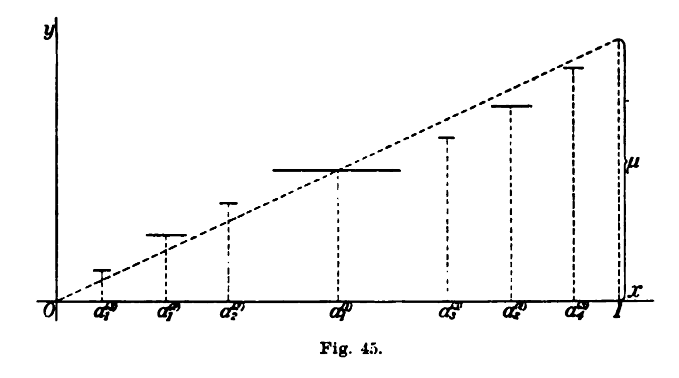


Fig. 45.

1) sei x ein innerer oder Endpunkt des Intervalls (1); dann soll

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\mu$$

sein;

2) sei x ein innerer oder Endpunkt des ersten resp. zweiten der beiden Intervalle (2); dann soll

$$f(x) = \tfrac{1}{4}\mu \quad \text{im ersten Falle,}$$
$$f(x) = \tfrac{3}{4}\mu \quad \text{„ zweiten „}$$

sein;

n) sei x ein innerer oder Endpunkt des k-ten der Intervalle (n); dann soll

$$f(x) = \frac{2k-1}{2^n}\mu$$

sein.

Hiermit ist $f(x)$ bereits in allen Punkten von M und $\{(n)\}$ erklärt. Ist nun x' ein Punkt, in dem $f(x)$ noch nicht erklärt ist, also ein Punkt von $\mathfrak{M}$, der zu M nicht gehört, so weist man leicht nach, daß $f(x)$ sich einem Grenzwerte nähert, wenn x, ohne die Punkte von M und $\{(n)\}$ zu verlassen, dem Werte x' zustrebt. Durch diesen Grenzwert soll $f(x)$ im Punkte x' erklärt werden.

Die nunmehr im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ ausnahmslos erklärte Funktion $f(x)$ verhält sich, wie man noch nachträglich beweist, ausnahmslos stetig und monoton, und nimmt ferner um die positive Größe μ zu:

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = \mu.$$

Trotzdem hat sie im allgemeinen eine verschwindende Ableitung, $f'(x) = 0$. Dabei bilden die Ausnahmepunkte eine Menge $\mathfrak{M}$ vom äußeren Inhalt $1 - \lambda$, also insbesondere, falls $\lambda = 1$ gewählt wird, vom Inhalt 0.

Zweiter Abschnitt.

Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Größe.

Einleitung.

Über das komplexe Zahlensystem.

Wir setzen die reellen Zahlen als bekannt voraus und führen die komplexen Zahlen als Größenpaare ein, indem wir je zwei reellen Zahlen a, b ein neues Gedankending, — ein Element einer unendlichen Menge, — zuordnen und dasselbe zugleich mit (a, b) bezeichnen. Geometrisch können wir diese neuen *Zahlen*, wie wir jene Elemente nennen wollen, durch die Punkte einer Ebene oder auch als in einer Ebene gelegene Vektoren deuten. Im ersten Fall wird die komplexe Zahl (a, b) durch den Punkt vorgestellt, dessen Koordinaten $x = a$ und $y = b$ sind; im zweiten entspricht ihr eine Strecke oder ein Vektor[1]), dessen Anfang ein beliebiger Punkt (x_0, y_0) der Ebene ist und dessen Endpunkt in $(x_0 + a, x_0 + b)$ liegt.

Zwei komplexe Zahlen (a, b) und (c, d) werden dann und nur dann als *gleich* erklärt, wenn sie miteinander identisch sind; in Zeichen

$$(a, b) = (c, d),$$

wenn

$$a = c \quad \text{und} \quad b = d.$$

Geometrisch fallen die entsprechenden Punkte zusammen; bei der zweiten Deutung sind die entsprechenden Vektoren einander gleich.

Unter einer *Verknüpfung* zweier komplexer Zahlen versteht man ein Verfahren, wonach auf Grund eines willkürlichen Gesetzes zwei

1) Wegen der Definition eines Vektors vgl. das 5. Kap., § 4. Für die vorliegenden Zwecke muß zu den daselbst erklärten eigentlichen Vektoren noch der uneigentliche Vektor 0 hinzutreten. — Literaturangaben bzgl. der ersten Darstellung finden sich auf S. 213.

vorgelegte Zahlen eine dritte Zahl eindeutig bestimmen. Dieses Gesetz liegt ganz in unsern Händen; wir dürfen es gestalten, wie wir wollen, vorausgesetzt daß wir nur widersprechendes vermeiden. Insbesondere sind es zwei Verknüpfungen, welche nebst ihren Umkehrungen den vier Spezies für die neuen Zahlen zu Grunde liegen und welche dementsprechend *Addition* und *Multiplikation* genannt werden sollen.

Die erste Verknüpfung (Addition). Für die erste Verknüpfung soll die geometrische Addition der Vektoren maßgebend sein, wonach als Summe zweier Vektoren (α) und (β) derjenige Vektor (γ) erklärt wird, welcher, wie folgt, konstruiert wird: der Vektor (β) werde durch einen gleichen Vektor (β') ersetzt, dessen Anfang im Endpunkte von (α) liegt. Dann bestimmt der Anfang von (α) den Anfang von (γ) und das Ende von (β') den Endpunkt von (γ). — Dies ist ja nichts anderes als die bekannte Konstruktion des Parallelogramms der Kräfte, Geschwindigkeiten usw. in der Physik.

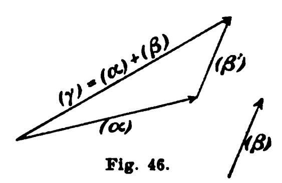


Fig. 46.

Die erste Verknüpfung zweier vorgelegter Zahlen (a, b) und (c, d) soll nun in der Bildung der neuen Zahl $(a + c, b + d)$ bestehen. Diese Verknüpfung heißt *Addition* und wird durch das zwischen den beiden gegebenen Zahlen geschriebene Symbol + gekennzeichnet:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Dabei heißt die dritte Zahl die *Summe* der beiden anderen.

Die Verknüpfung ist stets ausführbar und das Resultat derselben ist eindeutig bestimmt. Für sie gelten das *kommutative*, sowie das *assoziative Gesetz:*

$$A + B = B + A,$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

wobei die großen Buchstaben beliebige komplexe Zahlen vorstellen und die Bedeutung der Klammern auf der Hand liegt. Die geometrische Bedeutung der Verknüpfung ist ja bereits besprochen worden.

Die Umkehrung der Addition ist stets möglich und eindeutig. Gegeben seien nämlich irgend zwei komplexe Zahlen $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$; gesucht wird eine dritte Zahl $X = (x, y)$, welche der Forderung genügt:

$$A + X = B.$$

Zur Bestimmung von X ist notwendig und hinreichend, daß

$$a + x = c, \qquad b + y = d$$

sei, also ist

$$X = (c - a,\ d - b).$$

Die Bildung der Zahl X aus A und B wird *Subtraktion* genannt und durch das Zeichen — ausgedrückt:

$$X = B - A.$$

Geometrisch kann man den Punkt $B - A$ dadurch konstruieren, daß man zum Vektor B den zu A entgegengesetzten Vektor $-A = (-a, -b)$ addiert. Eine für die Praxis geeignetere Konstruktion besteht indessen darin, daß man die Vektoren A, B mit gemeinsamem Anfang hersetzt und dann ihre Endpunkte miteinander verbindet. Der hierdurch entstehende Vektor, dessen Anfang im Endpunkte von A und dessen Endpunkt im Endpunkte von B liegt, stellt die Differenz $B - A$ vor.

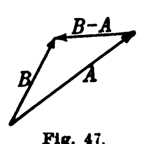


Fig. 47.

Die zweite Verknüpfung (Multiplikation). Während die erste Verknüpfung durch ein geometrisch-physikalisches Verfahren von fundamentaler Bedeutung eingeleitet wurde, hat die zweite Verknüpfung dagegen ihren Ursprung in der formalen Algebra. Ehe die Mathematiker noch klare Begriffe betreffend $\sqrt{-1}$ entwickelt hatten, operierten sie munter mit diesem Symbol, als wenn es eine den Prozessen der Algebra unterworfene Größe vorstellte, die ins Quadrat erhoben gleich -1 ist, indem sie schrieben:

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac - bd + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

Den in diesem Formalismus enthaltenen Kern wollen wir nun herausschälen, indem wir geradezu definieren: die zweite Verknüpfung zweier komplexer Zahlen $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ soll die Zahl

$$(ac - bd,\ ad + bc)$$

liefern. Sie heißt *Multiplikation*; man nennt die dritte Zahl das *Produkt* der beiden *Faktoren* A und B und drückt die Verknüpfung, wie folgt, aus:

$$(a, b)\,(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Sie ist stets ausführbar und das Resultat derselben ist eindeutig bestimmt.

Für diese Verknüpfung gelten, wie man leicht nachrechnet, das *kommutative* und das *assoziative*, sowie auch das *distributive Gesetz in Bezug auf Addition*:

$$AB = BA,$$
$$A(BC) = (AB)C,$$
$$A(B + C) = AB + AC.$$

Außerdem hat ein Produkt den Wert (0, 0) dann und nur dann, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich (0, 0) ist.

Die Umkehrung der Multiplikation ist im allgemeinen möglich und eindeutig. Gegeben seien nämlich irgend zwei komplexe Zahlen $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$; gesucht wird eine dritte Zahl $X = (x, y)$, welche der Forderung genügt:

$$AX = B.$$

Dafür ist notwendig und hinreichend, daß

$$ax - by = c, \qquad bx + ay = d$$

sei. Diese Gleichungen lassen stets eine und nur eine Lösung zu, sofern nur $a^2 + b^2 > 0$, d. h. $A \neq (0, 0)$ ist. Ist dagegen $A = (0, 0)$, so haben die Gleichungen nur dann eine Lösung, wenn auch $B = (0, 0)$ ist, und in diesem Falle wird ihnen sogar durch jedes Wertepaar x, y genügt.

Die Bildung der Zahl X, falls $A \neq 0$ ist, soll *Division* heißen, in Zeichen

$$X = \frac{B}{A}.$$

Division durch (0, 0) wird nicht erklärt.

Beziehung zum System der reellen Zahlen. Jede komplexe Zahl (a, b) läßt sich in die Summe zweier Zahlen spalten:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b),$$

wobei die eine Zahl nur von a, die andere nur von b abhängt. Fassen wir zuerst die Zahlen $(a, 0)$ ins Auge. Diese Zahlen stehen in einer ein-eindeutigen Beziehung zu den reellen Zahlen. Außerdem herrscht Isomorphismus zwischen den vier Spezies, wie wir sie soeben für die komplexen Zahlen definiert haben, und den vier Spezies für die reellen Zahlen, da

$$(a, 0) \pm (a', 0) = (a \pm a', 0),$$
$$(a, 0)\,(a', 0) = (aa', 0),$$
$$\frac{(a, 0)}{(a', 0)} = \left(\frac{a}{a'}, 0\right), \qquad \text{wo} \quad a' \neq 0$$

ist. Dementsprechend dürfen die komplexen Zahlen $(a, 0)$ innerhalb

des Gebiets der allgemeinen komplexen Zahlen (a, b) schlechtweg durch die reellen Zahlen a vertreten werden.[1]) Wir wollen fortan setzen:

$$(a, 0) = a.$$

Des weiteren hat man

$$(0, b) = (b, 0)\,(0, 1) = b(0, 1).$$

Die Zahl $(0, 1)$ hat die Eigenschaft, daß

$$(0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

ist, und genügt somit der algebraischen Gleichung:

$$z^2 + 1 = 0.$$

Demgemäß bezeichnen wir sie mit $i = \sqrt{-1}$ und können nunmehr die allgemeine komplexe Zahl in der Gestalt schreiben[2]):

$$(a, b) = a + bi,$$

wo a und b reell sind.

Polarkoordinaten. Die komplexe Zahl $z = x + yi$ läßt sich auch in der Gestalt darstellen

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wo

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

gesetzt ist. Dabei heißt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

nach Cauchy der ***Modul***, nach Weierstraß, von dem auch das Zeichen $|z|$ herrührt, der ***absolute Betrag*** von z, während φ als ***Arcus***:

$$\varphi = \operatorname{arc} z,$$

bezeichnet werden soll; (dafür sind u. a. auch die Benennungen Ampli-

1) Ob man die komplexe Zahl $(a, 0)$ hinfort als identisch mit der reellen Zahl a oder bloß als mit ihr liiert ansehen will, ist ja Geschmacksache.

Im übrigen wird diese Frage in befriedigendster Weise durch den modernen Standpunkt entschieden, wonach ein Größensystem durch *Forderungen* festgelegt wird. Nehmen wir also ein bestimmtes System von Forderungen für die reellen (bezw. komplexen) Zahlen, etwa das von Hrn. Huntington: „A set of postulates for ordinary complex algebra", *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 6 (1905), S. 209 aufgestellte, so dürfen wir jedes Größensystem, welches diesen Forderungen genügt, geradezu als das System der reellen (bezw. komplexen) Zahlen auffassen.

2) Dabei ist zu beachten, daß der Ausdruck bi auch ein wirkliches Produkt, und nicht etwa bloß als ein Ausdruck aufzufassen ist, worin b die Stelle eines Koeffizienten vertritt.

tude und Argument gebraucht worden). Hierbei ist zu beachten, daß nicht jeder Wert von $\operatorname{arc}\tan y/x$ einen Wert von $\operatorname{arc} z$ liefert. So ist z. B.

$$\operatorname{arc} a = 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

wo a eine positive reelle Zahl ist, während doch

$$\operatorname{arc}\tan 0 = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ist. Allgemein unterscheiden sich die Werte von $\operatorname{arc} z$ um Vielfache von 2π (nicht π) voneinander.

Die Benennungen *reelle* und *rein imaginäre Achse*, *reeller* und *rein imaginärer Bestandteil*, sowie *konjugiert imaginär* werden als aus der elementaren Algebra bekannt vorausgesetzt. Nach Weierstraß bezeichnet man den reellen Bestandteil von $w = u + vi$ mit $\Re(w)$, so daß also

$$u = \Re(w), \qquad v = \Re\left(\frac{w}{i}\right)$$

ist. Der konjugierte Wert von w wird häufig als $\bar{w}$ geschrieben, $\bar{w} = u - vi$. Unter dem *Einheitskreise* versteht man die Punkte

$$z = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

wo die reelle Größe φ unbeschränkt veränderlich ist. Er ist der Ort der Punkte z, wofür $|z| = 1$ ist.

Geometrisches über Multiplikation und Division. Vermöge der Darstellung durch Polarkoordinaten erhält das Produkt zweier komplexer Zahlen eine einfache Gestalt, der man auch sofort die bekannte geometrische Konstruktion für dasselbe entnimmt. Sei nämlich

$$A = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad B = \varrho(\cos\psi + i \sin\psi).$$

Dann ist arithmetisch

(1) $\quad C = AB = r\varrho[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)]$.

Demgemäß hat man geometrisch ein Dreieck BOC zu konstruieren, welches dem Dreiecke $1OA$ ähnlich ist, und zwar so, daß die Seite OB der Seite $O1$ entspricht, während die Winkel BOC und $1OA$ beide zugleich positiv oder zugleich negativ ausfallen. Dies gibt

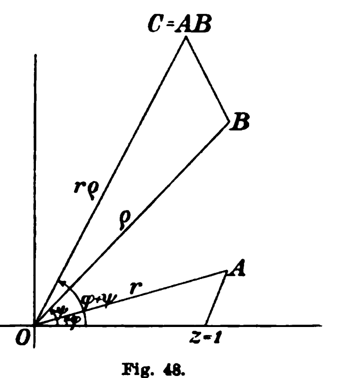


Fig. 48.

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle 1OA,$$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{O1}} \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{OC}}{\varrho} = \frac{r}{1}.$$

Für den Quotienten A/B findet man ferner

$$\frac{A}{B} = \frac{r}{\varrho}\left[\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)\right].$$

Geometrisch läßt er sich durch Umkehrung der Konstruktion für das Produkt herstellen.

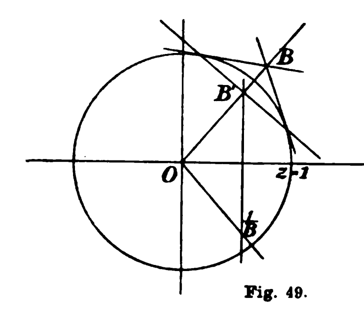


Fig. 49.

Insbesondere ist der reziproke Wert der Zahl B,

$$(2) \qquad \frac{1}{B} = \frac{1}{\varrho}(\cos\psi - i \sin\psi).$$

Geometrisch erhält man den Punkt $1/B$ am einfachsten dadurch, daß man zuerst den in Bezug auf den Einheitskreis zu B konjugierten Punkt B' bestimmt:

$$OB' \cdot OB = 1,$$

und B' dann in der reellen Achse spiegelt. Das Spiegelbild ist dann der gesuchte Punkt $1/B$.

Potenzen und Wurzeln. Aus der Multiplikationsformel findet man:

$$A^n = |A|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{A} = |A|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

wo $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$ und $\varphi = \operatorname{arc} A$ ist. Letzterer Gleichung entnimmt man, daß die n Wurzeln der Zahl A die Ecken eines dem Kreise $|z| = |A|^{1/n}$ einbeschriebenen regulären n-Ecks bilden.

Hieran schließt sich der Moivresche Satz:

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i \sin m\varphi,$$

woraus sich noch die beiden weiteren Formeln durch Trennung von reellem und rein imaginärem ergeben:

$$(3)\begin{cases}\cos m\varphi = \cos^m\varphi - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots \\ \sin m\varphi = \sin\varphi\left[m\cos^{m-1}\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}\varphi\sin^2\varphi + \cdots\right].\end{cases}$$

Einheitswurzeln. Ist insbesondere $A = 1$, so ist der Kreis $|z| = |A|^{1/n}$ eben der Einheitskreis, und die eine Ecke liegt außerdem im Punkte $z = 1$. Indem man

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

setzt, lassen sich die übrigen Wurzeln in der Form schreiben:

$$z_q = z_1{}^q = \cos\frac{2q\pi}{n} + i\sin\frac{2q\pi}{n}, \qquad q = 2, \ldots n.$$

Die Summe der Einheitswurzeln verschwindet:

(4) $$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0.$$

Algebraisch erhellt dies ja daraus, daß der Koeffizient des Termes mit z^{n-1} in der jene Größen bestimmenden Gleichung:

$$z^n - 1 = 0$$

fehlt. Es gibt aber auch einen anschaulichen mechanischen Beweis dieses Satzes. Man fasse nämlich die komplexen Zahlen $z_1, \ldots z_n$ als Vektoren auf, deren Anfang in $z = 0$ und deren Endpunkt in z_q liegt. Alsdann denke man sich diese Vektoren als Repräsentanten von n Kräften, welche auf den Punkt $z = 0$ einwirken. Wegen der Symmetrie derselben heben sie sich augenscheinlich gegenseitig auf, was eben analytisch in der Gleichung (4) seinen Ausdruck findet.

Einige Ungleichungen. Der geometrischen Deutung der Addition entnimmt man ohne weiteres folgende wichtige Relation:

(I) $$|(|A|-|B|)| \leq |A+B| \leq |A|+|B|,$$

wo A und B zwei beliebige komplexe Zahlen sind. Es ist dies ja bloß die arithmetische Einkleidung des Satzes, daß eine Seite eines Dreiecks größer als die Differenz der beiden anderen, aber kleiner als ihre Summe ist. Ein Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn die Punkte $z = 0$, A, B auf einer Geraden liegen.[1]) Aus (I) folgt allgemein

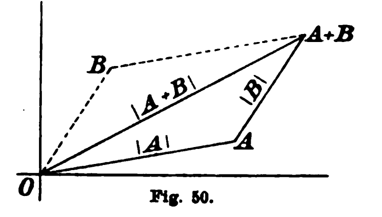


Fig. 50.

1) Der arithmetische Beweis verläuft so. Sei

$$A = a + bi, \qquad B = c + di.$$

Dann soll zuerst bewiesen werden, daß

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

ist. Man nehme diese Relation zunächst als richtig an; daraus folgt dann

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2},$$

$$a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2,$$

$$0 \leq (ad - bc)^2.$$

Diese letzte Relation ist aber sicher richtig. Von ihr aus gelangt man nun rückwärts zu der in Aussicht gestellten Beziehung.

Setzt man endlich

$$A' + B' = A, \qquad B' = -B,$$

(Ia) $$|A_1 + \cdots + A_n| \leqq |A_1| + \cdots + |A_n|,$$
eine Relation, welche auch für $n = \infty$ bestehen bleibt, sofern die unendliche Reihe
$$A_1 + A_2 + \cdots$$
absolut konvergiert.

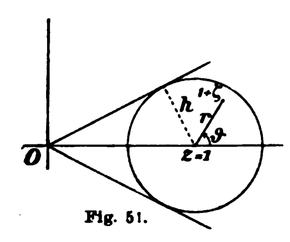


Fig. 51.

Zwei weitere Relationen ergeben sich ebenfalls aus den betreffenden Figuren, und zwar erstens

(II) $$|\operatorname{arc}(1+\zeta)| \leqq \operatorname{arc}\sin h,$$
sofern
$$|\zeta| \leqq h, \qquad 0 < h < 1,$$
ist und im übrigen diejenigen Bestimmungen bevorzugt werden, welche dem absoluten Betrage nach den Wert $\pi/2$ nicht überschreiten.[1])

Endlich hat man die Beziehung:

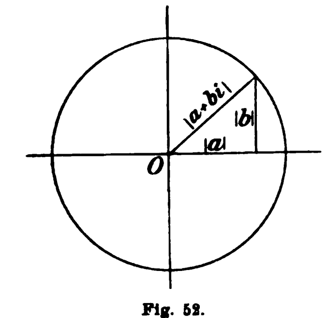


Fig. 52.

(III) $$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a| + |b|) \leqq |a + bi|,$$
wo a und b reelle Zahlen sind.

Ein algebraischer Satz. *Sei*
$$G(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$
eine algebraische Gleichung, deren Wurzeln mit $z_1, \ldots z_n$ bezeichnet werden mögen. Denkt man sich in der Zahlenebene Stifte in den Punkten z_k eingeschlagen und ein elastisches Band in der Gestalt einer Schleife um dieselben gelegt, so daß es, nachdem es sich straff zusammen-

---

so folgt aus
$$|A' + B'| \leq |A'| + |B'|,$$
daß
$$|A| < |A + B| + |B|,$$
also
$$|A| - |B| \leq |A + B|$$
ist. Durch Vertauschung von A und B schließt man noch, daß
$$|B| - |A| \leq |A + B|$$
ist, und hiermit ist der Satz bewiesen.

1) Zur arithmetischen Begründung dieser Relation setze man
$$\zeta = \xi + \eta i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$
Dann soll zunächst bewiesen werden, daß für $\eta \geq 0$
$$\operatorname{arc}(1+\zeta) = \operatorname{arc}\tan\frac{\eta}{1+\xi} \leq \operatorname{arc}\sin h = \operatorname{arc}\tan\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$
ist. Da die Funktion $\operatorname{arc}\tan x$ zugleich mit x zunimmt, so ist zum Bestehen dieser letzten Beziehung notwendig und hinreichend, daß

gezogen hat, alle Stifte umfaßt und ein konvexes Polygon bildet, so liegen die Wurzeln der Gleichung

$$G'(z) = 0$$

sämtlich innerhalb oder auf dem Rande des solchergestalt eingegrenzten Gebietes.[1])

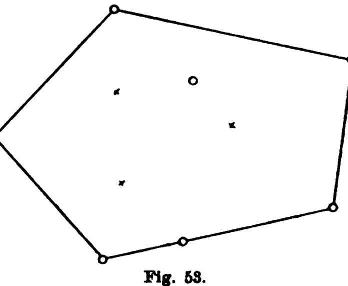


Fig. 53.

Der Satz läßt sich als eine Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes auf komplexes Gebiet ansehen.

Behufs des Beweises denke man sich gleiche nach dem reziproken Werte der Entfernung (also nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials) anziehende Massen in den zunächst als getrennt anzunehmenden Punkten $z_1, \dots z_n$ $(n > 1)$ angebracht. Auf eine im Punkte z befindliche Masse üben diese dann eine Kraft aus, welche, von einem Zahlenfaktor abgesehen, durch den Vektor

$$\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_1} + \cdots + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_n} = K\left[\frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}\right]$$

dargestellt wird, wo K den konjugierten Wert der Klammer bedeutet, Die Gleichgewichtslagen für diese letzte Masse befinden sich augenscheinlich innerhalb des Polygons, sofern sich dasselbe nicht eben auf eine geradlinige Strecke reduziert; im letzteren Falle liegen sie auf der Strecke. Da nun aber

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}$$

ist, so liefern jene Gleichgewichtslagen die Wurzeln der Gleichung

---

$$\frac{\eta}{1 + \xi} \leq \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}$$

sei. Diese Ungleichung kann man wieder, wie folgt, umformen:

$$\frac{r \sin\theta}{1 + r\cos\theta} \leq \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}},$$

$$r\left[\sqrt{1 - h^2}\sin\theta - h\cos\theta\right] \leq h.$$

Trägt man noch linker Hand $h = \sin\alpha$, $\sqrt{1 - h^2} = \cos\alpha$ ein, so kommt

$$r\sin(\theta - \alpha) \leq h,$$

was deshalb zutrifft, weil $0 < r < h$ ist. Von hier aus gelangt man nun rückwärts zur gewünschten Beziehung. — Der Fall $\eta < 0$ läßt sich sofort auf diesen zurückführen.

1) Der Satz findet sich schon bei Gauß, 1816; *Werke*, Bd. 3, S. 112. Der Beweis rührt von Bôcher her, *Proceedings Amer. Acad. Arts and Sci.*, Bd. 40 (1904) S. 469.

$G'(z) = 0$. Der Fall, daß mehrfache Wurzeln vorhanden sind, ist nicht schwer zu behandeln, und wird dem Leser überlassen.

Der Weierstraßsche Mittelwertsatz für Integrale. Den Ausgangspunkt bilden hier die Formeln für den Massenmittelpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ von n Massenteilchen:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}.$$

Diese beiden reellen Gleichungen werden zu einer einzigen komplexen Gleichung vereinigt:

$$\bar{z} = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Denkt man sich nun eine reguläre Kurve der z-Ebene mit Masse belegt, so liegt der Massenmittelpunkt derselben im Punkte

$$\bar{z} = \frac{\int_0^l \varrho (x + y i)\, ds}{\int_0^l \varrho\, ds},$$

wo ϱ die Dichte der Massenverteilung bedeutet. In dieser Formel ist der Weierstraßsche Mittelwertsatz enthalten, welcher in einer Verallgemeinerung des bekannten Mittelwertsatzes:

$$\int_a^b F(x)\, \Phi(x)\, dx = F(\xi) \int_a^b \Phi(x)\, dx, \qquad \Phi(x) \geqq 0,$$

auf komplexes Gebiet besteht.

Mittelwertsatz. *Sei*

$$w = u + vi = f(z)$$

eine in allen Punkten einer Kurve

$$C: \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leqq t \leqq b$$

stetige Funktion von $z = x + yi$ (oder allgemeiner bloß von t), welche überdies so beschaffen ist, daß sie C auf eine reguläre Kurve der w-Ebene:

$$\Gamma: \qquad u = p(t), \quad v = q(t), \quad a < t \leqq b$$

ein-eindeutig abbildet. Ferner sei $\sigma \geqq 0$ (resp. $\sigma \leqq 0$) eine stetige Funktion von t, welche nur nicht beständig verschwindet. Wenn nun w

durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\int_a^b \sigma f(z)\,dt = \mathfrak{w}\int_a^b \sigma\,dt,$$

so läßt sich über die Lage von $\mathfrak{w}$ *folgendes aussagen. Man umgebe* Γ *mit einem beliebigen konvexen Polygon oder allgemeiner mit einer beliebigen konvexen Kurve* K. *Dann liegt* $\mathfrak{w}$ *in* K.

Denn $\mathfrak{w}$ stellt den Massenmittelpunkt einer in K enthaltenen Massenverteilung vor, deren Dichte längs Γ den Wert $\varrho = \sigma dt/ds$ hat, und kann deshalb augenscheinlich nicht außerhalb K liegen.

Vermöge dieses Satzes kann man zeigen, und zwar ohne eine Spaltung in reelles und rein imaginäres vorzunehmen, daß das Verhältnis der beiden Periodizitätsmoduln eines elliptischen Integrals erster Ordnung nicht reell ausfallen kann.[1])

Der Darbouxsche Satz. Seien σ, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ reelle stetige Funktionen von t im Intervalle $a \leqq t \leqq b$, und sei außerdem $\sigma \geqq 0$. Setzt man dann $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, so erhält man:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\sigma\,dt\right| \leqq \int_a^b |f(t)|\,\sigma\,dt = |f(\xi)|\int_a^b \sigma\,dt,$$

wo $a < \xi < b$ ist. In dieser Formel ist der Darbouxsche Mittelwertsatz enthalten, welcher auch in der Form:

$$\int_a^b f(t)\sigma\,dt = \lambda f(\xi)\int_a^b \sigma\,dt$$

geschrieben werden kann, wobei λ eine unbestimmte komplexe Größe von absolutem Betrage $\leqq 1$ bedeutet. Die letzte Formel gilt auch, falls durchweg $\sigma < 0$ ist. Goursat bemerkt noch (a. a. O., Nr. 289), daß der Weierstraßsche Faktor $\mathfrak{w}$ im allgemeinen auf ein beschränkteres Gebiet als der Darbouxsche, $\lambda f(\xi)$, angewiesen ist.

---

1) Goursat, *Cours d'analyse*, Bd. 2, Nr. 314. Hermite hat auch schon in seinem *Cours* hierauf aufmerksam gemacht.

Die geometrische Deutung komplexer Zahlen durch die Punkte einer Ebene ist durch die Schrift von Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* Paris, 1806, bei den Mathematikern eingeführt worden. Gauß war schon im Jahre 1799 mit dieser Darstellung vertraut, während die Priorität der Veröffentlichung Caspar Wessel (1797/99) gebührt; vgl. Study, *Enzyklopädie*, I A 4, S. 155.

Sechstes Kapitel.

Analytische Funktionen und die darauf bezüglichen Differentialsätze. Die elementaren Funktionen. Lineare Transformationen.

§ 1. Die rationalen Funktionen als Vorbild.

Die einfachsten arithmetisch definierten reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen sind die Polynome und die gebrochenen rationalen Funktionen,

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

$$R(x) = \frac{G_1(x)}{G_2(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n},$$

denn dieselben werden bereits durch die vier Spezies, also ohne Benutzung eines unendlichen Prozesses erklärt. Da die vier Spezies auch für komplexe Zahlen ihre Gültigkeit beibehalten, so überträgt sich diese Definition ohne weiteres auf das komplexe Zahlensystem.

Vor allen Dingen wird man nach der Stetigkeit und Differenzierbarkeit dieser Funktionen fragen.[1]) Es sei zunächst die Funktion

$$f(z) = z^n$$

vorgelegt, wo n eine natürliche Zahl bedeute, und man bilde die Differenz:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = n z_0^{n-1} \Delta z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z_0^{n-2} (\Delta z)^2 + \cdots + (\Delta z)^n.$$

Daraus ersieht man, daß, wie auch immer Δz gehen 0 konvergieren möge, die rechte und somit auch die linke Seite dieser Gleichung dem Grenzwert 0 zustrebt; d. h. *die Funktion z^n ist für alle Werte ihres Arguments eine stetige Funktion von z.*

Bildet man ferner den Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = n z_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z_0^{n-2} \Delta z + \cdots + (\Delta z)^{n-1}$$

1) Wegen der genauen Erklärung dieser Begriffe vgl. man §§ 2 und 4.

und läßt man hierin Δz wiederum gegen 0 abnehmen, so konvergiert dieser Ausdruck ebenfalls gegen einen Grenzwert und zwar gegen die Größe $n z_0^{n-1}$. *Die Funktion z^n hat für jeden Wert von z eine Ableitung. Letztere ist überdies eine stetige Funktion von z.*

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß auch das allgemeine Polynom

$$G(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m,$$

sowie jede gebrochene rationale Funktion $R(z) = G_1(z)/G_2(z)$, abgesehen von den Stellen, wo der Nenner letzterer verschwindet, stetig ist und eine stetige Ableitung besitzt, die durch dieselbe Formel gegeben wird, welche die Differentialrechnung für den Fall reeller Koeffizienten und eines reellen Arguments lehrt.

Dieses Verhalten der rationalen Funktionen in bezug auf Stetigkeit und die Existenz einer Ableitung ist maßgebend für die allgemeinste Klasse von Funktionen, womit sich die komplexe Funktionentheorie beschäftigt.[1])

§ 2. Funktionen, Grenzwert und Stetigkeit.

Eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen entsteht dadurch, daß man jedem Punkte z eines Bereiches T der komplexen Zahlenebene eine Zahl

$$w = u + vi = f(z)$$

nach einem bestimmten Gesetze zuordnet.[2]) Dabei darf die Begrenzung von T sowohl aus Kurven als auch aus isolierten Punkten bestehen.[3]) Die Funktion $f(z)$ gibt zu zwei reellen Funktionen u und v der reellen Argumente x, y Anlaß, und umgekehrt läßt sich aus zwei derartigen Funktionen eine komplexe Funktion $u + vi = f(z)$ zusammensetzen.

Wie in Kap. 1, § 10, so läßt sich auch hier der Funktionsbegriff auf mehrdeutige Funktionen ausdehnen; vgl. Kap. 8. In der Folge werden wir jedoch schlechtweg unter einer Funktion stets eine solche

1) In einem Punkte, wo eine rationale Funktion aufhört, stetig zu sein, wird sie unendlich, wie sich das Argument z jenem Punkte auch immer nähern möge. Auch dieses Verhalten der rationalen Funktionen ist maßgebend für die einfachsten Singularitäten, welche eine analytische Funktion aufweisen kann, vgl. Kap. 7, § 6.

2) Wegen einer Besprechung des Funktionsbegriffs sei auf Kap. 1, § 1 verwiesen.

3) Allgemeinere Fälle sind in Kap. 5, § 2 besprochen.

verstehen, die wenigstens für den in Betracht kommenden Bereich der unabhängigen Variabelen und für die in Betracht kommende Bestimmung der Funktion in den Punkten dieses Bereiches eindeutig ist, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt wird.

Der Begriff des Grenzwerts, wie er in Kap. 1, § 2 und Kap. 2, § 1 für reelle Funktionen entwickelt wurde, überträgt sich sofort auf Funktionen eines komplexen Arguments. Sei $f(z)$ in der Umgebung des Punktes $z = a$, höchstens mit Ausnahme dieses Punktes selbst, eindeutig erklärt und man zeichne die Punkte $w = f(z)$, welche dieser Umgebung angehörigen Werten von z entsprechen, etwa in einer zweiten Zahlenebene, der w-Ebene auf. Gibt es dann einen festen Punkt $w = b$, in dessen Nähe diese Punkte w alle bleiben, sobald die Punkte z auf eine passende Umgebung von $z = a$ beschränkt werden, so sagt man, $f(z)$ *konvergiert beim Grenzübergange* $\lim z = a$ *gegen den Grenzwert* b; in Zeichen:

$$\lim_{z=a} f(z) = b.$$

Dies ist nämlich so zu verstehen: beschreibt man zuerst einen beliebig kleinen Kreis um $w = b$, so soll es dann stets möglich sein, einen zweiten Kreis um $z = a$ zu legen, dergestalt daß jeder im letzteren Kreise gelegene Punkt z zu einem im ersteren Kreise befindlichen Punkte $w = f(z)$ führt.

Arithmetisch wird dieser Begriff, wie folgt, festgelegt. Jeder beliebig kleinen positiven Größe ε soll sich eine zweite positive Größe δ so zuordnen lassen, daß für alle Werte von z, wofür $0 < |z - a| < \delta$ ist,

$$|b - f(z)| < \varepsilon$$

bleibt.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(z)$ beim Grenzübergange $\lim z = a = \alpha + \beta i$ gegen den Grenzwert $b = \mathsf{A} + \mathsf{B}i$ konvergiert, besteht darin, daß

$$\lim_{x=\alpha,\ y=\beta} u = \mathsf{A}, \qquad \lim_{x=\alpha,\ y=\beta} v = \mathsf{B}$$

sei, wie sich aus den Relationen (I) und (III) der Einleitung:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\mathsf{A} - u| + |\mathsf{B} - v|\} \leq |\mathsf{A} + \mathsf{B}i - u - vi| \leq |\mathsf{A} - u| + |\mathsf{B} - v|$$

sofort ergibt; vgl. Kap. 1, § 7, 2. Theorem, sowie Kap. 2, § 1. Hieraus folgt, daß das 2. Theorem von Kap. 1, § 7 unverändert für komplexe Größen gilt.

Im übrigen braucht die Funktion $f(z)$ nicht in allen Punkten $z \neq a$ der Umgebung von a definiert zu sein. Wenn sie nämlich bloß in einer unendlichen Punktmenge M mit der Häufungsstelle a erklärt ist, so gelten schon alle Definitionen und Sätze, welche sich auf Grenzwerte beziehen, sofern man nur die Punktmenge M an Stelle der vollen Umgebung von a exklusive dieses Punktes treten läßt.

Die Funktion $f(z)$ *wird unendlich* beim Grenzübergange $\lim z = a$, wenn jeder beliebig großen positiven Zahl G eine zweite positive Zahl δ so zugeordnet werden kann, daß für alle Werte von z, wofür $0 < |z - a| < \delta$ ist,

$$|f(z)| > G$$

bleibt; in Zeichen:

$$\lim_{z=a} f(z) = \infty \quad \text{oder} \quad f(a) = \infty$$

(lies: „$f(z)$ wird unendlich im Punkte a", oder abgekürzt: „$f(a)$ wird unendlich"). Der reziproke Wert von $f(z)$ konvergiert sodann gegen Null:

$$\lim_{z=a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Umgekehrt reicht diese letzte Bedingung hin, damit $f(a) = \infty$ werde.

Die Funktion $f(z)$ *bleibt endlich im Punkte a*, wenn es zwei positive Konstanten M und δ gibt, derart daß für alle Werte von z, wofür $0 < |z - a| < \delta$ ist[1]),

$$|f(z)| < M$$

bleibt.

Man beachte wohl, daß mit diesen beiden Definitionen bezüglich des Unendlich-Werdens und des Endlich-Bleibens einer Funktion alle Möglichkeiten noch nicht erschöpft sind. Es bleibt noch ein dritter Fall übrig, nämlich der, daß eine Funktion beim Herannahen von z an den Punkt a längs eines Weges unendlich wird, während sie bei der Wahl eines anderen Weges endlich bleibt. Allgemeiner kann es zwei Teilmengen, je mit der Häufungsstelle a geben, derart daß für die erste $f(z) = \infty$ wird, während für die zweite $f(z)$ endlich bleibt. Die Funktion verhält sich dann im Punkte a unbestimmt.

Endlich sei noch bemerkt, daß man unter dem Grenzübergange der unabhängigen Variabelen $\lim z = \infty$ eben den Grenzübergang

---

1) Wir schließen den Wert $z = a$ nicht etwa deshalb aus, weil $f(a)$ möglicherweise „*den Wert* ∞" haben könnte, was ja Unsinn wäre, da wir „*die Zahl* ∞" (das sogenannte *eigentliche* Unendliche) in unser Zahlensystem nicht aufgenommen haben. Vielmehr wollen wir dem Falle vorbeugen, daß $f(z)$ im Punkte a überhaupt nicht erklärt wurde.

$\lim 1/z = 0$ versteht; d. h. an Stelle der zweiten Relation bei den vorhergehenden Definitionen: $0 < |z - a| < \delta$, tritt jetzt $|1/z| < \delta$ oder $|z| > G'$.

Stetigkeit. Die früheren Definitionen der Stetigkeit passen hier unverändert. Demnach heißt die Funktion $f(z)$ im Punkte a stetig, wenn

$$\lim_{z=a} f(z) = f(a)$$

ist; sie heißt in einem Bereiche stetig, wenn sie in jedem Punkte des Bereiches stetig ist; endlich heißt sie in einem Randpunkte a stetig bzw. nimmt in a einen Randwert an, wenn bei Beschränkung der unabhängigen Variabelen z auf die inneren Punkte des betreffenden Bereiches ein Grenzwert $\lim\limits_{z=a} f(z)$ zustande kommt. Der Satz von Kap. 2, § 2, S. 53 gilt auch für eine komplexe Funktion $f(z)$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Funktion $u + vi = f(x + yi)$ besteht in der Stetigkeit der beiden reellen Funktionen u und v der reellen Argumente x, y. Es bleiben die Sätze von Kap. 1, § 3 über stetige Funktionen auch hier bestehen. Insbesondere erweisen sich die Polynome und die gebrochenen rationalen Funktionen in allen Punkten, wo sie definiert sind, als stetig. Des weiteren lautet die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit, Kap. 1, § 4, ebenfalls gerade so, wie im reellen Gebiete: $f(z)$ heißt in einem Bereiche T gleichmäßig stetig, wenn jedem beliebig kleinen positiven ε ein von z unabhängiges positives δ so zugeordnet werden kann, daß für je zwei Punkte z, z' von T, wofür $|z - z'| < \delta$ ist, die Beziehung gilt:

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Es bleibt der 4. Satz von Kap. 1, § 4 noch in Kraft: Ist $f(z)$ in jedem Punkte eines abgeschlossenen Bereiches stetig, so ist $f(z)$ daselbst gleichmäßig stetig. $f(z)$ ist dann auch endlich im genannten Bereiche.

§ 3. Über die Änderung des Arcus einer stetigen Funktion.

In jedem inneren und Randpunkte eines endlichen durch eine einzige einfache geschlossene Kurve begrenzten Bereichs S sei

$$f(z) = u + vi$$

eine stetige, nirgends verschwindende Funktion von z. Dann wird

die reelle Funktion

$$(1) \qquad \varphi = \operatorname{arc} f(z)$$

in jedem dieser Punkte unendlich vieldeutig definiert und zwar so, daß, wenn $\bar{\varphi}$ eine besondere Bestimmung von φ im Punkte z bedeutet, jede andere Bestimmung daselbst in der Formel

$$\bar{\varphi} + 2k\pi, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

enthalten ist. In der Nähe eines beliebigen Punktes z_0 lassen sich demnach die verschiedenen Bestimmungen von φ zu eindeutigen stetigen Funktionen zusammenfassen, was man sich geometrisch durch Flächenstücke veranschaulichen kann, deren alle aus einem einzigen derselben durch Verschiebung dieses parallel zur φ-Achse um ganzzahlige Vielfache von 2π hervorgehen. Man kann die Umgebung von z_0 außerdem noch so beschränken, daß keine Ordinate eines von diesen Flächenstücken jemals einer Ordinate eines anderen derselben gleich wird.

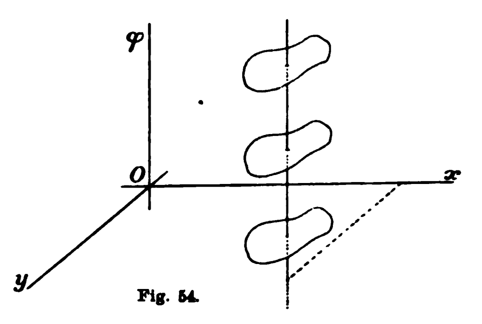


Fig. 54.

Der geometrische Ort der durch die Gleichung (1) definierten Funktion besteht daher aus einer über S ausgebreiteten Fläche, deren Mäntel von jeder der φ-Achse parallelen Geraden, welche S durchsetzt, in unendlich vielen um 2π voneinander abstehenden Punkten getroffen werden. Im übrigen verläuft jeder Mantel in der Nähe jedes Schnittpunktes stetig. Die verschiedenen Mäntel hängen also *im Kleinen* sicher nicht zusammen. Können sie aber nicht vielleicht *im Großen* doch ineinander übergehen.[1]) Die Verneinung dieser Frage bildet im wesentlichen den Inhalt des folgenden Satzes.

Theorem.[2]) *In jedem Punkte eines abgeschlossenen Bereiches S, welcher von einer einzigen einfachen geschlossenen Kurve begrenzt ist, sei $f(z)$ eine stetige, nirgends verschwindende Funktion. Setzt man dann eine Bestimmung der Funktion*

1) Hätten wir S nicht als *einfach zusammenhängend* vorausgesetzt, so könnte dies in der Tat eintreten. Man betrachte etwa die Funktion $f(z) = z$ im Kreisringe $1 < |z| < 2$. Hier gibt es nur einen einzigen Mantel, welcher sich denn auch unendlich oft um die φ-Achse windet.

2) Der Satz rührt von Cauchy her, Turiner Abhandlung aus dem Jahre 1831, vgl. Kap. 7, § 13; *Exercices d'analyse*, Bd. 2 (1841) p. 109; Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques* 2. Aufl., ch. 2.

$$\varphi = \operatorname{arc} f(z)$$

längs des Randes von S stetig fort, so kehrt dieselbe nach vollendetem Umlaufe zum Anfangswerte wieder zurück.

Wir geben zwei Beweise des Satzes. Dabei beschränken wir uns auf reguläre Randkurven. Die Verallgemeinerung auf beliebige Jordansche Kurven ist nicht schwierig. Der erste Beweis verläuft so. Gesetzt, der Satz sei falsch. Dann teile man S in zwei Bereiche I und II. Der Gesamtzuwachs von φ längs des Randes von S ist offenbar gleich der Summe der den beiden Bereichen I, II entsprechenden Zuwächse. Darum muß mindestens eine dieser Größen, etwa die dem Bereich I entsprechende, von Null verschieden sein. Jetzt zerlege man den Bereich I in zwei Stücke und stelle man dieselbe Überlegung wieder an. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens erhält man eine Reihe ineinander eingeschachtelter Bereiche, deren Maximaldurchmesser gegen Null abnimmt und welche also einen Punkt $\bar{z}$ von S bestimmen. Demnach gibt es in jeder Umgebung von $\bar{z}$ eine geschlossene Kurve, derart daß eine Bestimmung von φ, über dieselbe stetig fortgesetzt, nicht zum Anfangswert zurückkehrt. Hierin liegt ein Widerspruch, denn der Satz ist ja im Kleinen richtig.

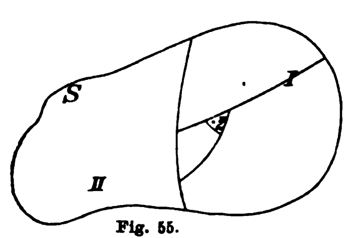


Fig. 55.

Will man auf die Art und Weise der sukzessiven Zerlegungen von S näher eingehen, so bietet der Satz von Kap. 5, § 10 bereits die nötigen Hilfsmittel dazu. Dabei wird einer der beiden Bereiche, in welche der jeweilige Bereich zerfällt, stets ein Bereich σ sein, so daß man eventuell zu einem Bereich σ gelangt, wofür der Satz nicht gelten soll. Die weitere Zerlegung dieses Bereichs gestaltet sich dann in übersichtlicher Weise.

Der zweite vorhin angekündigte Beweis besteht einfach darin, daß wir auf Grund des letzten Satzes von Kap. 5, § 10 konstatieren, daß sich die verschiedenen Bestimmungen von φ auch im Großen zu eindeutigen stetigen Funktionen zusammenfassen lassen, womit denn alles schon in Ordnung ist.

Aus dem vorstehenden Satze ergibt sich ein Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra*. Sei

$$G(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

ein beliebiges Polynom. Dann muß dasselbe mindestens für einen Wert von z verschwinden. Wäre das nämlich nicht der Fall, so

würde $G(z)$ in jedem Bereich der Ebene den Bedingungen besagten Satzes genügen. Als Bereich S nehme man also den Kreis $|z| \leqq R$ und schreibe

$$G(z) = z^n \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right).$$

Dann ist

$$\operatorname{arc} G(z) = \operatorname{arc} z^n + \operatorname{arc}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right).$$

Für große Werte von R wird der Wert der Klammer am Rande $|z| = R$ von S beliebig wenig von a_0 abweichen, d. h. der die Klammer darstellende Punkt der Zahlenebene wird innerhalb eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt der Punkt a_0 bildet und dessen Radius so klein genommen werden kann, daß der Kreis den Punkt $z = 0$ nicht umfaßt. Infolgedessen wird jede Bestimmung von

$$\operatorname{arc}(a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n),$$

welche sich stetig ändern soll, wenn z den Rand von S beschreibt, zum Ausgangswert wieder zurückkehren. Dagegen ist

$$\operatorname{arc} z^n = n\theta,$$

wo $z = re^{\theta i}$ gesetzt ist. Darum nimmt $\operatorname{arc} z^n$ und somit auch $\operatorname{arc} G(z)$ nach vollendetem Umlaufe um $2n\pi$ zu. In diesem Widerspruch besteht der Beweis.[1])

Zum Schluß leiten wir noch einen Zusatz ab, dessen Umkehrung im Falle einer analytischen Funktion $f(z)$ uns später beschäftigen wird.

Zusatz. *Sei $f(z)$ eine Funktion, die in allen Punkten von S mit Ausnahme eines einzigen innern Punktes a denselben Bedingungen genügt, wie vorhin. In a soll $f(z)$ verschwinden bzw. unendlich werden, und zwar so, daß sich $f(z)$ in der Nähe von a in der Form darstellen läßt:*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist und $\varphi(z)$ eine im Punkte a stetige und von Null verschiedene Funktion bedeutet. Läßt

1) Es sei auch auf den interessanten Beweis dieses Satzes verwiesen, welchen Gauß vermöge eines Doppelintegrals gegeben hat: *Werke*, Bd. 3, S. 107; Ostwald, *Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 14, S. 61. Hierüber vgl. man ferner Bôcher, „A simplification of Gauß's Third Proof...", *Amer. Jour. of Math.*, Bd. 17 (1895), S. 260, sowie *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2. Reihe, Bd. 1 (1895), S. 205. Eine einfache Darstellung des Beweises findet sich auch bei Goursat, *Cours d'analyse*, Bd. 1, Nr. 142.

man nun den Punkt z den Rand von S durchlaufen, so wächst die Funktion $\operatorname{arc} f(z)$ *um* $2m\pi$.

Zum Beweise bemerke man, daß die Relation $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$ nicht bloß für eine beschränkte Umgebung des Punktes a gilt, sondern daß ihr Geltungsbereich das ganze Gebiet S umfaßt. Darum hat man allgemein für alle Punkte von S, und also insbesondere auch für den Rand:

$$\operatorname{arc} f(z) = \operatorname{arc}(z-a)^m + \operatorname{arc} \varphi(z).$$

Infolgedessen kehrt der letzte Arcus nach vollendetem Umlaufe in seinen Anfangswert wieder zurück, während der zweitletzte Arcus um $2m\pi$ wächst.

Sowohl das vorstehende Theorem als auch der Zusatz gelten noch für mehrfach zusammenhängende Bereiche, sofern man eine Bestimmung des Arcus über den ganzen Rand in positivem Sinne hin erstreckt, wie man aus der Zerlegung von Kap. 5, § 9 leicht erkennt.

§ 4. Die Ableitung.

Wie bei den reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen, so bildet man auch hier den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

wo z einen festen inneren Punkt des Definitionsbereichs T der Funktion $w = f(z)$ bedeutet und $z + \Delta z$ ein zweiter Punkt von T sein soll. Konvergiert dann dieser Quotient, als Funktion von Δz allein betrachtet, beim Grenzübergange $\lim \Delta z = 0$ gegen einen Grenzwert, so sagt man, $f(z)$ ist für den betreffenden Wert von z *differentiierbar*, und man nennt diesen Grenzwert die *Ableitung* von $f(z)$ im Punkte z:

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = D_z w.$$

Die allgemeinen Differentiationsformeln für reelle Funktionen:

$$D_z(cw) = c D_z w;$$
$$D_z(w_1 + w_2) = D_z w_1 + D_z w_2;$$
$$D_z(w_1 w_2) = w_1 D_z w_2 + w_2 D_z w_1;$$
$$D_z \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2 D_z w_1 - w_1 D_z w_2}{w_2{}^2};$$
$$D_z f(w) = D_w f(w) D_z w,$$

bleiben noch im komplexen Gebiete bestehen. Auch folgt aus der Existenz einer Ableitung die Stetigkeit der Funktion. Was spezielle Formeln anbetrifft, so ist bereits in § 1 dargetan, daß

$$D_z z^n = n z^{n-1}, \qquad n = \text{einer natürlichen Zahl.}$$

Außerdem ist

$$D_z c = 0 .$$

Hieraus beweist man sofort die Differentiierbarkeit der Polynome, sowie der rationalen Funktionen.

Auch das Differential wird ebenso definiert, wie im reellen Falle. Hat nämlich w eine Ableitung:

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = D_z w ,$$

so setze man

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = D_z w + \zeta, \qquad \Delta w = D_z w \Delta z + \zeta \Delta z ,$$

wo also $\lim_{\Delta z = 0} \zeta = 0$ ist. Hierdurch wird der Zuwachs Δw in zwei Teile zerlegt und zwar a) in einen Teil $D_z w \Delta z$, der dem Zuwachse Δz proportional ist; b) in einen Rest $\zeta \Delta z$, der aus einer unendlich kleinen Größe höherer Ordnung als Δz besteht. Den ersten Teil nennt man mit Weierstraß den *Hauptteil* von Δw, und dieser Hauptteil ist es, welchen man als das *Differential* $dw = df(z)$ der Funktion definiert:

$$dw = D_z w \Delta z .$$

Dabei ist wohl bemerkt z die unabhängige Variabele. Unter Beibehaltung dieser Voraussetzung beweist man dann, daß

$$dz = \Delta z$$

ist. So kommt

$$dw = D_z w \, dz , \qquad D_z w = \frac{dw}{dz} .$$

Setzt man nun aber z gleich einer Funktion einer dritten Variabelen t:

$$z = \varphi(t) ,$$

wo $\varphi(t)$ differentiierbar sein soll, so hat man:

$$dz = \varphi'(t) \Delta t .$$

Auf Grund der Relation

$$D_t w = D_z w \cdot D_t z$$

ergibt sich dann, daß

$$dw = D_t w \Delta t = D_z w D_t z \Delta t$$
$$= D_z w\, dz$$

ist, so daß also die Formel

$$dw = D_z w\, dz$$

allgemein gilt, auch wenn w und z als Funktionen eines Parameters t dargestellt sind.

Bisweilen will man der Variabelen $z = x + yi$ die Bedingung unterwerfen, auf einer bestimmten Kurve

$$x = \omega(\lambda), \qquad y = \chi(\lambda)$$

zu bleiben, wo ω, χ reelle, mit stetigen Ableitungen erster Ordnung $x' = \omega'(\lambda)$, $y' = \chi'(\lambda)$ versehene Funktionen der reellen Variabelen λ bedeuten. Unter dz versteht man dann die Funktion

$$dz = (x' + y'i)d\lambda, \qquad d\lambda = \Delta\lambda,$$

und es gilt auch hier die Relation

$$dw = D_z w dz = D_z w(x' + y'i)d\lambda.$$

Den höheren Differentialen d^2w, $d^3w, \ldots$ eine selbständige Bedeutung beizulegen, ist zwecklos. Man faßt

$$\frac{d^2w}{dz^2}, \ldots \frac{d^nw}{dz^n}, \ldots$$

bloß als eine Bezeichnung für die zweite, ... $n$te, ... Ableitung der Funktion $w = f(z)$ in bezug auf z auf.

Aufgabe. In einem Punkte z_0 möge $f(z)$ mit einer Ableitung versehen sein und überdies längs einer von z_0 ausgehenden Kurve einen konstanten Wert behalten. Man zeige, daß dann $f'(z_0) = 0$ ist.

§ 5. Analytische Funktionen.

Hat eine Funktion von z in jedem inneren Punkte eines Bereiches T, in welchem sie definiert ist, eine stetige Ableitung, so heißt sie[1]) *analytisch im Bereiche T*. Sie verhält sich *analytisch in einem Punkte* $z = z_0$, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes analytisch ist. Der Vereinbarung von § 2 gemäß werden ja hier nur

1) Die Bezeichnungen *holomorph* und *regulär* werden auch im Sinne von *analytisch* gebraucht.

solche Funktionen in Betracht gezogen, welche in ihrem Definitionsbereiche eindeutig sind, so daß also die vorstehende Definition die Eindeutigkeit der Funktion im Bereiche T schon zur Voraussetzung hat.

Über diese Definitionen ist nun folgendes zu bemerken. Auf Grund des später zu besprechenden Goursatschen Satzes (vgl. Kap. 7, § 16) erweist sich die Forderung der Stetigkeit der Ableitung als überflüssig, da nämlich die bloße Existenz einer Ableitung in jedem Punkte eines Bereiches ihre Stetigkeit schon nach sich zieht. Nachdem also dieser Satz einmal dargetan ist, liegt es nahe, die obigen Definitionen, wie folgt, zu formulieren: Eine Funktion heißt *analytisch in einem Punkte*, wenn sie in diesem Punkte eine Ableitung besitzt. Sie heißt *analytisch in einem Bereiche*, wenn sie sich in jedem Punkte dieses Bereiches analytisch verhält.

Im übrigen bleibt vor der Hand dahingestellt, ob der Bereich T, in welchem wir die Funktion gerade betrachten, nicht eventuell einer Erweiterung fähig sei, oder, wie man sich wohl auszudrücken pflegt, ob die Funktion nicht über T hinaus analytisch fortgesetzt werden könne. Dieser Frage wird in einem späteren Kapitel eine genaue Untersuchung gewidmet. Mit ihrer Erledigung kommt erst die vollständige Definition einer analytischen Funktion zu stande. Immerhin werden wir einstweilen jede Funktion als analytisch bezeichnen, welche sich in einem bestimmten Bereiche analytisch verhält.

Aus den Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen findet man eine Reihe von Sätzen über analytische Funktionen.

Sind die Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ beide in einem Bereiche bzw. in einem Punkte analytisch, so gilt das nämliche von den Funktionen

$$f(z) + \varphi(z), \qquad f(z)\,\varphi(z)$$

und, sofern $\varphi(z)$ daselbst nicht verschwindet, auch von der Funktion

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

Ist $f(w)$ eine im Punkte w_0 analytische Funktion von w und ist ferner $\varphi(z)$ eine im Punkte z_0 analytische Funktion von z, die dort den Wert w_0 annimmt, so ist $f(w)$, als Funktion von z betrachtet, im Punkte z_0 analytisch.

Wir fügen noch den Satz hinzu, daß sich die Polynome, sowie die gebrochenen rationalen Funktionen in jedem Punkte der Zahlenebene, in welchem sie endlich bleiben, analytisch verhalten.

§ 6. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein einer Ableitung erhält man, wie folgt. Sei

$$w = u + vi = f(z)$$

eine Funktion von z, die im Punkte $z = z_0$ eine Ableitung zuläßt. Dann konvergiert der Differenzenquotient $\Delta w/\Delta z$ gegen ein und denselben Grenzwert, $D_z w$, wie auch immer der Grenzübergang $\lim \Delta z = 0$ stattfinden möge. Insbesondere wollen wir nun Δz zuerst reelle und darauf rein imaginäre Werte durchlaufen lassen. So kommt

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta_y u + i\Delta_y v}{i\Delta y},$$

und man erhält also:

$$D_z w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Trennt man hier reelles und rein imaginäres, so gelangt man zu den *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*:[1])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{2}$$

als eine notwendige Bedingung dafür, daß die Funktion $f(x)$ eine Ableitung zulasse.

Umgekehrt seien u, v zwei reelle Funktionen der beiden reellen Variabelen x, y, welche in der Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) mit allen partiellen Ableitungen erster Ordnung ausgestattet sind. Letztere sollen außerdem den Gleichungen (2) genügen. Ferner besitze sowohl u als v im Punkte (x_0, y_0) ein vollständiges Differential, d. h. wenn man

1) Diese Differentialgleichungen treten bereits bei d'Alembert auf, *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides,* Paris, 1752. Sie waren auch Euler (1755) und Lagrange (1762/65) bekannt. Hierüber vergleiche man zwei Abhandlungen von Stäckel, *Bibliotheca Mathematica,* 3. Reihe, Bd. 1 (1900), S. 109, sowie *ibid.* Bd. 2 (1901), S. 111; ferner *Enzyklopädie* 2 B 1, § 2. Die Bedeutung dieser Differentialgleichungen für die moderne Funktionentheorie wurde zuerst von Cauchy und Riemann erkannt. Letzterer macht sie in seiner Inauguraldissertation, Göttingen, 1851, geradezu zum Ausgangspunkt für die ganze Theorie

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$
$$= \frac{\partial u_0}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial u_0}{\partial y_0}\Delta y + \varrho(\Delta x, \Delta y)$$

setzt, so soll $\varrho(\Delta x, \Delta y)$ unendlich klein von einer höheren Ordnung als Δx, Δy werden, und zwar in dem Sinne, daß

$$\lim_{\Delta x = 0,\, \Delta y = 0} \frac{\varrho(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0$$

ist. Diese Bedingung wird stets erfüllt, falls die Ableitungen $\partial u/\partial x$ und $\partial u/\partial y$ in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig sind.

In ähnlicher Weise sei

$$\Delta v = \frac{\partial v_0}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial v_0}{\partial y_0}\Delta y + \sigma(\Delta x, \Delta y),$$

wo

$$\lim_{\Delta x = 0,\, \Delta y = 0} \frac{\sigma(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0$$

ist. Dann läßt $u + vi$, als Funktion von $z = x + yi$ betrachtet, eine Ableitung zu. In der Tat ist

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\Delta x + \frac{\partial u_0}{\partial y_0}\Delta y + i\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\Delta x + i\frac{\partial v_0}{\partial y_0}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\varrho(\Delta x, \Delta y) + i\sigma(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Der erste Term rechts kann noch vermöge der Relationen (2) auf die Form gebracht werden:

$$\frac{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + i\frac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + i\frac{\partial v_0}{\partial x_0},$$

und hängt somit von Δx und Δy nicht mehr ab. Was den zweiten Term angeht, so ist nach den Ungleichungen (I) und (III) der Einleitung

$$\left|\frac{\varrho(\Delta x, \Delta y) + i\sigma(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y}\right| \leqq \sqrt{2}\left\{\frac{|\varrho(\Delta x, \Delta y)|}{|\Delta x| + |\Delta y|} + \frac{|\sigma(\Delta x, \Delta y)|}{|\Delta x| + |\Delta y|}\right\}.$$

Infolgedessen konvergiert der Differenzenquotient $\Delta w/\Delta z$ gegen einen Grenzwert, und zwar ist

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + i\frac{\partial v_0}{\partial x_0}.$$

Aus den vorausgehenden Entwicklungen entnimmt man den folgenden wichtigen Satz.

Theorem. *In einem gegebenen Bereiche T seien u und v zwei reelle eindeutige Funktionen der beiden reellen Variabelen x, y, welche überdies mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ausgestattet sind, und man bilde die komplexe Funktion*

$$w = u + vi = f(z).$$

Damit sich dann $f(z)$ im Bereiche T analytisch verhält, ist notwendig und hinreichend, daß u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen Genüge leisten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so hat man:

$$D_z w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Beispiel. Sei

$$w = u + vi = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Mithin läßt diese Funktion w für alle Werte von $z = x + yi$ eine Ableitung zu und zwar ist

$$\frac{dw}{dz} = w.$$

Aufgabe 1. Hat eine Funktion $f(z)$ in jedem Punkte eines Bereiches T eine verschwindende Ableitung:

$$f'(z) = 0,$$

so ist $f(z)$ in T konstant. (Vergleiche S. 57, Satz.)

Aufgabe 2. Sind $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei Funktionen, deren Ableitungen in jedem Punkte eines Bereiches T miteinander übereinstimmen:

$$f'(z) = \varphi'(z),$$

so unterscheiden sich diese Funktionen in T voneinander überhaupt nur um eine additive Konstante:

$$f(z) = \varphi(z) + k.$$

Aufgabe 3. Man beweise durch direkte Ausführung des Grenzübergangs, daß bei Einführung von Polarkoordinaten die Cauchy-

Riemannschen Differentialgleichungen die Form annehmen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Im übrigen ist

$$\frac{dw}{dz} = \lambda \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\lambda}{i}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

wo $\lambda = \cos\varphi - i\sin\varphi$ ist.

Aufgabe 4. Man zeige, daß sich die Funktion

$$w = \log r + \varphi i, \qquad -\pi < \varphi < \pi,$$

wo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gesetzt ist, in jedem Punkte $z \neq 0$ analytisch verhält.

Aufgabe 5. Im Punkte P eines Bereiches T mögen sich zwei Kurven PA, PB unter einem rechten Winkel schneiden. Ihre Bogenlänge, von P aus gemessen, werde mit σ bzw. τ bezeichnet. Den Tangenten PA' und PB' in P möge als positiver Sinn derjenige beigelegt werden, welcher dem wachsenden Parameter σ bzw. τ der zugehörigen Kurve entspricht; im übrigen sollen diese Tangenten mit Rücksicht auf ihren Sinn so gegeneinander orientiert sein, wie die reelle gegen die imaginäre Achse. Man zeige, daß dann

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

ist.

Aufgabe 6. Man leite die Formeln der 3. Aufgabe mittels derjenigen der 5. Aufgabe ab.

Aufgabe 7. Verhält sich eine Funktion

$$f(x+iy) = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

in einem bestimmten Bereiche analytisch, so ist dort

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

sowie

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial \log R}{\partial x} + i\frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

Man leite die entsprechenden Relationen für den Fall her, daß auch z durch Polarkoordinaten ausgedrückt wird: $z = r\cos\theta + i\sin\theta$.

§ 7. Die Umkehrfunktion.

Besitzt eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen,

$$y = f(x),$$

in der Umgebung des Punktes $x = x_0$ eine stetige Ableitung und ist ferner $f'(x_0) \neq 0$, so läßt $f(x)$ in der Nähe dieses Punktes eine eindeutige Umkehrung zu:

$$x = \varphi(y),$$

wo φ eine stetige Funktion von y in der Nähe des Punktes $y_0 = f(x_0)$ ist und eine stetige Ableitung

$$\varphi'(y) = 1/f'(x)$$

hat; vgl. Kap. 1, § 6, Aufgabe 5.

Ein analoger Satz gilt auch im Kleinen für Funktionen einer komplexen Größe.

Satz. *Sei $f(z)$ eine im Punkte $z = z_0$ analytische Funktion von z und sei ferner $f'(z_0) \neq 0$. Man betrachte eine Umgebung T von z_0: $|z - z_0| < h$, worin sich $f(z)$ analytisch verhält. Bei geeigneter Wahl von h kann man dann in der w-Ebene eine Umgebung Σ von w_0: $|w - w_0| < k$ so bestimmen, daß die Gleichung*

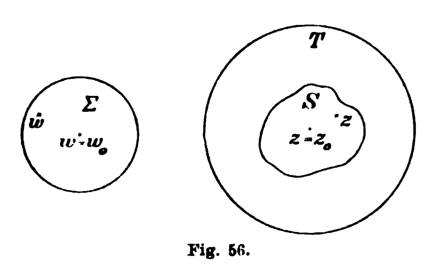


Fig. 56.

$$w = f(z),$$

wobei w einen beliebigen Punkt von Σ bedeutet, eine und nur eine in T enthaltene Lösung z zuläßt. Die solchergestalt bestimmte Umkehrfunktion

$$z = \varphi(w)$$

ist in Σ analytisch, und es besteht im übrigen die Relation:

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Satz über die Umkehrung zweier reellen Funktionen, Kap. 2, § 6. Im vorliegenden Falle wird man

$$w = u + vi = f(x + yi),$$

also

$$u = \psi(x, y), \qquad v = \omega(x, y)$$

zu setzen haben. Dabei besitzen die Funktionen ψ, ω stetige erste Ableitungen, welche den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. Infolgedessen läßt sich die Jacobische Determinante auf die Form bringen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2,$$

woraus man ersieht, daß dieselbe im Punkte (x_0, y_0) nicht verschwindet. Hiermit sind alle Voraussetzungen des genannten Existenztheorems erfüllt, und darum steht die eindeutige Umkehrbarkeit des genannten Gleichungspaares fest.[1])

Es bleibt nur noch zu beweisen übrig, daß die solchergestalt gewonnene Funktion $z = \varphi(w)$ sich in jedem Punkte von Σ analytisch verhält. Daß x, y, als Funktionen von u, v betrachtet, stetige erste Ableitungen haben, besagt schon der soeben in Anwendung gebrachte Satz. Diese genügen ferner den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

wie man nachrechnen kann.

Noch einfacher ist indessen der folgende direkte Beweis. Man will doch feststellen, daß $\Delta z/\Delta w$ gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn Δw dem Wert 0 zustrebt. Nun ist einerseits

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) \neq 0,$$

wo Δz die unabhängige Variabele ist, während man andererseits

$$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}}$$

hat, wobei Δw jetzt als unabhängige Variable aufgefaßt werde. Läßt man hier Δw gegen 0 abnehmen, so nähert sich wegen der Stetigkeit von $\varphi(w)$ auch Δz der 0, ohne jedoch wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit der Beziehung diesen Wert jemals zu erreichen. Daraus erkennt man, daß die rechte Seite dieser Gleichung einem Grenzwert

1) Man erhält hiermit allerdings zunächst eine quadratförmige Umgebung des Punktes $w_0 = u_0 + iv_0$. Daraus kann man aber offenbar die gewünschte kreisförmige Umgebung ausschneiden.

zustrebt, und zwar der Größe $1/f'(z)$. Außerdem ist evident, daß diese Funktion eine stetige Funktion von w ist, und hiermit ist der Beweis fertig:

$$\frac{dz}{dw} = \varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Dem Bereich Σ entspricht hiernach ein innerhalb T gelegenes den Punkt z_0 enthaltendes Kontinuum S der z-Ebene.

§ 8. **Konforme Abbildung.**[1]

Durch eine analytische Funktion $w = f(z)$ wird nach dem vorhergehenden Paragraphen eine ein-eindeutige stetige Abbildung der Umgebung eines Punktes $z = z_0$, in welchem $f(z)$ sich analytisch verhält und $f'(z) \neq 0$ ist, auf eine Umgebung des entsprechenden Punktes $w_0 = f(z_0)$ der w-Ebene definiert. Wir wollen jetzt auf die Beschaffenheit dieser Abbildung näher eingehen, indem wir zeigen, daß kleine Figuren des einen Bereichs in annähernd ähnliche Figuren des anderen Bereiches übergehen.

Die Funktion $w = az + b$. Zu dem Ende wollen wir zunächst die durch die spezielle Funktion

(1) $$w = f(z) = az + b, \qquad f'(z_0) = a \neq 0,$$

definierte Abbildung untersuchen. Hier ist

(2) $$w - w_0 = a(z - z_0).$$

Setzen wir

$$z - z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$w - w_0 = R(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$
$$a = \mathsf{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

so ergibt sich, daß

$$R = \mathsf{A}r, \qquad \Phi = \varphi + \alpha$$

ist. Um diese Transformation geometrisch bequem zu deuten, spalten wir dieselbe in zwei Transformationen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \bar r = r, \\ \bar\varphi = \varphi + \alpha, \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} R = \mathsf{A}\bar r, \\ \Phi = \bar\varphi. \end{cases}$$

---

1) Die Resultate dieses Paragraphen sind bereits alle in Kap. 2, § 7 enthalten. Immerhin dürfte die einfache selbständige Herstellung der analytischen Grundlage für dieselben vermöge komplexer Variabelen schon an und für sich von Interesse sein.

Denken wir uns die z- und die w-Ebene wie zwei Blätter Papier aufeinander gelegt, und zwar so, daß die Punkte z_0, w_0 übereinander zu liegen kommen, während die reelle und die rein imaginäre Achse der einen Ebene der reellen bzw. der rein imaginären Achse der anderen Ebene parallel laufen und gleichen Sinn haben, so wird, der Transformation (I) entsprechend, die z-Ebene um den festen Punkt z_0 durch den Winkel α gedreht und darauf, der Transformation (II) gemäß, einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Ähnlichkeitsverhältnisse A unterworfen, wobei z_0 wiederum festbleibt. Auf diese Weise werden die Punkte der ursprünglichen z-Ebene in solche übergeführt, welche auf die festgebliebene w-Ebene projiziert die Abbildung (1) gerade bewirken. Hiermit sind wir zum folgenden Satze geführt.

Durch die Funktion

$$w = f(z) = az + b, \qquad f'(z_0) = a \neq 0,$$

wird eine beliebige Figur der z-Ebene auf eine ähnliche Figur der w-Ebene abgebildet. Das Ähnlichkeitsverhältnis hat den Wert $|f'(z_0)|$, und die Abbildung erscheint um den Punkt w_0 durch den Winkel arc $f'(z_0)$ *verdreht.*

Die allgemeine analytische Funktion $w = f(z)$. Die soeben besprochene Abbildung ist für die durch eine beliebige analytische Funktion $w = f(z)$ definierte Abbildung vorbildlich, wofern man sich auf eine kleine Umgebung eines Punktes z_0 beschränkt, in welchem $f'(z_0)$ nicht verschwindet. Aus der Beziehung

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$$

folgt nämlich:

$$(3) \qquad \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \zeta, \qquad \Delta w = f'(z_0)\Delta z + \zeta \Delta z,$$

wobei ζ zugleich mit Δz gegen 0 konvergiert und also für eine kleine Umgebung T des Punktes z_0 dem absoluten Betrage nach klein bleibt. Genauer gesagt: Nimmt man eine positive Größe ε beliebig klein an, etwa gleich einem Hundertstel oder einem Tausendstel von $|f'(z_0)|$, so kann man eine Umgebung T des Punktes z_0: $|z - z_0| < h$ so bestimmen, daß, für alle Punkte $z = z_0 + \Delta z$ von T, $|\zeta| < \varepsilon$ bleibt. Nun definiert aber nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$(4) \qquad dw = f'(z_0)\Delta z$$

eine Abbildung von T auf die Umgebung von w_0, wobei jede Figur von T in eine ähnliche Figur der w-Ebene verwandelt wird. Aus (3) geht dann hervor, daß die wirkliche Abbildung $w = f(z)$ nur verhältnismäßig wenig von dieser abweicht und insbesondere auch eine solche ist, wofür der Habitus der ursprünglichen Figur erhalten bleibt. In der Tat ergibt sich aus (3) und (4), daß

$$\Delta w = dw\left(1 + \frac{\zeta}{f'(z_0)}\right)$$

ist. Hieraus findet man (vgl. die Einleitung, Formeln (I) und (II)):

$$|dw| - \frac{\varepsilon}{|f'(z_0)|}|dw| \leqq |\Delta w| \leqq |dw| + \frac{\varepsilon}{|f'(z_0)|}|dw|,$$

$$\operatorname{arc} dw - \operatorname{arc}\sin\frac{\varepsilon}{|f'(z_0)|} \leqq \operatorname{arc}\Delta w \leqq \operatorname{arc} dw + \operatorname{arc}\sin\frac{\varepsilon}{|f'(z_0)|},$$

so daß also der Bildpunkt $w_0 + \Delta w$ des Punktes $z_0 + \Delta z$ von dem Bildpunkte $w_0 + dw$ desselben Punktes um eine Entfernung absteht, welche *im Vergleich zur Entfernung* $|dw|$ klein ist, und zwar ist die relative Abweichung um so kleiner, je näher der Punkt z dem Punkte z_0 gelegen ist.

Bisher ist der Punkt z_0 als fest angesehen worden. Indessen gilt eine ähnliche Abschätzung für $|\Delta w|$ und $\operatorname{arc}\Delta w$ auch gleichmäßig für eine bestimmte Umgebung des Punktes z_0. Die Größe ζ hängt aber jetzt sowohl von Δz als auch von z ab, und die gewünschte Relation: $|\zeta| < \varepsilon$ für jedes Punktepaar z, $z + \Delta z$ einer bestimmten Umgebung von z_0, erfolgt erst unter Heranziehung der Mittelwertsätze, ähnlich wie in § 6. An Stelle von $|f'(z_0)|$ wird endlich die untere Grenze von $|f'(z)|$ in der genannten Umgebung treten.

Hiermit ist die Grundlage geschaffen sowohl für den Schluß, daß die durch (3) definierte Abbildung *konform* ist:

$$dS = M\,ds,$$

wo

$$dS = |dw|, \qquad ds = |\Delta z|, \qquad M = |f'(z)|$$

ist, als auch dafür, daß diese Abbildung *winkeltreu* ist:

$$\Theta = \theta + \alpha,$$

wo

$$\Theta = \operatorname{arc} dw, \qquad \theta = \operatorname{arc}\Delta z, \qquad \alpha = \operatorname{arc} f'(z).$$

Wegen des Beweises, daß eine jede dieser beiden Eigenschaften die

andere stets nach sich zieht, sowie behufs einer eingehenden Erläuterung des geometrischen Sachverhalts in Bezug auf die Abbildung kleiner Figuren, vergleiche man die bereits zitierte Stelle, Kap. 2, § 7, Ende.

Beispiel. Durch die Funktion

$$w = z^2,$$

also

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

wird der erste Quadrant der z-Ebene auf die obere Hälfte der w-Ebene konform abgebildet; vgl. Kap. 2, § 7, Fig. 23.

§ 9. **Zwei geographische Karten.**

Die Kartographie hat zur Aufgabe, die Oberfläche einer Kugel auf eine Ebene abzubilden. Da dies ohne Verzerrung nicht angeht, so verlangt man wohl entweder a) die approximative Erhaltung der Gestalt oder b) die genaue Erhaltung des Flächeninhalts der Figuren. Im Falle a) wird die Abbildung eine konforme. Es gibt zwei in der Praxis vielfach verwendete derartige Abbildungen, und zwar a) die stereographische Projektion des Ptolemäus, b) die Mercatorsche Karte.[1])

a) Die stereographische Projektion.

Im Südpol A der Erdkugel konstruiere man die Tangentialebene und durch den Nordpol O lege man einen veränderlichen Strahl, welcher die Kugel zum zweiten Mal im Punkte P und die Ebene dann im Punkte Q trifft. Damit wird die Kugeloberfläche mit Ausnahme des Nordpols ein-eindeutig und stetig auf die Ebene bezogen.

Die Verwandtschaft ist eine isogonale. Zunächst sieht man nämlich, daß die Breitenkreise in eine Schar konzentrischer Kreise, die Längenkreise in den senkrecht darauf stehenden Strahlbüschel der Ebene übergehen. Durch einen beliebigen Punkt Q der Ebene, dem der Punkt P der Kugel entspreche, ziehe man nun eine Kurve C und bezeichne das Abbild derselben auf der Kugel mit Γ. Zur Begründung der isogonalen Eigenschaft muß man dann folgende Relation nachweisen:

(1) $$\sphericalangle\, \lambda P \mu = \sphericalangle\, L Q M,$$

---

1) Wegen der Literatur vergleiche man *Enzyklopädie*, III D 6 a, Voss, insbesondere Nr. 4.

wo $P\lambda$ die Tangente des Längenkreises durch P und $P\mu$, QM bzw. die Tangenten von Γ, C in P, Q bedeuten; dem Längenkreise APO entspricht ja die Gerade AQL. Durch die Geraden PQ, $P\mu$ lege man die Ebene $\mathfrak{N}$; diese Ebene schneidet die Projektionsebene in der Tangente QM der Kurve C, da sie den durch O als Spitze und Γ als Direktrix bestimmten Kegel in P berührt, während andererseits C die Durchdringungskurve dieses Kegels mit der Projektionsebene bildet. Die beiden Ebenen $\lambda P \mu$, LQM (also die Tangentialebene der Kugel in P und die Projektionsebene) stehen senkrecht auf der Längenebene $\mathfrak{M}$. Um die in Aussicht genommene Relation (1) zu erhalten, genügt es also zu zeigen, daß die Schnitte TP und TQ dieser Ebenen mit $\mathfrak{M}$ gleiche Winkel mit PQ bilden: $\alpha = \beta$, denn daraus folgt, daß die beiden in (1) auftretenden Winkel Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die durch T gelegte, die Gerade PQ rechtwinklig schneidende Ebene sind. Dies ergibt sich aber sofort aus den Sätzen der Elementargeometrie, da sowohl $\sphericalangle\, TPQ = \alpha$ als $\sphericalangle\, TQP = \beta$ die Hälfte des Kreisbogens PO zum Maße haben, womit denn der Beweis erbracht ist.

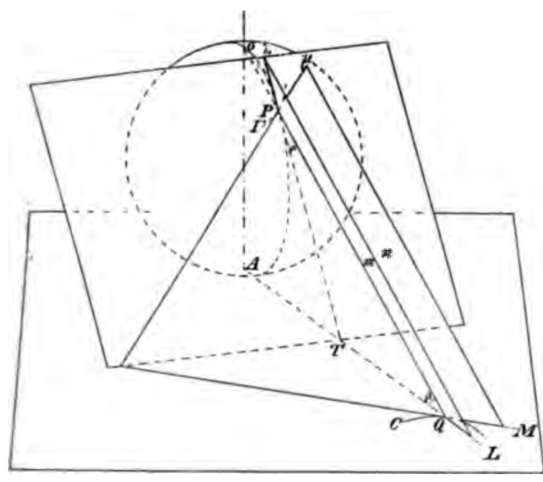


Fig. 57.

Betrachten wir die Kugel von außen, die Ebene von derjenigen Seite aus, an welcher die Kugel liegt, so haben wir es mit einer isogonalen Verwandtschaft mit Umlegung der Winkel zu tun. Betrachten wir dagegen die Kugelfläche und die Ebene von einem innerhalb der Kugel gelegenen Punkte, oder auch von derjenigen Seite der Ebene, an welcher die Kugel nicht liegt, so werden die Winkel nicht umgelegt.

Die Abbildung ist eine konforme. Es handelt sich darum zu zeigen, daß die Relation

$$d\sigma = M ds$$

erfüllt ist, wo sich $d\sigma$ auf die Kugel, ds auf die Ebene bezieht. Der

Punkt A sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems (x, y) der Ebene, sowie (ξ, η, ζ) des Raumes, wobei die ξ-, η-Achsen bzw. mit den x-, y-Achsen zusammenfallen und auch die positive ζ-Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Diese habe den Durchmesser 1; ihre Gleichung lautet dann, wie folgt:

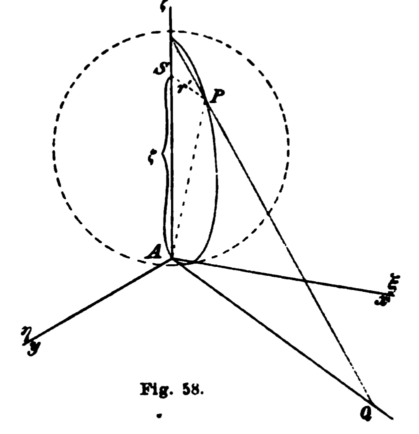


Fig. 58.

(2) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta(\zeta - 1) = 0.$$

Setzt man noch $SP = r'$, $AQ = r$, und bezeichnet man die Koordinaten von P, Q bzw. mit (ξ, η, ζ), (x, y), so kommt:

$$\frac{r}{1} = \frac{r'}{1-\zeta} = \frac{\zeta}{r'},$$

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{r}{r'},$$

woraus sich dann die analytische Darstellung der stereographischen Projektion ergibt:

(3) $$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad r^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

(4) $$\xi = \frac{x}{1+r^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+r^2}, \quad \zeta = \frac{r^2}{1+r^2}.$$

Zwischen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ und $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ besteht demnach die Relation:

(5) $$dx^2 + dy^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{(1-\zeta)^2},$$

(6) $$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1+r^2)^2}.$$

Hiermit erweist sich die stereographische Projektion als eine konforme Abbildung. Die südliche Halbkugel geht in das Innere des Einheitskreises über. Dagegen wird die Umgebung des Nordpols stark vergrößert und in entlegene Teile der Ebene geworfen. Um dem abzuhelfen, projiziert man die nördliche Halbkugel vom Südpole aus auf eine zweite die Kugel im Nordpol berührende Ebene. Die beiden Karten zusammengenommen liefern so ein vollständiges Bild der Erdoberfläche. Es ist klar, daß man bei beiden Projektionen die Äquatorebene, sowie allgemein jede andere dieser parallele, das Projektionszentrum nur nicht enthaltende Ebene als Projektionsebene verwenden kann.

b) Die Mercatorsche Karte.

Auf einen die Kugel längs des Äquators berührenden Rotationszylinder wird die Kugel, mit Ausnahme der Pole, in ein-eindeutiger Weise abgebildet, dann wird der Zylinder längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und auf eine Ebene abgewickelt. Die Tranformation auf den Zylinder geschieht, wie folgt. Einem veränderlichen Punkte P der Kugel wird ein Punkt Q des Zylinders zugeordnet, welcher dieselbe Länge hat wie P und auch auf derselben Seite des Äquators liegt, dessen Abstand u vom Äquator aber so besimmt wird, a) daß u nur von der Breite φ von P, nicht von dessen Länge θ, abhängt; b) daß der Relation

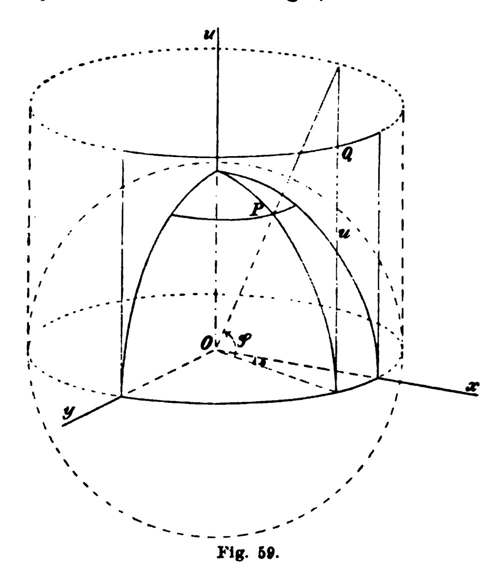


Fig. 59.

$$d\sigma = M ds$$

genügt wird. Zu dem Zwecke setze man $u = f(\varphi)$; im übrigen habe der Radius der Kugel den Wert 1. Nun ist

$$d\sigma^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\theta^2 = \cos^2\varphi (\sec^2\varphi d\varphi^2 + d\theta^2),$$
$$ds^2 = du^2 + d\theta^2,$$

wo sich $d\sigma$, ds resp. auf die Kugel und den Zylinder beziehen. Daraus erhellt, daß besagte Relation befriedigt wird, wenn man

$$du = \sec\varphi d\varphi,$$
$$u = \log\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

setzt, und das ist eben die Mercatorsche Beziehung, wodurch u und φ miteinander verknüpft werden. Dabei ist $M = \cos\varphi$.

Die Mercatorsche Karte eignet sich besonders zu Schiffahrtzwecken. Soll ein Schiff nämlich von einem Punkte A nach einem zweiten Punkte B fahren, ohne den Kurs zu ändern, so heißt das eben, daß der beschriebene Weg alle Längenkreise unter gleichem

Winkel schneiden soll. Das Abbild dieses Weges auf der Mercatorschen Karte besteht ersichtlich aus der die Punkte A und B verbindenden Geraden, wodurch denn auch umgekehrt der Kurs bestimmt wird.

§ 10. Die Transformation durch reziproke Radien.

In einer Ebene werde ein Kreis K vom Radius a mit dem Mittelpunkt O angenommen. Sei P ein beliebiger Punkt der Ebene. Man führe P in denjenigen auf dem Halbstrahl OP gelegenen Punkt Q über, wofür

$$OP \cdot OQ = a^2 \tag{1}$$

ist. Dadurch entsteht eine *Transformation durch reziproke Radien* oder eine *Spiegelung am Kreise K.* Dieselbe ist im allgemeinen eineindeutig, nur dem Mittelpunkte O des Kreises entspricht kein eigentlicher Punkt der Ebene.[1]) Dabei bleiben die Punkte des Kreises K selbst ungeändert, während das Innere und das Äußere von K miteinander vertauscht werden. Wendet man die Transformation zweimal hintereinander an, so führt sie jeden Punkt in seine ursprüngliche Lage wieder zurück, sie ist also *involutorisch.*

Geometrisch konstruiert man den Punkt Q in bekannter Weise, vgl. die Einleitung, Fig. 49.

1. Satz. *Die Transformation durch reziproke Radien ist eine konforme mit Umlegung der Winkel.*

Zum Beweise genügt es offenbar zu zeigen, daß der Winkel α, welchen die Tangente einer beliebigen durch P gehenden Kurve C mit OP bildet, gleich demjenigen Winkel β ist, welchen die Tangente der Bildkurve C' in Q mit OQ einschließt. Durch P und einen benachbarten Punkt P' von C lege man eine Sekante und ebenfalls durch Q und Q' eine zweite Sekante. Dann erweisen sich auf Grund der Beziehungen

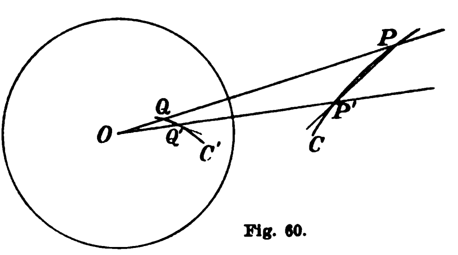


Fig. 60.

$$OP \cdot OQ = OP' \cdot OQ' = a^2$$

1) Den unendlich fernen Bereich der Ebene faßt man in der Geometrie der reziproken Radien als einen Punkt auf und ordnet denselben dem Punkte O zu; vgl. Kap. 7, § 9.

die Dreiecke OPP', $OQ'Q$ als ähnlich, und man hat also

$$\sphericalangle OPP' = \sphericalangle OQ'Q.$$

Läßt man jetzt P' an P heranrücken, so nähert sich auch Q' dem Punkte Q, und der Beweis ergibt sich ohne weiteres.

Genau genommen muß man noch nachweisen, daß der Transformation auch die Kontinuitätseigenschaften zukommen, wie sie in Kap. 2, § 7 vorausgesetzt sind. Daß dem nun wirklich so ist, erhellt sofort aus der analytischen Form der Transformation, welche wir jetzt heranziehen wollen. Führt man ein Cartesisches Koordinatensystem so ein, daß der Kreis K zum Einheitskreise

$$x^2 + y^2 = 1$$

wird, so kommt:

(2) $$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

und umgekehrt:

(3) $$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

2. Satz. *Durch die Transformation mittels reziproker Radien wird das System von Kreisen und Geraden der Ebene in sich übergeführt.*

Die Kurven dieses Systems werden durch die Gleichung dargestellt:

(4) $$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0,$$

wobei die Koeffizienten, damit sich nur reelle Kreise einstellen, an die Bedingung geknüpft sind:

(5) $$b^2 + c^2 - 4ad > 0.$$

Durch die Transformation (3) geht (4) in

$$a + bx' + cy' + d(x'^2 + y'^2) = 0$$

über, wofür nun die Beziehung (5) auch gilt, w. z. b. w. — Eine Transformation der Ebene, welcher diese Eigenschaft zukommt, heißt eine *Kreisverwandtschaft.*[1])

Insbesondere werden die durch den Mittelpunkt O des Kreises K gehenden Geraden einzeln in sich transformiert, während jeder anderen Geraden ein durch O gehender Kreis entspricht, dessen Tangente

1) Diese Transformationen sind zuerst von Möbius (1853) eingehend untersucht worden; *Werke*, Bd. 2, S. 205 u. 243.

in O mit der betreffenden Geraden parallel verläuft. Umgekehrt wird ein durch den Punkt O gehender Kreis stets in eine Gerade verwandelt. Da die Punkte vom Kreise K je in sich selbst übergehen, so wird ein Kreis, welcher K unter einem Winkel α schneidet, in einen zweiten Kreis transformiert, welcher K in denselben beiden Punkten, aber unter dem Winkel $-\alpha$ schneidet. Schneidet ein Kreis den Kreis K insbesondere unter einem rechten Winkel, so geht derselbe in sich über. Eine Gerade, welche K trifft, wird in einen Kreis mit denselben Schnittpunkten verwandelt, der außerdem durch O geht, und umgekehrt.

Definition. Zwei Punkte, die bei der Spiegelung an einem gegebenen Kreise einander entsprechen, heißen *konjugiert.* Man sagt wohl auch, der eine ist der *Spiegelpunkt* des anderen in Bezug auf den Kreis. Diese Definition läßt sich als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Definition der (optischen) Spiegelung in einer Geraden ansehen und deckt sich mit dieser, wenn der Radius des Kreises unendlich wird.

3. Satz. *Das System von einem Kreise (bzw. von einer Geraden) und zwei in Bezug darauf konjugierten Punkten bleibt invariant bei einer beliebigen Transformation durch reziproke Radien.*

Zum Beweise zeigen wir, daß alle durch einen der beiden Punkte gehenden, den gegebenen Kreis senkrecht schneidenden Kreise auch durch den zweiten Punkt gehen. Man fasse irgend zwei dieser Kreise ins Auge und spiegele die Ebene am gegebenen Kreise. Dann gehen die beiden Kreise in sich über, während ihre beiden Schnittpunkte miteinander vertauscht werden. Daher fällt der zweite Schnittpunkt mit dem zweiten der beiden gegebenen Punkte zusammen. Umgekehrt sind zwei Punkte in Bezug auf einen Kreis konjugiert, wenn sie die gemeinsamen Schnittpunkte einer Schar auf dem Kreise senkrecht stehender Kreise sind.

Führt man jetzt eine beliebige Transformation durch reziproke Radien aus, so geht der gegebene Kreis, nebst der Schar durch die beiden gegebenen Punkte gehender Kreise, in ein gleiches System über, und da bei der Transformation die Winkel erhalten bleiben, so steht die neue Schar wieder senkrecht auf dem neuen Kreise.

Die entsprechende Transformation der Kugel. Projiziert man die Ebene stereographisch auf die Kugel, derart daß der Kreis K in den Äquator übergeht (vgl. § 9), so definiert die Transformation (1) eine

Transformation der Kugel in sich, bezüglich deren der folgende einfache Satz besteht.

4. Satz. *Der Transformation durch reziproke Radien entspricht eine Spiegelung der Kugel in der Ebene des Äquators.*

Die Koordinaten der den Punkten P: (x, y) und Q: (x', y') entsprechenden Punkte der Kugel bezeichne man mit (ξ, η, ζ) bzw. (ξ', η', ζ'). Dann wird nach § 9, (3),

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad r^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}$$

sein, woran sich noch drei ähnliche Gleichungen für die gestrichenen Buchstaben reihen. Durch Kombination dieser mit den vorstehenden Gleichungen (2) kommt:

$$\frac{\xi'}{1-\zeta'} = \frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{\eta'}{1-\zeta'} = \frac{\eta}{\zeta}, \quad \frac{\zeta'}{1-\zeta'} = \frac{1-\zeta}{\zeta}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt dann:

$$\zeta = 1 - \zeta'.$$

Demnach ist

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = \eta, \quad \tfrac{1}{2} - \zeta' = -(\tfrac{1}{2} - \zeta),$$

was eben zu beweisen war.

§ 11. Die allgemeine lineare Transformation.

In § 8 ist die geometrische Beschaffenheit der ganzen linearen Transformation:

$$w = az + b, \qquad a \neq 0,$$

bereits eingehend besprochen worden, und es ist insbesondere gezeigt, wie sich diese aus bestimmten *erzeugenden Transformationen* zusammensetzen läßt. Um die allgemeine lineare Transformation[1])

$$(1) \qquad w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

in ähnlicher Weise zu behandeln, brauchen wir nur noch die eine

1) Der Ausdruck $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ heißt die *Determinante* der linearen Transformation. Verschwindet sie, so läßt sich der Zähler durch den Nenner teilen, so daß also alle Punkte der Ebene (mit Ausnahme eines einzigen) in ein und denselben Punkt übergeführt werden. Diesen Fall lassen wir hinfort bei Seite.

Transformation

(2) $$w = \frac{1}{z}$$

heranzuziehen. Diese erhält man nach Formel (2) der Einleitung, indem man die z-Ebene zuerst im Einheitskreise spiegelt (vgl. § 10), um sie darauf einer zweiten Spiegelung in der reellen Achse zu unterwerfen.

Erforschen wir jetzt die entsprechende Transformation der Kugel. Wenn wir die Ebene so stereographisch projizieren, daß der Einheitskreis in den Äquator übergeht, so entspricht der ersten jener beiden Spiegelungen nach § 10 eine Spiegelung der Kugel in der Äquatorebene. Die zweite Spiegelung führt aber offenbar auf eine Spiegelung der Kugel in der Ebene $\eta = 0$. Daraus leitet man sofort das folgende Resultat ab.

1. Satz. *Der Transformation* (2) *entspricht eine Drehung der Kugel um den Durchmesser* $\eta = 0$, $\zeta = \frac{1}{2}$ *durch den Winkel* π.

Wir heben noch besonders hervor, daß hierbei die Umgebung des Nordpols auf diejenige vom Südpole konform bezogen wird.

Wenden wir uns nunmehr zur allgemeinen linearen Transformation (1), wobei wir jetzt $c \neq 0$ voraussetzen dürfen, so erkennen wir leicht, daß sich dieselbe auf folgende Reihe von Hilfs- oder erzeugenden Transformationen zurückführen läßt:

1) $z = z' + \alpha$, wo $c\alpha + d = 0$;

2) $z' = 1/z''$;

3) $w = \frac{a}{c} + \frac{a\alpha + b}{c} z''$, wo $a\alpha + b \neq 0$.

Hiermit haben wir Anschluß an den bereits erledigten Fall einer ganzen linearen Transformation (§ 8) erreicht. Das Ergebnis sprechen wir, wie folgt, aus.

2. Satz. *Die allgemeine lineare Transformation*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

setzt sich aus einer Parallelverschiebung, einer Transformation durch reziproke Radien, einer Spiegelung in einer Geraden, einer Drehung, einer Ähnlichkeitstransformation und einer zweiten Parallelverschiebung der z*-Ebene zusammen. Im besonderen können einige dieser erzeugenden Transformationen fehlen.*

Da eine jede dieser Transformationen entweder selbst eine Spiegelung im Sinne des vorhergehenden Paragraphen ist oder sich doch aus zwei Spiegelungen zusammensetzen läßt[1]), so haben wir ferner den

3. Satz. *Die allgemeine lineare Transformation läßt sich stets aus einer geraden Anzahl von Spiegelungen zusammensetzen. Sie ist deshalb eine Kreisverwandtschaft ohne Umlegung der Winkel.*

Dieser Satz läßt eine Umkehrung zu. Sind nämlich allgemein zwei Kugeln ausnahmslos ein-eindeutig und konform aufeinander bezogen, so sind die entsprechenden Ebenen linear miteinander verwandt; vgl. Kap. 7, § 10, Ende.

Wir fügen noch einen Satz hinzu, dessen Beweis sich aus den Entwicklungen von § 10 sofort ergibt.

4. Satz. *Durch die allgemeine lineare Transformation werden zwei in Bezug auf einen Kreis (bzw. eine Gerade) konjugierte Punkte in zwei Punkte übergeführt, welche in Bezug auf den transformierten Kreis (bzw. die transformierte Gerade) ebenfalls konjugiert sind.*

Die zu (1) inverse Transformation ist folgende:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Aufgabe. Sind zwei lineare Transformationen je mit nicht verschwindender Determinante gegeben und führt man die beiden hintereinander aus, so entsteht eine Transformation der Ebene, die ebenfalls eine lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante ist.

1) Eine Verdrehung der Ebene um den Punkt O durch einen Winkel φ kann man bekanntlich aus Spiegelungen erzeugen. Seien nämlich OA und OB zwei von O ausgehende Halbstrahlen, wofür $\sphericalangle AOB = \varphi$ ist. Man halbiere diesen Winkel mittels des Halbstrahls OC. Spiegelt man jetzt die Ebene einmal am Vollstrahle OC, sodann noch am Vollstrahle OB, so kommt besagte Rotation gerade zustande.

Die Parallelverschiebungen subsumieren sich unter die Rotationen als Grenzfälle dieser, wobei der Punkt O ins Unendliche rückt. Soll also eine derartige Transformation $w = z + \alpha$ vorgenommen werden, so konstruiere man vor allem den Vektor α und errichte dann im Anfange A, im Endpunkt B und im Mittelpunkt C desselben drei Lote, womit die Vollstrahlen (A), (B), (C) zusammenfallen mögen. Durch eine Spiegelung an (C), worauf dann eine Spiegelung an (B) folgen soll, entsteht nun die in Aussicht genommene Parallelverschiebung. Endlich erhält man eine Ähnlichkeitstransformation durch sukzessive Spiegelungen an zwei geeigneten konzentrischen Kreisen.

Den Satz kann man kurz, wenn auch weniger vollständig, in der Form aussprechen: *Das Produkt zweier linearen Transformationen ist wieder eine lineare Transformation.* Hiernach bilden die linearen Transformationen mit nicht verschwindender Determinante eine *Gruppe.*

§ 12. Die Funktion $w = z^m$.

Ist m eine positive ganze Zahl, so ist die Funktion $f(z) = z^m$ in der ganzen z-Ebene eindeutig und analytisch. Da die Ableitung $f'(z) = mz^{m-1}$ im Punkte $z = 0$, sonst aber nirgends, verschwindet, sofern $m > 1$ ist, so erweist sich damit die Abbildung der Umgebung eines beliebigen Punktes $z_0 \neq 0$ auf die w-Ebene als ein-eindeutig und konform.

Setzt man

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$w = R(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$

so führt die Gleichung

$$w = z^m$$

zu den Relationen

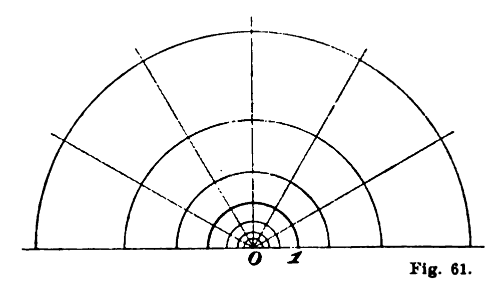
$$(1) \qquad \begin{cases} R = r^m, \\ \Phi = m\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = R^{\frac{1}{m}}, \\ \varphi = \dfrac{\Phi + 2k\pi}{m}, \end{cases}$$

wo $k = 0, 1, \cdots m - 1$ ist.

Wir wollen hier Φ zunächst auf das Intervall

$$0 \leq \Phi \leq \pi$$

beschränken und zugleich $k = 0$ nehmen. Dadurch wird φ zu einer eindeutigen Funktion von Φ in diesem Intervall. Bei dieser Fest-



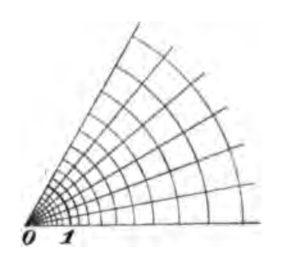


Fig. 61.

setzung wird eine beliebige innerhalb des Winkels $0 \leq \varphi \leq \pi/m$ gelegene Figur der z-Ebene ein-eindeutig und konform auf eine Figur der oberen Hälfte der w-Ebene abgebildet. Insbesondere heben wir

zwei Bereiche hervor: a) der Sektor des Einheitskreises $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/m$ wird auf den Halbkreis $0 \leqq R \leqq 1$, $0 \leqq \Phi \leqq \pi$ bezogen; b) dem Winkel $0 \leqq \varphi \leqq \pi/m$ entspricht die ganze Halbebene $0 \leqq \Phi \leqq \pi$. (Wegen des Falles $m = 2$ vgl. man § 8, Ende, sowie Kap. 2, § 7, Fig. 23.)

In der Spitze des Winkels ($z = 0$) hört die Abbildung auf, konform zu sein. Schneiden sich nämlich zwei Kurven dort unter einem Winkel β, so schneiden sich die Bildkurven im Punkte $w = 0$ unter einem Winkel $m\beta$.

An Stelle des Intervalls $0 \leqq \Phi \leqq \pi$ kann man auch jedes andere Intervall

$$0 \leqq \Phi \leqq \Phi_1 < 2\pi$$

setzen. Das entsprechende Intervall für φ wird stets ein m-tel so groß sein: $0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1 = \Phi_1/m$. Ein Sektor des Einheitskreises der z-Ebene mit der Winkelöffnung φ_1 wird somit auf einen Sektor des Einheitskreises der w-Ebene mit der Winkelöffnung $\Phi_1 = m\varphi_1$ abgebildet. Diese Abbildung kann man sich etwa so erzeugt denken, daß man zunächst den ersten Sektor wie einen anfangs nur zum Teil geöffneten Fächer weiter aufschlägt. Dem entspricht die Transformation

$$\bar{r} = r, \qquad \bar{\varphi} = m\varphi.$$

Die solchergestalt erhaltene Abbildung ist indessen noch keine konforme; sie wird erst zu einer solchen, wenn man die Punkte des so transformierten Sektors längs der Radien der Spitze zurücken läßt und zwar so, daß

$$R = \bar{r}^m, \qquad \Phi = \bar{\varphi}.$$

Ähnliches gilt auch für den außerhalb des Einheitskreises gelegenen Teil des Winkels: $1 \leqq r$, $0 < \varphi < \varphi_1$, nur rücken die Punkte jetzt bei der zweiten Transformation vom Einheitskreise weiter fort. Besonders einfach läßt sich diese Transformation auf der Kugel verfolgen. Projiziert man stereographisch so, daß der Einheitskreis in den Äquator übergeht, so wird, der ersten Transformation gemäß, ein Kugelzweieck, dessen Ecken in den beiden Polen liegen, nach der Art eines Lampions aufgemacht, während die Punkte der Kugeloberfläche, der zweiten Transformation zufolge, längs der Längenkreise vom Äquator fortrücken, und zwar so, daß zwei Punkte, welche ursprünglich Spiegelbilder voneinander in der Äquatorebene waren, es auch fortwährend bleiben.

Ist m keine ganze, sondern eine beliebige reelle gebrochene oder irrationale Zahl, so wird die Funktion $f(z) = z^m$ durch die vier Spezies nicht mehr definiert. Man kann z^m dann immerhin noch mittels der Gleichungen (1) erklären. Die Funktion wird zwar nicht mehr eindeutig sein, doch sieht man, daß sich in der Umgebung eines beliebigen Punktes $z \neq 0$ solche Werte der Funktion zusammenfassen lassen, daß eine eindeutige und stetige Funktion zustande kommt. Sei $m > 1$:

$$m = \frac{\pi}{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < \pi.$$

Fügt man dann zu (1) noch die Bedingung hinzu, daß

$$0 \leqq \varphi \leqq \alpha, \qquad 0 \leqq \Phi < \pi$$

sein soll, so wird im Bereiche $0 \leqq r$, $0 \leqq \varphi \leqq \alpha$ der z-Ebene eine Funktion

$$w = z^m = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

eindeutig definiert:

$$R = r^m, \qquad \Phi = m\varphi,$$

welche sich in jedem innern Punkte des Bereiches analytisch verhält, denn die Funktionen

$$u = r^m \cos m\varphi, \qquad v = r^m \sin m\varphi$$

genügen ja den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, vgl. § 6, 3. Aufgabe. Diese Funktion bewerkstelligt eine ähnliche Abbildung wie die vorhin besprochene Funktion z^m, wo m eine ganze Zahl ist. Insbesondere wird ein in der z-Ebene befindlicher Kreissektor mit der Winkelöffnung α auf einen Halbkreis der w-Ebene konform abgebildet.

Schließlich sei noch auf die Abbildung verwiesen, die entsteht, wenn man Φ_1 gleich 2π annimmt:

$$0 \leqq \varphi < 2\alpha, \qquad 0 < \Phi \leqq 2\pi.$$

Dadurch wird das Innere des Winkels $0 \leqq \varphi < 2\alpha$ der z-Ebene auf die längs der positiven reellen Achse aufgeschnittene w-Ebene eineindeutig und konform abgebildet. Den beiden Schenkeln des Winkels entspricht dagegen in der w-Ebene die doppelt zu zählende positive reelle Achse.

Der Fall, wo $0 < m < 1$ ist, läßt sich in ähnlicher Weise behandeln. Bei geeigneter Bestimmung des Funktionswertes bestehen

dann gleichzeitig die Gleichungen

$$w = z^m, \qquad z = w^{\frac{1}{m}}.$$

Auch der Fall $m < 0$ kann auf Grund der Gleichungen (1) direkt erledigt werden; oder man kann vom Falle $m > 0$ aus durch die Transformation $w = z^{-1}$ dazu gelangen.

Zur Veranschaulichung des Gesamtverlaufs der Funktion bedient man sich einer Riemannschen Fläche, vgl. Kap. 8.

Der Fall, daß m eine komplexe Zahl ist, läßt sich auf Grund der Entwicklungen von § 15 behandeln.

Aufgabe. Man zeige, daß

$$\frac{dz^m}{dz} = m z^{m-1}$$

ist. Welchen Wert muß man hier der Funktion z^{m-1}, dem einmal gewählten Wert der Funktion z^m entsprechend, beilegen?

§ 13. Die Exponentialfunktion.

Die reelle Funktion a^x, wo a eine reelle positive Zahl ist und x alle reellen Werte durchläuft, genügt der Funktionalgleichung

$$(1) \qquad f(x)f(y) = f(x+y),$$

wodurch denn auch die Haupteigenschaft dieser Funktion zum Ausdruck kommt.[1]) Mittels der Beziehung

$$(2) \qquad a^x = b^{x \log_b a}$$

führt man die allgemeine Funktion a^x auf eine spezielle Funktion b^x zurück. Der für die Zwecke der Analysis geeignetste Wert von b ist die Zahl

$$e = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 2{,}71828\cdots,$$

denn die Ableitung und die Taylorsche Reihenentwicklung nehmen dann eine vereinfachte Form an:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

1) Wegen einer elementaren Behandlung der reellen Exponentialfunktion, sowie der Potenzen, sei auf Kapitel 12 verwiesen. Vor der Hand stellen wir uns auf den Standpunkt der niederen Analysis und setzen die nötigen Existenztheoreme und Stetigkeitsbeweise voraus.

Wir suchen jetzt eine Funktion $f(z)$ des komplexen Arguments $z = x + yi$ so zu definieren, daß dieselbe

a) für reelle Werte von z mit e^x zusammenfällt;

b) der Funktionalgleichung (1):

$$f(z_1)f(z_2) = f(z_1 + z_2), \tag{3}$$

wo z_1, z_2 beliebige komplexe Zahlen sind, Genüge leistet;

c) für alle Werte des Arguments eindeutig und analytisch ist, während endlich

d) $$\lim_{z=0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 1$$

ist.

Sollte es uns gelingen, eine solche Funktion zu finden, so müßte insbesondere:

$$f(x + yi) = f(x)f(yi) = e^x f(yi)$$

sein. Es handelt sich also nur um eine geeignete Erklärung der Funktion für rein imaginäre Werte des Arguments. Nun war man schon früh auf formalem Wege zur Relation

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{4}$$

gelangt, indem man in der Taylorschen Reihe für e^x das Argument einfach gleich φi setzte und darauf im Anschluß an die Taylorschen Reihen für Sinus und Kosinus:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots,$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots,$$

reelles und rein imaginäres formal trennte. Dieser Formel (4) wollen wir uns nun geradezu zur *Erklärung* der Funktion bedienen, indem wir sagen: *Für rein imaginäre Werte des Arguments soll die Funktion $f(z)$ durch die Gleichung definiert werden:*

$$f(yi) = \cos y + i\sin y.$$

Man wird also dazu geführt, *die Funktion $f(z)$ durch die Gleichung*

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

zu definieren.

Damit ist $f(z)$ wenigstens für alle Werte von z eindeutig erklärt und stetig. Sehen wir jetzt zu, ob die Funktion auch den weiteren

Forderungen gerecht wird. Daß sie a) genügt, ist sofort klar. b) genügt sie ebenfalls:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Denn es ist

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$$
$$= e^{x_1 + x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)].$$

Was nun c) anbetrifft, so ist

$$f(z) = u + vi = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Hier genügen die Funktionen u, v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, und zwar ist

$$\frac{d e^z}{dz} = \frac{\partial e^z}{\partial x} = e^z.$$

Daraus erkennt man ferner, daß

$$\lim_{z=0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0) = e^0 = 1$$

ist, und mithin ist auch die letzte der vier Bedingungen erfüllt.

Die hiermit erweiterte Funktion e^z hat die Periode $2\pi i$:

$$e^{z + 2\pi i} = e^z.$$

Man zeigt leicht, daß sie aber keine andere Periode als nur ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ hat. Sie verschwindet für keinen Wert des Arguments.

§ 14. Die trigonometrischen Funktionen.

Aus der Definitionsformel (4), § 13:

$$e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

wo φ eine reelle Zahl bedeutet, ergibt sich eine Darstellung der Funktionen $\sin x$, $\cos x$ für reelle Werte des Arguments mittels der Exponentialfunktion:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i},$$

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

Die rechter Hand stehenden Funktionen sind aber nach § 13 für alle Werte des Arguments eindeutig definiert und verhalten sich außer-

dem nach den Sätzen von §§ 4, 5 in jedem Punkte der z-Ebene analytisch. Durch dieselben kann man also $\sin z$, $\cos z$ für komplexe Werte des Arguments erklären:

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2},$$

und zwar verhalten sich diese Funktionen in der ganzen Ebene analytisch. Sollen sie sich nun in der Tat als echte Verallgemeinerungen der reellen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ erweisen, so müssen sie vor allem der Funktionaleigenschaften dieser Funktionen teilhaftig werden, d. h. sie müssen den Funktionalgleichungen

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

Genüge leisten. Daß dies auch wirklich der Fall ist, rechnet man leicht nach.

Aufgabe 1. Man beweise die Formeln:

$$\frac{d\sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{d\cos z}{dz} = -\sin z,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z,$$

$$\sin(z + \pi) = -\sin z,$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

Aufgabe 2. Man zeige, daß die Funktionen $\sin z$, $\cos z$ keine anderen Nullstellen und auch keine anderen Perioden als nur diejenigen der reellen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ haben.

Aufgabe 3. Man bestimme alle Wurzeln der Gleichungen

$$\text{a)}\ \sin z = 2, \qquad \text{b)}\ \cos z = -5i.$$

Die Funktionen $\tan z$, $\cot z$, *usw.* Die übrigen trigonometrischen Funktionen werden durch den Sinus und Kosinus erklärt:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \text{usw.}$$

Sie verhalten sich in jedem Punkte der Ebene analytisch, in dem sie

definiert sind, also überall mit Ausnahme der Punkte $z = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ bzw. $z = \pm k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ usw., und genügen im übrigen denselben Funktionalgleichungen wie die entsprechenden reellen Funktionen; insbesondere lassen sie dieselben Perioden wie diese zu.

§ 15. Der Logarithmus und die inversen trigonometrischen Funktionen; die allgemeine Potenz.

Die der Exponentialfunktion entsprechende Umkehrfunktion wird durch die Gleichung

(1) $$e^w = z$$

bestimmt, wobei $z = x + yi$ eine vor der Hand beliebig gegebene Zahl und $w = u + vi$ aus (1) zu berechnen ist. Mit der Gleichung (1) sind die beiden anderen äquivalent:

$$e^u \cos v = r \cos \varphi, \qquad e^u \sin v = r \sin \varphi,$$

wo $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ gesetzt ist. Durch Auflösung letzterer Gleichungen nach (u, v) erhält man:

(2) $$\begin{cases} u = \log r = \log |z|, \\ v = \quad \varphi \quad = \operatorname{arc} z. \end{cases}$$

Ist $z = 0$, so läßt (1) keine Lösung zu. Für jeden anderen Wert von z liefern aber die Gleichungen (2) unendlich viele Wertepaare (u, v). Die entsprechenden Werte von w werden als $\log z$ bezeichnet:

(3) $$\begin{aligned} w &= \log z \\ &= \log r + \varphi i = \log |z| + i \operatorname{arc} z. \end{aligned}$$

Die Werte von $\log z$ unterscheiden sich um Vielfache von $2\pi i$ voneinander. In der Umgebung eines beliebigen Punktes $z_0 \neq 0$ lassen sie sich so zusammenfassen, daß die ein und demselben Systeme zugehörigen Werte eine eindeutige Funktion bilden, welche sich in jedem Punkte der betreffenden Umgebung analytisch verhält; denn sie fällt ja mit der zur Funktion $f(w) = e^w$ gehörigen Umkehrfunktion zusammen, vgl. § 7. Man kann aber auch direkt zeigen, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt werden, vgl. § 6, 3. Aufgabe. — Der positiven reellen Zahl x kommen hiernach außer dem reellen $\log x$ noch die komplexen Werte $\log x + 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, zu, während der Logarithmus der negativen Zahl $-x$ die Werte $\log x + (2k + 1)\pi i$ erhält.

Die Funktion $\log z$ genügt bei geeigneter Bestimmung der darin auftretenden Logarithmen der Funktionalgleichung

$$(4) \qquad \log z_1 + \log z_2 = \log (z_1 z_2),$$

wobei z_1, z_2 zwei beliebige von 0 verschiedene Zahlen sind. Hier darf man irgend zwei Termen je eine beliebige Bestimmung beilegen, alsdann gibt es stets eine Bestimmung des dritten Terms, welche die Gleichung befriedigt. Es besteht außerdem die Formel (vgl. § 6, Aufgabe 3)

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

Unter dem *Hauptwert* von $\log z$ versteht man gewöhnlich diejenige Bestimmung, wofür $-\pi < \operatorname{arc} z \leq \pi$ genommen ist. Dabei kann jedoch das Gleichheitszeichen gerade so gut links statt rechts stehen. Auch ist es zuweilen bequem, den Hauptwert so festzulegen, daß $0 \leq \operatorname{arc} z < 2\pi$ ist. Wir werden indessen an der ersten Definition festhalten, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich erwähnt wird.

Konforme Abbildung. Untersuchen wir jetzt die durch die Funktion $w = \log z$ definierte konforme Abbildung. Man nehme als Bereich T die ganze Zahlenebene mit Ausnahme der positiven reellen Achse inklusive des Punktes $z = 0$ und ordne einem veränderlichen Punkte z von T diejenige Bestimmung von φ zu, welche zwischen 0 und 2π liegt. Durch die Gleichungen (2) wird dann eine in T analytische Funktion

$$w = \log r + \varphi i$$

definiert. Die Schar von Kreisen

$$r = \varrho, \qquad 0 < \varphi < 2\pi,$$

wo ϱ einen Parameter bedeutet, geht dabei in die Strecken

$$u = \log \varrho, \qquad v = \varphi$$

über, während der orthogonalen Schar von Geraden

$$0 < r < \infty, \qquad \varphi = \theta,$$

wo θ jetzt der Parameter ist, die der u-Achse parallelen Geraden

$$u = \log r, \qquad v = \theta$$

entsprechen. Dadurch wird der Bereich T ein-eindeutig und konform auf einen Streifen der (u, v)-Ebene abgebildet, während der doppelt

zu zählende Rand von T in die beiden Begrenzungsgeraden dieses Streifens, $v = 0$, $v = 2\pi$ übergeführt wird.

Hätte man dem veränderlichen Punkt z diejenige Bestimmung von φ zugeordnet, welche zwischen $2k\pi$ und $(2k+2)\pi$ liegt, wo k eine beliebige, aber feste ganze Zahl ist, so wäre man zu einem kongruenten von den Geraden $v = 2k\pi$, $v = (2k+2)\pi$ begrenzten Streifen der w-Ebene als Abbildung geführt worden.

Auf diese Weise wird der ganze Vorrat von Werten, welche die auf Grund der Gleichungen (2) definierte Funktion w in T annimmt,

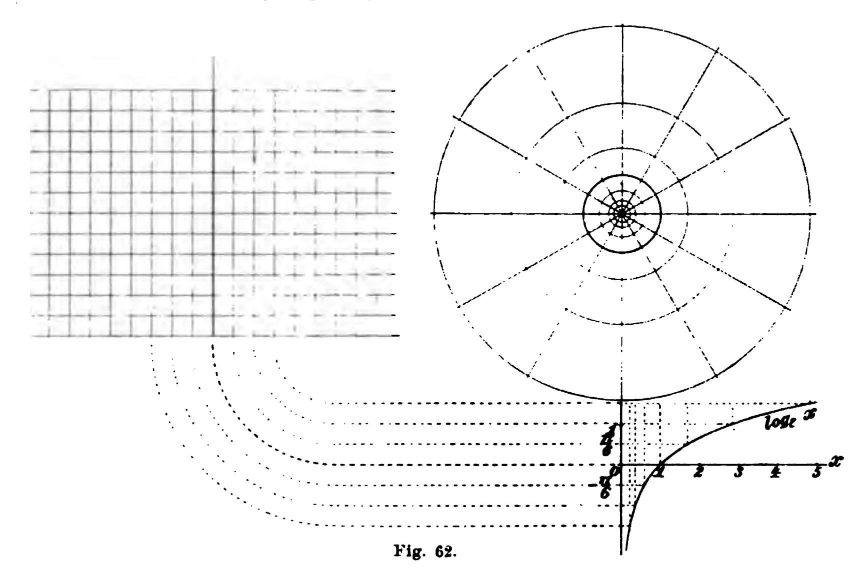


Fig. 62.

gerade erschöpft, indem dieselben zu in T eindeutigen Funktionen zusammengefaßt werden, wovon eine jede sich in jedem Punkte von T analytisch verhält. Dabei hat die positive reelle Achse der z-Ebene bisher eine Sonderrolle gespielt. Man überzeugt sich aber leicht, daß auch für diese Punkte und deren Umgebungen dasselbe Resultat erreicht werden kann, indem man als Begrenzung von T statt der positiven reellen Achse eine beliebige andere diese und sich selbst nicht überschneidende von $z = 0$ ausgehende und ins Unendliche laufende Kurve, etwa die negative reelle Achse, nimmt. Durch die Riemannsche Fläche erhält man aber erst eine einheitliche Darstellung für den Gesamtverlauf der Funktion.[1]

1) Man vergleiche Kap. 8, § 1. Der Leser wird gut tun, diesen Paragraphen jetzt schon zu lesen. — Im übrigen stellt Fig. 62 die dem Hauptwert des Logarithmus entsprechende konforme Abbildung vor.

Die beiden geographischen Karten von § 9. Durch die Funktion $w = \log z$ wird man nach dem Vorhergehenden zu einer konformen Abbildung der längs eines Halbstrahls aufgeschnittenen Ebene auf einen Streifen geführt. Implizite ist uns eine solche Abbildung schon einmal begegnet, denn durch die stereographische Projektion der Ebene auf die Kugel, wobei der Südpol dem Anfang jenes Halbstrahls entsprechen soll, wird der Bereich T auf die längs eines Längenhalbkreises aufgeschnittene Kugelfläche K konform bezogen, während K andererseits mittels der Mercatorschen Projektion wieder auf einen Streifen Σ abgebildet wurde. Da nun T und Σ beide auf K konform bezogen sind, so kommt dadurch eben eine konforme Abbildung von T und Σ aufeinander zu Stande. Diese Abbildung stimmt in der Tat mit der durch den Logarithmus definierten überein, wie der Leser leicht nachrechnen kann.[1])

Aufgabe 1. Man zeige, daß die der Sinusfunktion entsprechende Umkehrfunktion durch die Formel gegeben wird:

$$\text{arc}\sin z = i \log\left(\sqrt{1 - z^2} - iz\right),$$

wobei die Quadratwurzel beide Bestimmungen zuläßt; ferner, daß sich die verschiedenen Bestimmungen dieser Funktion in der Umgebung eines beliebigen Punktes $z_0 \neq \pm 1$ zu solchen eindeutigen Funktionen zusammenfassen lassen, welche sich in jedem Punkte der betr. Umgebung analytisch verhalten.

Aufgabe 2. Man bestätige durch direktes Ausrechnen, daß die vorstehende Formel für reelle zwischen -1 und $+1$ gelegene Werte von z bei geeigneter Wahl der Funktionswerte zur reellen Funktion $\text{arc}\sin x$ führt.

Aufgabe 3. Man leite die Formel ab:

$$\frac{d \,\text{arc}\sin z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Aufgabe 4. Man führe dasselbe für die der Tangensfunktion entsprechende Umkehrfunktion durch. Die Formeln lauten hier:

---

1) Da bei der stereographischen Projektion der *Durchmesser*, bei der Mercatorschen der *Radius* der Kugel als geometrische Einheit genommen wurde, so darf man bei den analytischen Ausführungen auch nicht unterlassen, diesem Umstande Rechnung zu tragen.

$$\operatorname{arc\,tan} z = \frac{i}{2}\log\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z},$$

$$\frac{d\operatorname{arc\,tan} z}{dz} = \frac{1}{1+z^2},$$

und die Ausnahmewerte von z sind die Werte $z = \pm i$.

Daß die so erhaltenen Funktionen denselben Funktionalgleichungen genügen, wie die entsprechenden reellen Funktionen, könnte man auf rechnerischem Wege direkt bestätigen. Wir werden aber später (Kap. 9) ein allgemeines Verfahren — das sogenannte Prinzip der analytischen Fortsetzung — kennen lernen, welches uns dieser Mühe überhebt. Auf Grund jenes Prinzips lassen sich auch die übrigen inversen trigonometrischen Funktionen mittels der bekannten Formeln für die entsprechenden reellen Funktionen[1]) sofort hinschreiben. So ist z. B.

$$\operatorname{arc\,cos} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} z = \operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-z^2} = \operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} = \text{usw.},$$

woraus sich insbesondere ergibt, daß

$$\operatorname{arc\,cos} z = i\log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right).$$

Aufgabe 5. Liegt z im Kreise $|z-1| < \varepsilon < 1$, und versteht man unter $\log z$ den Hauptwert der Funktion, so findet folgende Abschätzung statt:

$$|\log z| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \operatorname{arc\,sin}\varepsilon.$$

Die allgemeine Potenz.

Zur Definition der allgemeinen Potenz,

$$A^B,$$

wo $A \neq 0$ und B zwei beliebige reelle oder komplexe Zahlen sind, knüpft man an die für reelle Zahlen a, b geltende Beziehung:

$$a^b = e^{b\log a}$$

an und setzt sonach fest:

$$A^B = e^{B\log A}, \qquad A \neq 0,$$

1) Eine große Anzahl dieser Formeln findet sich in der Peirceschen Formelsammlung: B. O. Peirce, *A Short Table of Integrals*, umgearbeitete und vermehrte Auflage, Ginn & Co., Boston, U. S. A., 1899, p. 79.

wobei e^z die in § 13 erklärte Bedeutung hat. Da $\log A$ vieldeutig ist, so ist A^B im allgemeinen unendlich vielwertig.[1])

Die solchergestalt definierte Verknüpfung genügt denselben Gesetzen wie die reelle Potenz, nämlich:

$$A^B A^C = A^{B+C},$$
$$(A^B)^C = A^{BC},$$
$$A^C B^C = (AB)^C,$$
$$\log A^B = B \log A,$$

sofern man nur passende Bestimmungen der hierbei auftretenden Zahlen zusammenfügt. So sind z. B. in der dritten Relation irgend zwei der Zahlen A^C, B^C, $(AB)^C$ jeder beliebigen Bestimmung fähig, dann bleibt aber nur eine zulässige Bestimmung für die dritte Zahl übrig. Dagegen gestattet in der ersten Relation im allgemeinen nur eine Zahl eine beliebige Bestimmung.

Sehen wir jetzt A als fest, $B = z$ als veränderlich an, so werden den Punkten der z-Ebene durch die Funktion

$$A^z$$

im allgemeinen unendlich viele Werte zugeordnet. Indem wir mit c einen besonderen Wert von $\log A$ bezeichnen, lassen sich diese Werte zu einer Reihe eindeutiger Funktionen:

$$e^{cz}, \quad e^{(c+2\pi i)z}, \quad e^{(c-2\pi i)z}, \quad e^{(c+4\pi i)z}, \ldots$$

zusammenfassen, wobei allerdings die den reellen rationalen Werten von z zugehörigen Werte mehrfach auftreten. Dementsprechend faßt man A^z nicht als eine mehrdeutige Funktion, sondern vielmehr als einen Komplex eindeutiger Funktionen auf, was im Kapitel über analytische Fortsetzung noch des näheren begründet wird. Im übrigen greift man häufig eine dieser Bestimmungen heraus und versteht dann unter A^z schlechtweg diese Funktion allein.

---

1) Hierdurch entsteht allerdings ein Konflikt für den besonderen Fall $A = e$ zwischen der gegenwärtigen Definition und derjenigen von § 13. Dies entscheidet sich nun so: Soll e^B als der Wert der in jenem Paragraphen erklärten Funktion für den besonderen Wert $z = B$ des Arguments gelten, so ist diese Zahl nach der Definition von § 13 eindeutig bestimmt. Soll dagegen e^B im Anschluß an die hier erklärte allgemeine Potenz ausgelegt werden, so muß man außerdem noch die anderen Werte berücksichtigen. Im übrigen wird man stets die erste Deutung vorziehen, wofern das Gegenteil nicht ausdrücklich erwähnt, oder es sonst nicht aus dem Zusammenhange klar wird, daß die allgemeine Potenz gemeint ist. So hat man beispielsweise in den weiteren Formeln dieses Paragraphen unter e^{cz}, $e^{(c+2\pi i)z}$, usw. die Funktion von § 13 zu verstehen.

Es ist

$$\frac{dA^z}{dz} = A^z \log A,$$

wobei rechter Hand dieselbe Bestimmung von $\log A$ wie linker Hand gemeint ist.

Sieht man dagegen $B = m$ als fest, $A = z$ als veränderlich an, so haben wir die dadurch entstehende Funktion für reelle Werte von m bereits in § 12 betrachtet. Man hat nun allgemein die Definitionsformel:

$$z^m = e^{m \log z}.$$

Es gilt auch für komplexe Werte von m unter gehöriger Festlegung der Funktion rechter Hand die Differentiationsformel:

$$\frac{dz^m}{dz} = m z^{m-1}.$$

Aufgabe. Indem man die hyperbolischen Funktionen durch die gebräuchlichen Definitionen:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \text{usw.}$$

einführt, untersuche man diese Funktionen, sowie die zugehörigen Umkehrfunktionen auf ihr Verhalten im komplexen Gebiete hin.

§ 16. Die lineare Transformation in kinematischer Behandlungsweise.

Wir haben bereits früher (§ 11) gesehen, daß die allgemeine lineare Transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0,$$

aus gewissen erzeugenden Transformationen zusammengesetzt werden kann, und zwar waren es die vier folgenden:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & w = z + a, & \\ \text{II)} & w = Az, & A \text{ reell und positiv;} \\ \text{III)} & w = e^{\alpha i} z, & \alpha \text{ reell;} \\ \text{IV)} & w = 1/z. & \end{array}$$

Jetzt soll gezeigt werden, wie die Transformation aus einem Guß entstehen kann. Wir wollen uns dieselbe als eine Transformation

der z-Ebene in sich deuten und vor allen Dingen fragen, welche Punkte der Ebene dabei ungeändert bleiben. Dazu ist notwendig, daß

$$z = \frac{az + b}{cz + d},$$

daß also z der Gleichung

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \tag{1}$$

genüge.

Der Fall $c = 0$. Nehmen wir den Fall $c = 0$ vorweg. Hier ist wegen $ad - bc \neq 0$

$$a \neq 0, \qquad d \neq 0,$$

und man kann darum unbeschadet der Allgemeinheit $d = 1$ setzen. Dieser Fall gliedert sich weiter in zwei Unterfälle:

1) $a = d = 1$.

Die Gleichung (1) hat hier gar keine Lösung, wofern man nur von der identischen Transformation $w = z$ absieht. Dabei reduziert sich die lineare Transformation auf die Form I):

$$w = z + b,$$

und stellt somit eine Parallelverschiebung der Ebene vor. Es bleibt in der Tat kein eigentlicher Punkt der Ebene fest, nur der uneigentliche Punkt der erweiterten Ebene, $z = \infty$, (vgl. Kap. 7, § 9) geht in sich über.

2) $a \neq d = 1$.

Hier hat die Gleichung (1) eine Wurzel

$$\zeta = \frac{b}{1 - a}.$$

Demnach läßt sich die lineare Transformation in der Form schreiben:

$$w - \zeta = a(z - \zeta), \tag{2}$$

welche dann durch eine Koordinatentransformation:

$$w' = w - \zeta, \qquad z' = z - \zeta,$$

in folgende übergeht:

$$w' = az'. \tag{3}$$

Ist a reell und positiv, $a = A$, so hat man Fall II):

$$w' = Az',$$

und die Ebene erfährt also eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Fixpunkte $z = \zeta$.

Ist a dagegen eine komplexe Zahl vom absoluten Betrage 1: $a = e^{\alpha i}$, so liegt Fall III) vor:

$$w' = e^{\alpha i} z',$$

und die Ebene wird mithin um den Punkt $z = \zeta$ durch den Winkel α gedreht.

Um die Transformationen I) und III) darzustellen, boten die genannten starren Bewegungen der Ebene ein besonders einfaches Mittel, während die Transformation II) durch eine gleichmäßige Dehnung der Ebene, wie eine elastische Membran aufgefaßt, veranschaulicht wird. Die Dehnung ist eine nicht-starre Bewegung, und an diesen Begriff schließt sich derjenige einer stetigen Flüssigkeitsbewegung an. In der Tat kann man sich die Transformation II) als durch eine Strömung der Punkte der Ebene längs der durch den Punkt $z = \zeta$ gehenden Strahlen hin erzeugt denken. Es entsteht also eine kontinuierliche Transformation, welche außerdem, wie wir verlangen wollen, stets konform sein soll. Hiernach findet sie ihren analytischen Ausdruck in der Formel:

$$Z' = f(t) z',$$

wo der reelle Parameter t die Strecke $0 \leqq t \leqq 1$ stetig durchläuft und die reelle monotone Funktion $f(t)$ vom Werte $f(0) = 1$ in den Wert $f(1) = A$ stetig übergeht.[1]) Fassen wir t insbesondere als die

1) Es kann uns hier genügen, daß die Formel wirklich allen Anforderungen des Textes entspricht. Will man noch darüber hinaus die Frage stellen, ob die Formel durch jene Anforderungen eindeutig bestimmt ist, so hat man sich eine nette kleine Aufgabe formuliert, deren Lösung sich aus den Entwicklungen des Kapitels über das logarithmische Potential leicht ergibt.

Im übrigen darf man die im gegenwärtigen Kapitel verwendeten Strömungen mit den späterhin zu besprechenden Strömungen der Wärme und der inkompressibelen Flüssigkeiten nicht verwechseln. Bei den ersteren bleiben die Winkel erhalten, m. a. W. sie stellen stets eine konforme Abbildung vor. Letztere lassen dagegen den Flächeninhalt der Figuren ungeändert, verzerren aber die Figuren im allgemeinen selbst in ihren „kleinsten Teilen". So wird beispielsweise im vorliegenden Falle durch die Transformation

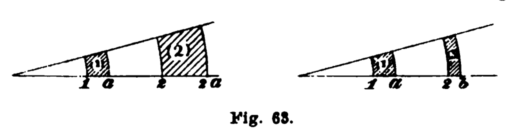


Fig. 63.

$$Z' = 4^t z'$$

das Viereck (1) für den besonderen Wert $t = \frac{1}{2}$ in das Viereck (2) verwandelt. Faßt man jedoch die Strömung einer inkompressibelen Flüssigkeit mit den

Zeit auf und richten wir unser Augenmerk auf einen beliebigen festen Punkt z_0' der Ebene, so passieren die beweglichen Punkte denselben mit einer Geschwindigkeit, die leicht zu berechnen ist. Sei nämlich ξ_0 derjenige Punkt, welcher im Augenblick $t = \tau$ den Punkt z_0' passiert:

$$z_0' = f(\tau)\,\xi_0 .$$

Dann hat man allgemein für die Bewegung dieses Punktes:

$$Z' = f(t)\,\xi_0, \qquad 0 \leqq t \leqq 1 .$$

Daraus folgt, daß seine Vektorgeschwindigkeit durch die Formel:

$$\frac{dZ'}{dt} = f'(t)\,\xi_0$$

gegeben wird. Mithin ist

$$\left.\frac{dZ'}{dt}\right|_{t=\tau} = f'(\tau)\,\xi_0 = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,z_0'.$$

Am einfachsten ist es nun, wenn wir verlangen, daß sich diese Geschwindigkeit im Punkte z_0' mit der Zeit nicht ändere. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $f'(t)/f(t)$ von t nicht abhänge, woraus denn folgt, daß

$$f(t) = A^t$$

ist. Man gelangt somit zum folgenden Resultate.

Die die Transformation II) *veranschaulichende Bewegung der Ebene findet in der kontinuierlichen Transformation*

$$Z' = A^t z', \qquad\qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

ihren analytischen Ausdruck.

Jetzt sieht man, wie man die allgemeine Transformation (3) durch eine einfache kontinuierliche Transformation erzeugen kann. Setzt man $a = Ae^{\alpha i}$, so definiert die Formel

$$Z' = A^t e^{t\alpha i} z'$$

---

gleichen Bahnkurven $\theta = \text{const.}$ und dem Geschwindigkeitspotential $u = c\log r + k$ ins Auge, so verbreitet sich derjenige Teil der Flüssigkeit, welcher ursprünglich das Viereck (1) bedeckte, späterhin nicht über das Viereck (2), sondern nur über das Viereck (3). Während die Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkte bei der einen Strömung proportional der Entfernung dieses Punktes vom Punkte $z = 0$ ist, verhält sie sich bei der anderen Strömung umgekehrt proportional dieser Entfernung. (Es ist Zufall, daß in diesem Beispiele, bei der zweiten Strömung, diejenigen Punkte der Ebene, welche zu einer bestimmten Zeit auf einer Niveaukurve $u = \text{const.}$ liegen, auch hinfort auf einer derartigen Kurve verharren. Im allgemeinen trifft dies nicht zu.)

eine Transformation der verlangten Art. Die Bahnkurven bestehen aus logarithmischen Spiralen:

$$\varrho = \lambda e^{\mu \varphi},$$

wo $Z' = \varrho e^{\varphi i}$ gesetzt ist und λ, μ zwei reelle positive Parameter bedeuten; die Geschwindigkeit, mit welcher die beweglichen Punkte einen festen Punkt passieren, ändert sich nicht mit der Zeit. Die Schar konzentrischer Kreise $z' = \text{const.}$ und das Strahlenbüschel mit seinem Mittelpunkte im Punkte $z = \zeta$ werden bezw. in sich übergeführt. Die Transformationen II), III) heißen nach Klein *hyperbolisch* bezw. *elliptisch*, die allgemeine Transformation (3) *loxodromisch*. Sie lassen alle den einen eigentlichen Punkt $z = \zeta$ und den uneigentlichen Punkt $z = \infty$ ungeändert. Im übrigen heißt die Transformation I) *parabolisch*. Sie läßt nur den Punkt $z = \infty$ ungeändert.

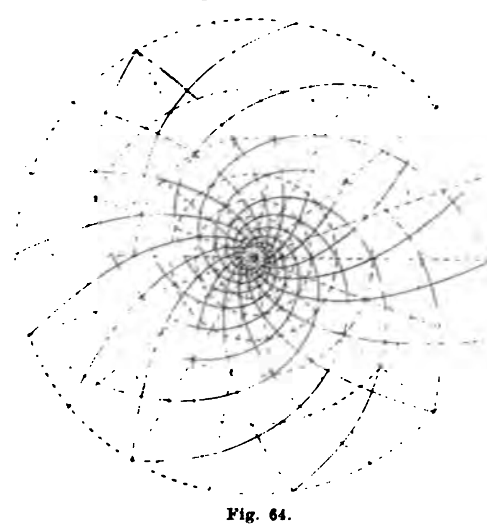


Fig. 64.

§ 17. Fortsetzung; der allgemeine Fall.

Gehen wir jetzt zum Falle $c \neq 0$ über und setzen wir zunächst voraus, daß die Diskriminante der Gleichung (1), § 16, nicht verschwinde:

$$(d - a)^2 + 4bc \neq 0.$$

Dann hat (1), § 16, zwei voneinander verschiedene Wurzeln ζ_1, ζ_2, und man erkennt leicht, daß diese Punkte der z-Ebene auch wirklich bezw. in sich selbst übergeführt werden. Wir beweisen nun vor allem den Satz:

Die lineare Transformation läßt sich, im Falle

$$(d - a)^2 + 4bc \neq 0, \qquad c \neq 0,$$

ist, in der Form schreiben:

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = A e^{\alpha i} \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}, \qquad A > 0.$$

In der Tat führe man Z mittels der Transformationen

$$Z = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}, \qquad w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad W = \frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2}$$

in W über. Nach dem Satze von § 11, Aufgabe, wird W dann eine lineare Funktion von Z:

$$W = \frac{\mathfrak{A}Z + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}Z + \mathfrak{D}}, \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C} \neq 0.$$

Die Koeffizienten kann man hier direkt bestimmen, indem man zunächst Z unendlich werden läßt. Dann nähert sich z dem Punkte ζ_2, dasselbe gilt auch von w, und darum wird W unendlich. Das gibt

$$\mathfrak{C} = 0, \qquad \mathfrak{A} \neq 0, \qquad \mathfrak{D} \neq 0,$$

also, indem wir noch $\mathfrak{D} = 1$ setzen:

$$W = \mathfrak{A}Z + \mathfrak{B}.$$

Des weiteren entspricht dem Werte $Z = 0$ der Wert $W = 0$, wie man in ähnlicher Weise zeigt, folglich ist

$$\mathfrak{B} = 0, \qquad W = \mathfrak{A}Z.$$

Ersetzt man hier W und Z durch ihre Werte in w, z, und schreibt man endlich $\mathfrak{A} = Ae^{\alpha i}$, so ist der Satz bewiesen.

Um $\mathfrak{A}$ in den ursprünglichen Koeffizienten auszuwerten, lasse man z in den beiden Formen der linearen Transformation:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = \mathfrak{A}\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$$

unendlich werden. So kommt

$$\mathfrak{A} = \frac{a - c\zeta_1}{a - c\zeta_2}.$$

Ferner hat man

$$\zeta_1 = \frac{a - d + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2c},$$

$$\mathfrak{A} = \frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}.$$

Wie vorhin unter 2) im Falle $c = 0$, so untersuchen wir auch hier zuvörderst zwei spezielle Transformationen:

α) die *hyperbolische* Transformation

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = A\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}, \qquad A > 0;$$

β) die *elliptische* Transformation

$$\frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2}=e^{\alpha i}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}.$$

Dabei spielen zwei Kreisscharen eine wichtige Rolle, und zwar sind es

i) die Schar der durch ζ_1, ζ_2 gehenden Kreise;

ii) die Schar der Kreise, in Bezug auf deren jeden ζ_1, ζ_2 konjugierte Punkte sind.

Einige Eigenschaften dieser Kreise sind uns schon von der Elementargeometrie her wohl bekannt. Sei P ein beliebiger Punkt der Ebene, und man lege erstens einen Kreis der Schar i) durch P. Verbindet man P dann mit ζ_1, ζ_2, so bleibt der durch die beiden Verbindungsgeraden gebildete Winkel erhalten, wenn P längs dieses Kreises fortrückt. — Zweitens lege man durch P einen Kreis der Schar ii). Der Mittelpunkt O desselben liegt auf der durch ζ_1 und ζ_2 bestimmten Geraden und wird dadurch erhalten, daß man die Tangente des ersten Kreises im Punkte P konstruiert und diese dann mit der genannten Geraden zum Schnitte bringt. In der Tat erweisen sich die Dreiecke $O\zeta_1 P$ und $OP\zeta_2$ als ähnlich, so daß also

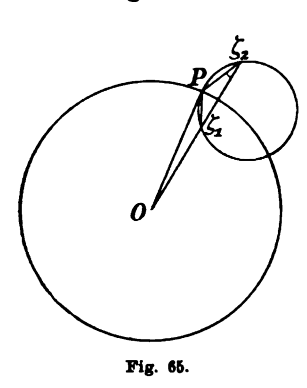


Fig. 65.

$$\frac{O\zeta_1}{OP}=\frac{OP}{O\zeta_2}=\frac{\zeta_1 P}{\zeta_2 P}, \qquad O\zeta_1\cdot O\zeta_2=OP^2$$

wird. Es gibt aber auch keinen weiteren Kreis der Schar ii), welcher durch P geht. Da nämlich ein solcher seinen Mittelpunkt O' auf jener Geraden haben und außerdem

$$O'\zeta_1\cdot O'\zeta_2=O'P^2$$

liefern müßte, so würden die Dreiecke $O'\zeta_1 P$ und $O'P\zeta_2$ ähnlich ausfallen, woraus man schließt:

$$\sphericalangle\, O'P\zeta_1=\sphericalangle\, O'\zeta_2 P=\sphericalangle\, OP\zeta_1.$$

Im übrigen bleibt das Verhältnis

$$\frac{\zeta_1 P}{\zeta_2 P}$$

ungeändert, wenn der Punkt P den zweiten Kreis durchläuft.

Liegt P insbesondere auf der durch ζ_1 und ζ_2 gehenden Geraden, so teilen sich die Punkte ζ_1, ζ_2 und P, Q harmonisch, wo Q den anderen Schnittpunkt des zu bestimmenden Kreises mit der genannten Geraden bedeutet. Der Punkt Q wird dann durch die Konstruktion des vollständigen Vierecks erhalten.

Fassen wir das Ergebnis noch einmal in Worte zusammen, so können wir sagen:

Durch jeden Punkt $z \neq \zeta_1, \zeta_2$ *der erweiterten Ebene geht ein und nur ein Kreis einer jeden Schar* i), ii).

Die Mittelpunkte der Kreise von Schar ii) *liegen alle auf der durch* ζ_1 *und* ζ_2 *bestimmten Geraden.*

Der Winkel $\zeta_1 \overset{\frown}{P} \zeta_2$ *bleibt erhalten, wenn* P *einen der beiden Bogen durchläuft, in welche ein beliebiger Kreis der Schar* i) *durch die Punkte* ζ_1 *und* ζ_2 *zerlegt wird.*

Das Verhältnis $\zeta_1 P / \zeta_2 P$ *bleibt erhalten, wenn der Punkt* P *einen beliebigen Kreis der Schar* ii) *beschreibt.*

Die hyperbolische Transformation.

Im Anschluß an die kontinuierlichen Transformationen im Falle $c = 0$ wollen wir auch hier eine stetige Bewegung der Punkte der Ebene bestimmen, wodurch die vorgelegte Transformation bewerkstelligt wird. Dabei mögen die Zwischentransformationen, welche die kontinuierliche Transformation ausmachen sollen, alle von Typus α), also hyperbolisch sein, während sich die Geschwindigkeit, mit welcher die beweglichen Punkte einen beliebigen festen Punkt passieren, mit der Zeit nicht ändern darf. Diese Festsetzungen genügen, um die kontinuierliche Transformation völlig zu bestimmen. Setzt man nämlich hier, ähnlich wie vorhin,

$$\frac{Z - \zeta_1}{Z - \zeta_2} = f(t) \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

wo $f(t)$ reell und positiv ist, und führt man wieder z_0, ξ_0, τ in gleicher Weise ein, so kommt

$$\frac{z_0 - \zeta_1}{z_0 - \zeta_2} = f(\tau) \frac{\xi_0 - \zeta_1}{\xi_0 - \zeta_2}, \qquad \frac{Z - \zeta_1}{Z - \zeta_2} = f(t) \frac{\xi_0 - \zeta_1}{\xi_0 - \zeta_2}.$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man dann

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{(Z - \zeta_1)(Z - \zeta_2)} \frac{dZ}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)},$$

also
$$\left.\frac{dZ}{dt}\right|_{t=\tau} = \frac{(z_0-\zeta_1)(z_0-\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}.$$

Als Endresultat ergibt sich:
$$\frac{Z-\zeta_1}{Z-\zeta_2} = A^t\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Die Bahnkurven der hyperbolischen Transformation bilden die Kreisschar i).

In der Tat ist
$$\text{arc}\,(Z-\zeta_1) - \text{arc}\,(Z-\zeta_2) = \text{arc}\,(z-\zeta_1) - \text{arc}\,(z-\zeta_2).$$

Nun ist ja die linke Seite dieser Gleichung nichts anderes als der Winkel (absolut genommen), welchen die beiden von Z nach ζ_1, ζ_2 gezogenen Geraden miteinander bilden. Dieser ändert sich mithin nicht mit t, sondern bleibt stets gleich dem entsprechenden Winkel für den Punkt z. Daher rückt der Punkt Z längs des durch ζ_1, z, ζ_2 gelegten Kreises fort.

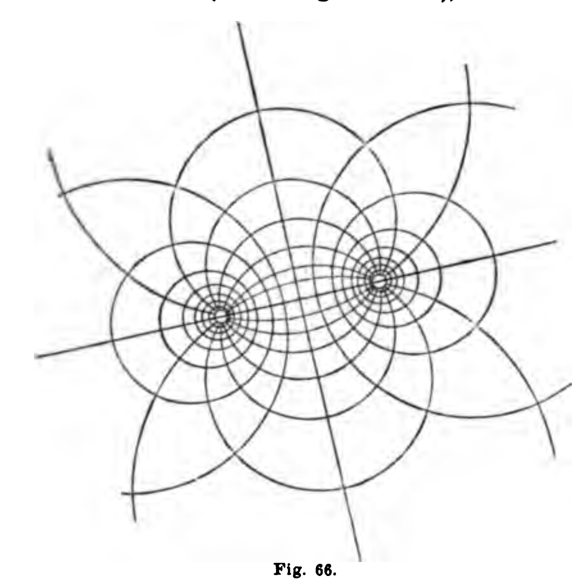


Fig. 66.

Die Kreisschar ii) *geht in sich über.* Denn es ist
$$\frac{|Z-\zeta_1|}{|Z-\zeta_2|} = A^t\frac{|z-\zeta_1|}{|z-\zeta_2|}.$$
Nun ist aber der Ort der Punkte
$$\frac{|z-\zeta_1|}{|z-\zeta_2|} = \lambda,$$
wo λ ein Konstante bedeutet, ein Kreis der Schar ii). Die Punkte Z, in welche diese durch eine bestimmte Transformation $t = t'$ der Schar übergeführt werden, genügen daher der Beziehung
$$\frac{|Z-\zeta_1|}{|Z-\zeta_2|} = A^{t'}\lambda$$
und machen mithin einen zweiten Kreis der Schar ii) aus, w. z. b. w.

Die elliptische Transformation.

Stellt man hier eine ähnliche Überlegung an, wie soeben im Falle der hyperbolischen Transformation, so wird man zur kontinuierlichen

Transformation

$$\frac{Z-\zeta_1}{Z-\zeta_2}=e^{t\alpha i}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

geführt.[1]) Die Rollen der beiden Kreisscharen werden dabei miteinander vertauscht.

Die Bahnkurven der elliptischen Transformation sind die Kreise der Schar ii).

Das folgt durch ein ähnliches Räsonnement, wie vorhin, aus der Beziehung

$$\frac{|Z-\zeta_1|}{|Z-\zeta_2|}=\frac{|z-\zeta_1|}{|z-\zeta_2|}.$$

Die Kreisschar i) *geht in sich über.* Denn es ist

$$\operatorname{arc}(Z-\zeta_1)-\operatorname{arc}(Z-\zeta_2)=\alpha t+\operatorname{arc}(z-\zeta_1)-\operatorname{arc}(z-\zeta_2).$$

Die loxodromische Transformation.

Auch im allgemeinen Falle

$$\frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2}=a\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}, \qquad a=Ae^{\alpha i},$$

sind dieselben Gesichtspunkte für die Einschaltung eines Systems von Zwischentransformationen, aus welchen sich die kontinuierliche Transformation zusammensetzen soll, maßgebend wie in den beiden voraufgehenden Fällen. Man wird zunächst verlangen, daß diese Zwischentransformationen alle loxodromisch seien, daß also die beiden reellen Funktionen $f(t)>0$, $\varphi(t)$ so bestimmt werden, daß die kontinuierliche Transformation

$$\frac{Z-\zeta_1}{Z-\zeta_2}=f(t)\,e^{\varphi(t)i}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

die Punkte der Ebene aus ihrer Anfangs- in die durch die vorgelegte Transformation bestimmte Endlage stetig strömen lasse und daß sich außerdem die Geschwindigkeit, mit welcher die beweglichen Punkte einen festen Punkt passieren, mit der Zeit nicht ändere. Dadurch werden diese Funktionen gerade festgelegt, und zwar ist

---

1) Allgemeiner erhält man die Transformation

$$\frac{Z-\zeta_1}{Z-\zeta_2}=e^{\varphi(t)i}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2},$$

wo $\varphi(t)=t(\alpha\pm 2k\pi)$, $k=1, 2, \cdots$, ist.

$$\frac{Z-\zeta_1}{Z-\zeta_2} = A^t e^{\varphi(t)i} \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

wo $\varphi(t) = t(\alpha \pm 2k\pi)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, ist.

Die parabolische Transformation.

Es bleibt nur noch übrig, den Fall zu behandeln, daß

$$(a-d)^2 + 4bc = 0$$

ist. Da wir $c \neq 0$ annehmen, so hat Gleichung (1), § 16, jetzt eine und nur eine Wurzel, $z = \zeta$, und dieser Punkt bleibt auch wirklich ungeändert.

Die lineare Transformation läßt sich im parabolischen Falle:

$$(a-d)^2 + 4bc = 0, \qquad c \neq 0,$$

auf die Form bringen:

$$\frac{1}{w-\zeta} = \frac{1}{z-\zeta} + \mathfrak{B}.$$

Führen wir nämlich den Punkt Z mittels der Transformationen

$$Z = \frac{1}{z-\zeta}, \qquad w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad W = \frac{1}{w-\zeta}$$

in W über, so hängt W linear und zwar ganz von Z ab:

$$W = \mathfrak{A} Z + \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{A} \neq 0.$$

Dabei muß ferner $\mathfrak{A} = 1$ sein, denn sonst hätte diese letzte Transformation einen eigentlichen Fixpunkt, welcher dann notwendig noch zu einem zweiten Fixpunkte der ursprünglichen Transformation führen würde. Hiermit ist der Beweis fertig.

Wie man rücksichtlich der Beziehungen

$$0 = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$$

leicht nachrechnet, ist

$$\zeta = \frac{a-d}{2c}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{2c}{a+d}.$$

Sei $\mathfrak{B}$ zunächst reell und positiv, $\mathfrak{B} = B$. Unter Einführung neuer Koordinaten:

$$z' = x' + iy' = z - \zeta, \qquad w' = u' + iv' = w - \zeta$$

kommt:

$$\frac{u'-iv'}{u'^2+v'^2} = \frac{x'-iy'}{x'^2+y'^2} + B,$$

und man erhält somit die Gleichungen

(1)
$$\frac{u'}{u'^2+v'^2} = \frac{x'}{x'^2+y'^2} + B,$$

(2)
$$\frac{v'}{u'^2+v'^2} = \frac{y'}{x'^2+y'^2}.$$

Nun ist aber der Ort der Gleichung

(i')
$$\frac{x'}{x'^2+y'^2} = \text{const.}$$

ein die y-Achse im Koordinatenanfangspunkte berührender Kreis, während die Gleichung

(i'i')
$$\frac{y'}{x'^2+y'^2} = \text{const.}$$

einen die x-Achse in demselben Punkte berührenden Kreis vorstellt. Diese Kreise schneiden sich unter einem rechten Winkel. Hieraus entnimmt man also den Satz:

Durch die parabolische Transformation

$$\frac{1}{w-\zeta} = \frac{1}{z-\zeta} + B$$

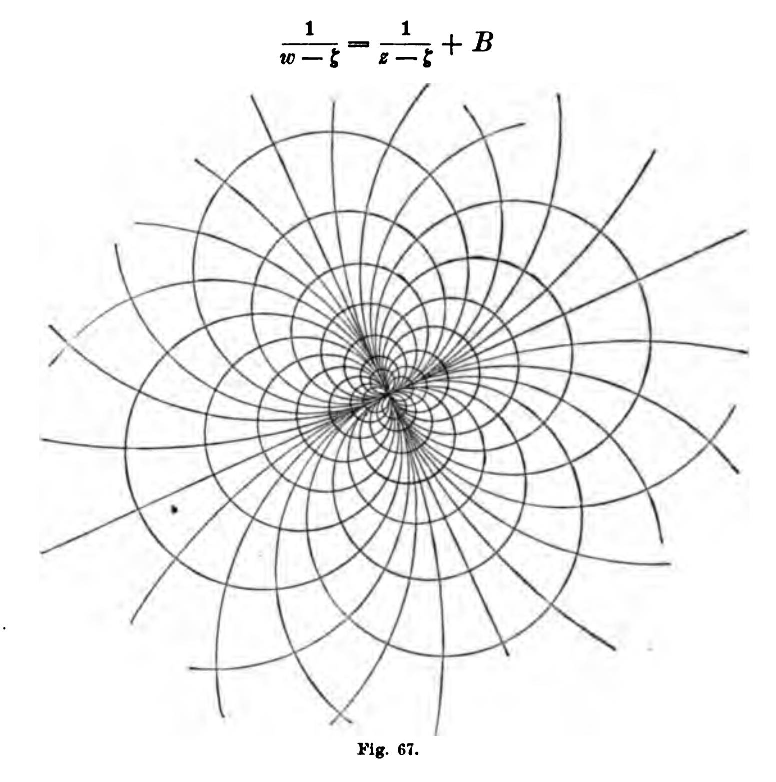


Fig. 67.

geht jeder Kreis der Schar i'i') *in sich selbst über, während die Kreise der Schar* i') *in andere derselben Schar verwandelt werden.*

Führt man eine kontinuierliche Reihe von Zwischentransformationen durch die Formel ein:

$$\frac{1}{Z-\mathfrak{z}} = \frac{1}{z-\mathfrak{z}} + Bt, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

so strömen die Punkte der Ebene längs der Kreise der Schar i'i') *hin und zwar so, daß die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der Ebene konstant bleibt.*

Im Falle $\mathfrak{B}$ rein imaginär ist, $\mathfrak{B} = Bi$, werden die Rollen der beiden Scharen gerade gegeneinander vertauscht; die Bahnkurven sind hier die Kreise i').

Jetzt ist es leicht, zum allgemeinen Falle hinaufzusteigen. Die Bahnkurven der stetigen Strömung

$$\frac{1}{Z-\mathfrak{z}} = \frac{1}{z-\mathfrak{z}} + \mathfrak{B}t$$

schneiden die Kreise der Schar i'i') alle unter ein und demselben Winkel, ähnlich wie im loxodromischen Falle, was zur Folge hat, daß sich dasselbe System von Bahnkurven und Niveaulinien einstellt, nur erscheint jetzt das Achsenkreuz anders gegen die Koordinatenachsen orientiert, vgl. Fig. 67.

Grenzfälle. Die allgemeine lineare Transformation besitzt zwei eigentliche Fixpunkte. Rückt einer davon ins Unendliche, so entsteht die ganze lineare Transformation. Rücken die beiden zusammen, so kommt die parabolische Transformation zustande, die insbesondere die Parallelverschiebungen der Ebene umfaßt, wenn jener Fixpunkt im Unendlichen liegt.

Rotationen der Kugel.

Wir wollen noch diejenige lineare Transformation der Ebene aufstellen, welche einer Drehung der Kugel um einen willkürlichen Durchmesser derselben entspricht.[1])

Indem wir die Projektionsebene in die Äquatorebene verlegen und den Radius gleich 1 nehmen, erhalten wir als Gleichung der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

---

1) Die Formel rührt von Cayley her, *Math. Ann.*, Bd. 15 (1879) S. 238. Die Herleitung derselben ist im wesentlichen dieselbe, welche Klein gegeben hat, *Ikosaeder*, S. 32.

wobei die ξ-, η-Achsen resp. mit den x-, y-Achsen zusammenfallen sollen. Ferner wird

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1-\zeta}.$$

Sei (ξ, η, ζ) das eine Ende des bewußten Durchmessers; dann wird das andere im Punkte $(-\xi, -\eta, -\zeta)$ liegen. Die Koordinaten ξ, η, ζ sind eben die Richtungskosinus der Rotationsachse:

$$\xi = \cos\alpha, \qquad \eta = \cos\beta, \qquad \zeta = \cos\gamma.$$

Die Fixpunkte der linearen Transformation sind folgende:

$$a_1 = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}, \qquad a_2 = -\frac{\xi + i\eta}{1+\zeta}.$$

Es handelt sich nur noch um die Bestimmung von $\mathfrak{A} = Ae^{\alpha i}$. Da das Ähnlichkeitsverhältnis im Punkte a_1 den Wert 1 haben muß, so wird

$$A = 1.$$

Soll nun die Kugel, von einem außerhalb derselben befindlichen Punkte $(\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda\zeta)$, $\lambda > 1$, der Rotationsachse aus besehen, durch einen Winkel ω entgegen dem Sinne des Uhrzeigers gedreht werden, so muß $\alpha = -\omega$ gesetzt werden. Hiermit erhalten wir

$$\frac{w - a_1}{w - a_2} = e^{-\omega i}\frac{z - a_1}{z - a_2}.$$

Indem wir diese Gleichung mit $e^{\frac{\omega i}{2}}$ multiplizieren und dann nach w auflösen, ergibt sich, unter Benutzung der Relation

$$1 - \zeta^2 = \xi^2 + \eta^2 = (\xi + i\eta)(\xi - i\eta),$$

daß

$$w = \frac{(d + ic)z - (b - ia)}{(b + ia)z + (d - ic)},$$

ist, wo

$$a = \cos\alpha \sin\frac{\omega}{2}, \quad b = \cos\beta \sin\frac{\omega}{2}, \quad c = \cos\gamma \sin\frac{\omega}{2} \quad d = \cos\frac{\omega}{2}.$$

Dabei ist ferner

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Bei der obigen Beweisführung ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß $\zeta \neq \pm 1$ sei. Die endgültige Formel bleibt aber auch in diesem Falle bestehen, wie man nachträglich direkt bestätigt.

§ 18. Erzeugung der allgemeinen linearen Transformation aus einer ganzen Transformation durch den Prozeß der sogenannten „Transformation".

Liegt eine bestimmte Reihe von Transformationen vor und bildet man aus einer derselben, T, mittels einer zweiten, S, die Transformation

$$S^{-1}TS = T',$$

wobei S^{-1} zuerst ausgeführt werde, so sagt man, daß T' *aus* T *durch „Transformation" hervorgehe;* T' und T heißen dann *gleichberechtigt.* Wir wollen jetzt den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Die allgemeine lineare Transformation geht aus der ganzen linearen Transformation durch „Transformation" hervor.*

Im Falle es zwei Fixpunkte, ζ_1, ζ_2 gibt, läßt sich die vorgelegte Transformation in der Form schreiben:

$$\frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2} = \mathfrak{A}\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}.$$

Nimmt man nun als Transformationen S, T die folgenden[1]):

$$S: \qquad \frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2} = z,$$

$$T: \qquad w = \mathfrak{A}z,$$

so ist die zu S inverse Transformation

$$S^{-1}: \qquad w = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2},$$

und die Bildung der Transformation $S^{-1}TS$ erfordert mithin die sukzessive Ausführung der drei Transformationen

$$S^{-1}: \qquad z' = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2};$$

$$T: \qquad z'' = \mathfrak{A}z';$$

$$S: \qquad \frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2} = z''.$$

1) Diese, sowie alle übrigen Transformationen dieses Paragraphen, sind so zu verstehen, daß der zu transformierende Punkt auf der rechten Seite der jeweiligen Gleichung steht, während sich die Variabele linker Hand auf den transformierten Punkt bezieht.

Man wird sonach zur Transformation

$$T' = S^{-1}TS: \qquad \frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2} = \mathfrak{A}\,\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2},$$

geführt, und hiermit ist der Satz für diesen Fall bewiesen.

Erforschen wir jetzt die geometrische Bedeutung der „Transformation" im vorliegenden Falle, so sehen wir, daß die Transformation S^{-1} die z-Ebene auf die z'-Ebene so abbildet, daß die Punkte $z = \zeta_1$, ζ_2 bzw. in $z' = 0$, ∞ übergehen. Alsdann fassen wir die Transformation T, wie in den vorhergehenden Paragraphen, als eine Transformation der z-Ebene in sich selbst auf. Es handelt sich hier eben um eine ganze lineare Transformation mit einem eigentlichen Fixpunkte. Diese Transformation haben wir aber bereits eingehend untersucht und die Bahnkurven der stetigen Bewegung bestimmt, § 16. Führt man nun noch letzten Endes die Transformation S aus, indem man die soeben in sich transformierte z'-Ebene wieder auf die Ausgangsebene zurückbezieht, so werden diejenigen Punkte und Kurven bzw. Kurvenscharen der Ausgangsebene, deren Abbild in der z'-Ebene durch Ausführung der Transformation T in sich überging, auch bei T' ungeändert bleiben.

Ähnliches gilt für die parabolische Transformation. Hier wird man S, T, wie folgt, annehmen:

$$S: \qquad \frac{1}{w-\zeta} = z,$$

$$T: \qquad w = z + \mathfrak{B};$$

wobei also

$$S^{-1}: \qquad w = \frac{1}{z-\zeta}$$

ist.

Aus der Kenntnis der ganzen linearen Transformation, insbesondere der Bahnkurven und der zu denselben orthogonalen Schar von Niveaukurven, gewinnt man also durch den Prozeß der „Transformation" einen unmittelbaren Einblick in die Beschaffenheit der allgemeinen linearen Transformation, ja, man kann sogar die allgemeine lineare Transformation schon allein von diesem Standpunkte aus betrachten und auf Grund dieser Methode behandeln.[1])

---

1) So bei Klein, Leipziger Vorlesung 1881/82; vgl. auch Klein-Fricke, *Elliptische Modulfunktionen,* Bd. I, 2. Abschnitt, 1. Kap.

§ 19. Schlußbemerkungen über lineare Transformationen.

Zum Schluß wollen wir noch einige Angaben über lineare Transformationen anknüpfen, auf deren Begründung wir indessen verzichten müssen.

a) *Gruppentheoretische Eigenschaften.* Die Gesamtheit der linearen Transformationen mit nicht verschwindender Determinante bildet eine Gruppe (vgl. § 11, Ende). Diese Gruppe enthält eine Reihe von Untergruppen. So bilden beispielsweise alle diejenigen Transformationen, welche dieselben Fixpunkte haben, eine Untergruppe, und diese enthält wieder als Untergruppen die zugehörigen elliptischen bzw. hyperbolischen Transformationen. Auch gibt es eine Reihe von endlichen Gruppen, die insbesondere denjenigen Drehungen der Kugel entsprechen, welche einen derselben einbeschriebenen regulären Körper mit sich selbst zur Deckung bringen. Für die Theorie der automorphen Funktionen sind die gruppentheoretischen Eigenschaften der linearen Transformation grundlegend. Im übrigen sei noch einer Invariante der Transformation Erwähnung getan. Das Doppelverhältnis der vier Punkte z_1, z_2, z_3, z_4:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

behält nämlich seinen Wert bei, wenn diese Punkte vermöge einer beliebigen linearen Transformation in vier andere übergeführt werden. Hiermit ist Anschluß an die Theorie der binären Formen erreicht.[1]) Nun können drei beliebige Punkte in drei andere beliebige Punkte übergeführt werden. Setzt man also insbesondere $z_1 = z$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$, so nimmt jenes Doppelverhältnis den Wert z an. Dementsprechend kann man die unabhängige Variabele z, einer linearen Transformation der Ebene gegenüber, als das Doppelverhältnis $(z, 0, 1, \infty)$ auffassen, und darüber hinaus allgemein das Doppelverhältnis (z, a, b, c) des veränderlichen Punktes z und der drei festen Punkte a, b, c als unabhängige Variabele einführen. Wir können um so mehr von einer eingehenden Besprechung dieser Eigenschaften absehen, weil sie bereits von verschiedenen Autoren in leicht zugänglicher Form behandelt sind.[2])

---

1) Hierüber vgl. man Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen*, Erlanger Programm, 1872, S. 47, = *Math. Ann.* Bd. 43 (1893) S. 98.

2) Man vgl. die gedrängte, aber doch klare Darstellung bei Burkhardt, *Analytische Funktionen*, 2. Abschn.; ferner Klein-Fricke, *Elliptische Modulfunktionen*, Bd. 1, S. 163.

b) *Die zugehörige Transformation der Kugel.* Der allgemeinen linearen Transformation der Ebene entspricht eine ausnahmslos eineindeutige und konforme Transformation der Kugel in sich, und umgekehrt führt jede solche Transformation der Kugel in sich, ohne Umlegung der Winkel, auf eine lineare Transformation der Ebene, Kap. 7, § 10, Ende. Dabei bleiben im allgemeinen zwei Punkte der Kugel fest, in besonderen Fällen aber nur einer. Die beiden Kreisscharen i), ii) resp. i'), i'i') der Ebene gehen in zwei zueinander orthogonale Kreisscharen der Kugel über, welche in besonders einfacher Weise erzeugt werden können. Es gehen nämlich alle Ebenen, in welchen die Kreise der Schar ii) liegen, durch ein und dieselbe Gerade, welche nebst der durch die beiden Fixpunkte der Kugel bestimmten Geraden ein Polarenpaar bildet. Des weiteren läßt sich zeigen, daß zu jeder der hier betrachteten Transformationen der Kugel in sich, oder allgemeiner zu jeder Kreisverwandtschaft der Kugel mit sich selbst, sei es mit oder ohne Umlegung der Winkel, eine Kollineation des Raumes gehört, welche die Kugel genau eben so in sich überführt; und umgekehrt liefert eine beliebige derartige Kollineation des Raumes eine der letztgenannten Transformationen der Kugel in sich. Man kann auch so sagen: Jede Nicht-Euklidische Bewegung des Raumes, wofür die Kugel Fundamentalfläche ist, führt zu einer Transformation der Kugel in sich ohne Umlegung der Winkel, und umgekehrt kann eine jede dieser Transformationen durch eine von jenen bewirkt werden.

Endlich wollen wir noch eine konforme Transformation der Kugel in sich betrachten, deren Fixpunkte die beiden Endpunkte eines Durchmessers sind, — wir wollen diese dann als den Nord- und den Südpol ansehen. Konstruiert man den Zylinder, welcher die Kugel längs des Äquators berührt, und nimmt man dann eine Zentralprojektion der Kugel auf diesen vor, so entspricht der bewußten Transformation der Kugel in sich eine starre Bewegung des Zylinders in sich.

Aufgabe 1. Soll die reelle Achse durch eine lineare Transformation in sich selbst übergehen, so reicht offenbar hin, daß die Koeffizienten der Transformation alle reell sind. Man beweise den umgekehrten Satz, daß sie nämlich dann stets reell genommen werden können.

Man zeichne die Fixpunkte und die Bahnkurven für alle möglichen Fälle derartiger Transformationen auf.

Aufgabe 2. Soll eine lineare Transformation periodisch[1]) sein, so kann sie nur elliptisch sein, und zwar muß $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ sein, wo p und q ganze Zahlen sind.

Aufgabe 3. Man untersuche die Transformation:

$$w = -\frac{z+1}{z}.$$

Ist sie periodisch?

Aufgabe 4. Es sollen alle diejenigen linearen Transformationen ermittelt werden, welche einen gegebenen Kreis in sich überführen.

Aufgabe 5. Man zeige, daß eine elliptische, hyperbolische, parabolische oder loxodromische Transformation diese Eigenschaft gegenüber der sogenannten „Transformation" beibehält.

---

1) Eine Transformation heißt *periodisch* mit der Periode n, wenn sie, n mal (aber nicht weniger oft) hintereinander ausgeführt, die identische Transformation hervorruft.

Siebentes Kapitel.

Integralsätze und singuläre Punkte. Rationale Funktionen. Reihenentwicklungen.

§ 1. Bestimmte Integrale.

An die Definition des Integrals einer reellen Funktion $\Phi(x, y, s)$, erstreckt über eine Kurve C (Kap. 4, § 1), anknüpfend erklärt man das Integral einer Funktion einer komplexen Veränderlichen, wie folgt. In einem Bereich T der Zahlenebene sei eine Funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

stetig.[1]) Seien ferner z_0 und Z zwei Punkte von T, welche durch eine in T verlaufende reguläre Kurve C miteinander verbunden werden mögen. Diese Kurve werde durch die Punkte $z_1, \ldots z_{n-1}$ in n Teile zerlegt. Bildet man nun die Summe

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k, \qquad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k, \qquad z_n = Z,$$

und läßt man n ins Unendliche wachsen, während die Größen Δz_k alle gegen 0 abnehmen, so stellt sich heraus, daß sich S_n einem Grenzwerte nähert. In der Tat ist

$$f(z_k) \Delta z_k =$$
$$[u(x_k, y_k) \Delta x_k - v(x_k, y_k) \Delta y_k] + i[v(x_k, y_k) \Delta x_k + u(x_k, y_k) \Delta y_k].$$

Demgemäß drückt sich S_n mittels der beiden Summen

---

1) Wir erinnern nochmals an die Vereinbarung, wonach eine Funktion stets als einwertig gedacht wird, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt wird oder es nicht sonst aus dem Zusammenhange hervorgeht, daß mehrdeutige Funktionen der Betrachtung zugelassen werden.

$$\sum_{\iota=0}^{n-1}[u(x_\iota, y_\iota)\,\Delta x_\iota - v(x_\iota, y_\iota)\,\Delta y_\iota],$$

$$\sum_{\iota=0}^{n-1}[v(x_\iota, y_\iota)\,\Delta x_\iota - u(x_\iota, y_\iota)\,\Delta y_\iota]$$

aus, und das sind eben die Summen, welche in die Definition der Kurvenintegrale, wovon soeben die Rede war:

$$\int_{x_0, y_0}^{X, Y} u\,dx - v\,dy, \qquad \int_{x_0, y_0}^{X, Y} v\,dx + u\,dy$$

eingehen. Infolgedessen nähert sich S_n bei wachsendem n einem Grenzwerte, und diese Größe ist es gerade, welche wir als das *bestimmte Integral* der Funktion $f(z)$, erstreckt über die Kurve C, definieren wollen; in Zeichen

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

Darnach ist

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{(x_0, y_0)}^{X, Y} u\,dx - v\,dy + i\int_{(x_0, y_0)}^{X, Y} v\,dx + u\,dy.$$

Die vorstehende Definition läßt eine evidente Erweiterung zu, indem man von der Forderung absieht, daß $f(z)$ in einem zweidimensionalen Bereiche erklärt sein soll, und nur verlangt, daß $f(z)$ längs der Kurve C definiert werde und dort stetig sei. Außerdem kann man an Stelle der Summe S_n die Summe

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\,\Delta s_k$$

treten lassen, wobei Δs_k die Länge des Bogens Δz_k bedeutet. Auch diese Summe strebt bei wachsendem n einem Grenzwerte zu; wir schreiben

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\,\Delta s_k = \int_{s_0}^{S} f(z)\,ds.$$

Es ist:

$$(2) \qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{s_0}^{S} f(z)\,\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Allgemeiner hat man:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k, t_k)\,\Delta t_k = \int_{t_0}^{T} f(z, t)\, dt,$$

wo C durch den reellen Parameter t dargestellt wird:

$$C: \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqq t \leqq T;$$
$$\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0.$$

Hierbei hängt $f(z, t)$ stetig von z und t ab. Endlich kann man noch den Punkt z_k durch einen beliebigen Punkt z_k' des Bogens (z_k, z_{k+1}) von C, sowie t_k durch t_k'' ersetzen.

Hieran schließen sich die weiteren Definitionen und Formeln:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\,\Delta x_k = \int_{x_0}^{X} f(z)\, dx = \int_{0}^{T} f(z)\, x'\, dt,$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\,\Delta y_k = \int_{y_0}^{Y} f(z)\, dy = \int_{t_0}^{T} f(z)\, y'\, dt.$$

Wie im reellen Falle, so bestehen auch hier die Beziehungen:

$$\int_{Z}^{z_0} f(z)\, dz = -\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz, \tag{3}$$

$$\int_{Z_1}^{Z_2} f(z)\, dz = \int_{Z_1}^{Z_3} f(z)\, dz + \int_{Z_3}^{Z_2} f(z)\, dz, \tag{4}$$

wo Z_1, Z_2, Z_3 drei beliebige Punkte von C sind. Ferner ist

$$\int_{z_0}^{Z} k f(z)\, dz = k \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz, \tag{5}$$

wo k eine Konstante bedeutet;

$$\int_{z_0}^{Z} \{f(z) + \varphi(z)\}\, dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz + \int_{z_0}^{Z} \varphi(z)\, dz; \tag{6}$$

$$\left|\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz\right| \leqq \int_{z_0}^{Z} |f(z)|\, |dz|, \tag{7}$$

wobei das Integral rechter Hand als Grenzwert der Summe:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)|\, |\Delta z_k| = \int_{s_0}^{S} |f(z)|\, ds,$$

zu verstehen ist. Was die Integrationsgrenzen in (7), rechter Hand, anbetrifft, so sollen sie daran erinnern, daß doch längs einer Kurve integriert wird, und im Sinne der Schreibweise

$$\int_{(x_0,\, y_0)}^{(X,\, Y)} F(x, y)\, dx$$

aufgefaßt werden.

Bezeichnet man mit M, l den größten Wert von $|f(z)|$ längs C bzw. die Bogenlänge von C, so geht aus (7) hervor, daß

$$(8) \qquad \left|\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz\right| \leq Ml$$

ist.

Analoge Beziehungen gelten auch für die Integrale

$$(9) \qquad \int_{t_0}^{T} f(z, t)\, dt, \quad \int_{x_0}^{X} f(z)\, dx, \quad \int_{y_0}^{Y} f(z)\, dy.$$

Für die beiden letzten dieser Integrale gilt jedoch (7) in der Form:

$$\left|\int_{x_0}^{X} f(z)\, dx\right| \leq M\,|X - x_0|, \qquad \left|\int_{y_0}^{Y} f(z)\, dy\right| \leq M\,|Y - y_0|,$$

zunächst nur dann, wenn sich x resp. y längs C monoton ändert. Trifft dies nicht zu, so wird es nötig, C in derartige Bogen zu zerlegen und die obigen Relationen dann sukzessive auf jeden derartigen Bogen anzuwenden.

Es ist auch

$$(10) \qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = \int_{x_0}^{X} f(z)\, dx + i \int_{y_0}^{Y} f(z)\, dy.$$

Ferner ergibt sich, daß

$$(11) \qquad \int_{z_0}^{Z} \frac{df}{dz}\, dz = f(Z) - f(z_0),$$

$$(12) \qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\, \varphi'(z)\, dz = f(z)\, \varphi(z)\Big|_{z_0}^{Z} - \int_{z_0}^{Z} \varphi(z)\, f'(z)\, dz,$$

$$(13) \qquad \int_{w_0}^{W} \Phi(w)\, dw = \int_{z_0}^{Z} \Phi(w)\, \frac{dw}{dz}\, dz, \qquad w = \varphi(z),$$

wobei auch $\varphi(z)$ und $\Phi(w)$ stetig sind, und die vorkommenden Ableitungen existieren und stetig sein sollen.

Wir führen nur zur Probe den Beweis von (11) aus. Sei τ der Winkel, den die Tangente von C mit der x-Achse einschließt:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\tau, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\tau,$$

wobei s die von z_0 aus gemessene Bogenlänge von C bedeute. Dann ist, wie aus den Entwicklungen von Kap. 6, § 6 hervorgeht,

$$\frac{df}{dz} = e^{-\tau i}\frac{\partial f}{\partial s}; \quad \text{ferner ist} \quad \frac{dz}{ds} = e^{\tau i}.$$

Unter Benutzung von (2) kommt also:

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{df}{dz}\,dz = \int_{s_0}^{S} \frac{\partial f}{\partial s}\,ds = f(Z) - f(z_0),$$

w. z. b. w.

Aufgabe. Um den Beweis des soeben begründeten Satzes zu führen, könnte man, auf formale Umformungen sich stützend, wohl geneigt sein, folgendermaßen vorzugehen. Es ist ja

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wendet man nun Formel (10) auf den vorliegenden Integranden an, so kommt:

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{df(z)}{dz}\,dz = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + i\int_{y_0}^{Y} \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$
$$= [f(Z) - f(z_0)] + [f(Z) - f(z_0)].$$

Dieses Resultat ist aber falsch. Wo steckt der Fehler?

Abhängigkeit von einem Parameter. Sei (A) ein beliebiger Bereich im n-fach ausgedehnten Raume der n reellen Parameter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Sei ferner

$$C: \qquad z = \varphi(t) + i\psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq T,$$

eine reguläre Kurve der z-Ebene. Man fasse den Bereich R ins Auge, dessen Punkte $(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ aus einer willkürlichen Kombination eines t aus dem endlichen Intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$ mit einem Punkte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von (A) entstehen. In diesem Bereiche R soll

eine komplexe Funktion $f(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eindeutig erklärt und stetig sein, d. h. wenn

$$f(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + iv(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

gesetzt wird, sollen die beiden reellen Funktionen u, v in R stetig sein.

Stetigkeitssatz. *Das über C erstreckte bestimmte Integral*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, dz,$$

wobei der Integrand eine in R stetige Funktion ist, stellt eine in (A) stetige Funktion vor.

Die beiden reellen Integrale

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} u\, dx - v\, dy, \qquad \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} v\, dx + u\, dy$$

sind nämlich in (A) stetige Funktionen, vgl. Kap. 3, § 7.

Der Fall komplexer Parameter ist schon mit darin enthalten, da man diese ja nur in ihre reellen und rein imaginären Bestandteile zu zerlegen braucht.

Differentiation unter dem Integralzeichen. *Sind sowohl $f(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ als $\partial f / \partial \alpha_1 = f_{\alpha_1}(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ im Bereiche R stetig, so läßt die Funktion*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, dz$$

eine in (A) stetige Ableitung nach α_1 zu, und zwar ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int_{z_0}^{Z} f(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, dz = \int_{z_0}^{Z} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\, dz. \tag{14}$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Satze von Kap. 3, § 8.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einem Satze, worauf sich die ganze Funktionentheorie gründen läßt.

Hauptsatz. *Sei C eine einfache reguläre Kurve der z-Ebene, die sowohl geschlossen als nicht geschlossen sein darf. Längs C sei ferner eine beliebige reelle oder komplexe stetige Funktion $\varphi(t)$ gegeben,*

wo die komplexe Variabele t einem veränderlichen Punkte von C entspricht. Bildet man dann das über C zu erstreckende Integral:

$$\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},$$

so definiert dasselbe eine Funktion $F(z)$, die sich in jedem der Kurve C nicht angehörigen Punkte z der Ebene analytisch verhält. Im übrigen ist

$$F'(z) = \int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Der Beweis erfolgt sofort aus dem obigen Kriterium für die Differentiation unter dem Integralzeichen. Wir wollen indessen auch einen direkten Beweis geben, welcher jene Kenntnisse nicht voraussetzt.

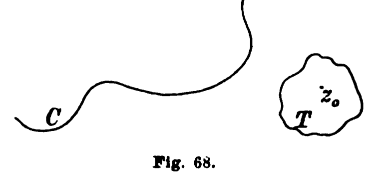


Fig. 68.

Daß das Integral für jeden nicht auf C gelegenen Wert von z konvergiert und somit eine Funktion $F(z)$ eindeutig definiert, sieht man sofort. Es muß also nur noch bewiesen werden, daß diese Funktion

$$F(z) = \int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

eine stetige Ableitung besitzt. Sei z_0 ein willkürlicher Punkt der Ebene, der nur nicht auf C liegt, und man grenze eine Umgebung T von z_0 ab, deren innere und Randpunkte auch alle von den Punkten von C verschieden sind. Die kleinste Entfernung zwischen einem Randpunkte von T und einem Punkte von C bezeichne man mit $\varkappa$. Sei ferner $z_0 + \Delta z$ ein beliebiger zweiter Punkt von T, und man bilde den Differenzenquotienten

$$\frac{F(z_0+\Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} = \int_C \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{t-z_0-\Delta z} - \frac{1}{t-z_0}\right]\varphi(t)\,dt$$
$$= \int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z_0-\Delta z)(t-z_0)}.$$

Indem wir den Integranden vermöge der Relation:

$$\frac{1}{(t-z_0-\Delta z)(t-z_0)} = \frac{1}{(t-z_0)^2} + \frac{\Delta z}{(t-z_0-\Delta z)(t-z_0)^2}$$

umformen, ergibt sich, daß

$$\left|\frac{F(z_0+\Delta z)-F(z_0)}{\Delta z}-\int\limits_C \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z_0)^2}\right| \leqq \Delta z \left|\int\limits_C \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z_0-\Delta z)(t-z_0)^2}\right| \leqq \frac{Ml}{\varkappa^3}|\Delta z|$$

ist, wo M den größten Wert von $|\varphi(t)|$ längs C und l die Länge von C bedeuten. Hieraus folgt, daß

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{F(z_0+\Delta z)-F(z_0)}{\Delta z} = \int\limits_C \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z_0)^2}$$

ist.

Daß die Funktion

$$F'(z) = \int\limits_C \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2}$$

stetig ist, beweist man noch durch eine ähnliche Umformung, die wir dem Leser überlassen.

Aufgabe 1. Man zeige, daß in einem Bereiche, dessen Punkte von den Punkten von C sämtlich um mehr als die positive Größe $\varkappa$ abstehen,

$$F(z) < \frac{Ml}{\varkappa}$$

ist.

Aufgabe 2. Man zeige, daß auch $F'(z)$, $F''(z), \ldots F^{(n)}(z)$ sich in jedem zu C nicht gehörigen Punkte der Ebene analytisch verhalten, und daß ferner

$$F^{(n)}(z) = n! \int\limits_C \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

ist.

§ 2. Der Cauchysche Integralsatz.

Wir wollen jetzt einen grundlegenden Satz kennen lernen, den man Cauchy[1]) verdankt und auf welchem sich die ganze Funktionentheorie aufbauen läßt.

Der Cauchysche Integralsatz. *Sei $f(z)$ in jedem innern und Randpunkte eines Bereiches S stetig und im Innern von S analytisch.*[2])

1) Cauchy, „Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires", Paris 1825; wieder abgedruckt im *Bull. des sciences math.*, Bd. 7 (1874), S. 265 und Bd. 8 (1875), S. 43 und 148. Doch findet man die Keime des Satzes bereits im „Mémoire sur les intégrales définies" vom Jahre 1814; *Oeuvres*, 1. Reihe, Bd. 1, S. 319. Vgl. ferner des Verfassers Bericht über Funktionentheorie, *Enzyklopädie* II B 1, Nr. 3, wo auch mehrere Beweise des Satzes zitiert sind.

2) Wegen der Definition eines Bereiches S vgl. man Kap. 2, § 2, sowie Kap. 5, § 9.



Dann verschwindet das über den ganzen Rand von S in positivem Sinne erstreckte Integral von $f(z)$:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0.$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem analogen Satze der Integralrechnung (vgl. Kap. 4, §§ 2, 3), wonach

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

ist, sofern

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ist. In der Tat ist hier

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C v\,dx + u\,dy.$$

Dabei genügen beide Integrale rechter Hand wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

den Voraussetzungen jenes Satzes.

Es sei noch auf die von Goursat herrührende Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes hingewiesen, welche im Verzicht auf die Stetigkeit der Ableitung $f'(z)$ besteht; man vergleiche § 16. Dort wird auch ein direkter Beweis des verallgemeinerten Integralsatzes gegeben, welcher eine Zerlegung in reelles und rein imaginäres nicht erfordert. Zum Verständnis des Beweises an dieser Stelle ist nur noch der Morerasche Satz von § 5 nötig.

§ 3. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatze.

A) *Das bestimmte Integral einer analytischen Funktion.* Dem Satze B) von Kap. 4, § 3 entspricht hier der folgende

1. Satz. *Sei T ein beliebiges einfach zusammenhängendes Kontinuum* (Kap. 5, § 7) *der z-Ebene und sei $f(z)$ eine in T analytische Funktion. Ist insbesondere $z = \infty$ ein innerer Punkt von T, und hat T außerdem einen im Endlichen gelegenen Randpunkt, so soll*

$$f(\infty) = 0, \quad \lim_{z=\infty} z f(z) = 0$$

sein. Dann hängt das Integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

erstreckt über einen ganz in T gelegenen Integrationsweg Γ, nur von den Integrationsgrenzen, nicht aber von Γ ab. Die hiermit definierte Funktion $F(z)$ verhält sich ebenfalls in T analytisch, und zwar ist

$$F'(z) = f(z).$$

Man erreicht nämlich Anschluß an besagten Satz, indem man

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} u\,dx - v\,dy + i\int_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} v\,dx + u\,dy$$

schreibt und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen heranzieht. Die durch das Integral definierte Funktion $F(z)$ läßt die partiellen Ableitungen zu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u + iv, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -v + iu,$$

und genügt somit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

In Kap. 4, § 3 beschränkten wir uns auf solche einfach zusammenhängende Bereiche, welche entweder ganz im Endlichen liegen oder aber, sofern sie nicht gerade aus der ganzen Ebene bestehen, einen nicht ganz im Endlichen gelegenen Rand haben. Für solche Bereiche kommen die Bedingungen des Satzes:

$$f(\infty) = 0, \qquad \lim_{z=\infty} z f(z) = 0$$

ja nicht in Betracht, und für diese Bereiche ist der Beweis bereits in jenen früheren Entwicklungen enthalten.

So bleibt denn nur noch der eine Fall übrig, daß der Rand ganz im Endlichen liegt. Sei $z = Re^{\Phi i}$ ein Randpunkt, dessen Entfernung R von $z = 0$ am größten ist, und man schneide T längs des Halbstrahls

$$z = re^{\Phi i}, \qquad\qquad R < r,$$

auf. Im neuen Bereiche T' gilt dann der Satz. Des weiteren hat die entsprechende Funktion $F(z)$ an beiden Ufern des Schnittes gleiche Werte, denn diese Werte unterscheiden sich ja voneinander um das Integral

$$\int_{C} f(z)\,dz,$$

wobei C als der Kreis $|z| = r$ genommen werden darf. Nun ist aber der Wert dieses Integrals unabhängig von r, denn im Kreisring $R < r \leqq |z| \leqq r'$ ist $f(z)$ analytisch. Aus dem Cauchyschen Integralsatze folgt daher, daß $\int f(z)dz$, erstreckt über den ganzen Rand des Ringes in positivem Sinne, verschwindet; man vergleiche eine ähnliche Überlegung in Kap. 4, § 4. Andererseits ist

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqq \int_0^{2\pi} r|f(z)|\,d\varphi < \varepsilon \cdot 2\pi,$$

sobald nur r so genommen wird, daß

$$|zf(z)| < \varepsilon, \qquad r \leqq |z|,$$

ist. Demgemäß verschwindet dieses Integral, und $F(z)$ erweist sich somit als eindeutig in T. Infolgedessen ist $F(z)$ ausnahmslos analytisch in T, und die Ergänzung ist hiermit erbracht.

Beispiel 1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$,

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \log z,$$

wobei T aus der ganzen Ebene exklusive der negativen reellen Achse nebst dem Punkte $z = 0$ bestehen soll.

Sei $z' = r'e^{\varphi' i}$ die obere Integrationsgrenze, und man nehme als Integrationsweg a) die Strecke $1 \leqq x \leqq r'$ der reellen Achse, b) den Kreisbogen $r = r'$, $0 \leqq \varphi \leqq \varphi'$. Dann erhält man als Wert des Integrals

$$\int_1^{z'} \frac{dz}{z} = \int_1^{r'} \frac{dx}{x} + \int_0^{\varphi'} i\,d\varphi = \log r' + i\varphi' = \log z'.$$

Beispiel 2. $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$,

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tan} z,$$

wobei T aus der ganzen Ebene exklusive der beiden Teile der imaginären Achse: $x = 0$, $y^2 \geqq 1$, bestehen soll.

Man kann hier von der Zerlegung

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right]$$

ausgehen und dann ans vorhergehende Beispiel anknüpfen.

B) *Das unbestimmte Integral.* Gibt es zwei in einem Bereich T eindeutige analytische Funktionen, welche durch die Relation

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$$

miteinander verknüpft sind, so heißt $F(z)$ das *unbestimmte Integral* der Funktion $f(z)$; in Zeichen

$$F(z) = \int f(z)\,dz.$$

Ist $F_1(z)$ ein besonderes unbestimmtes Integral der Funtion $f(z)$, so ist jede andere Funktion der Schar

$$F(z) = F_1(z) + C, \qquad (C = \text{const.})$$

ebenfalls ein unbestimmtes Integral von $f(z)$. Umgekehrt ist jedes unbestimmte Integral von $f(z)$ in den Funktionen dieser Schar enthalten, vgl. Kap. 6, § 6, 2. Aufgabe.

Zum Existenzbeweis für das unbestimmte Integral dient der vorstehende 1. Satz. Im Anschluß daran können wir nämlich sagen:

2. Satz. *Genügt $f(z)$ denselben Bedingungen wie im 1. Satze, so entspricht $f(z)$ ein unbestimmtes Integral, und zwar wird die Schar solcher Integrale durch die Formel:*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + C$$

dargestellt. In einem mehrfach zusammenhängenden Bereiche T entspricht der Funktion $f(z)$ dagegen als unbestimmtes Integral im allgemeinen eine mehrdeutige Funktion.

Wie im reellen Falle, so besteht auch hier auf Grund der Formel (11), § 1 der

3. Satz. *Ist $F(z)$ ein unbestimmtes Integral der Funktion $f(z)$ in einem Bereiche*[1] *T und erstreckt man das bestimmte Integral von $f(z)$*

1) Wir erinnern an die Definition eines Bereiches T, Kap. 5, § 1, wonach die Randpunkte nicht zum Bereiche gerechnet werden.

über einen beliebigen in T gelegenen Weg Γ, so ist

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0).$$

Hängt T einfach zusammen, so folgt dieser Satz unmittelbar aus dem vorhergehenden. Im anderen Falle kann man die Kurve Γ mit einem schmalen in T gelegenen einfach zusammenhängenden Streifen umgeben und das soeben gewonnene Resultat darauf anwenden. Sollte sich Γ indessen überschneiden, so genügt die Bemerkung, daß der Satz für die einzelnen regulären Kurvenstücke, woraus sich Γ zusammensetzt, bereits feststeht.

Der 3. Satz gilt auch für einen Bereich S, wobei nun $F(z)$ und $f(z)$ stetig am Rande sein sollen. Vgl. Kap. 4, § 3, Satz B).

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß, während wir das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe definierten, das unbestimmte Integral vielmehr als die allgemeine Lösung $w = F(z)$ einer Differentialgleichung:

$$\frac{dw}{dz} = f(z)$$

eingeführt wird.

C) *Berechnung bestimmter reeller Integrale.* Schon vor Cauchy hatte man eine große Anzahl reeller Integrale durch formales Rechnen mit imaginären Größen ausgewertet, allein damals fehlte noch alle strenge Begründung des dazu angewandten Verfahrens. Entbehrten doch die imaginären Zahlen selbst jeder wissenschaftlichen Erklärung, während alle Konvergenzfragen noch in dichtem Nebel verhüllt waren. Das Bestreben, für jene Formeln eine sichere Grundlage zu schaffen, bildete den Ausgangspunkt für Cauchys erste Untersuchungen auf dem Gebiete der Funktionentheorie.[1]) Wir wollen jetzt einige Anwendungen des Integralsatzes zu diesem Behufe kennen lernen.

Beispiel 1: $f(z) = \dfrac{e^{zi}}{z}$.

Das Integral werde über den Rand des in der Figur angedeuteten Gebiets erstreckt. Dann hat man

$$0 = \int_C f(z)\,dz$$

$$= \int_r^R \frac{e^{xi}}{x}\,dx + \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi}\,i\,d\varphi + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x}\,dx + \int_\pi^0 e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi}\,i\,d\varphi.$$

1) Man vergleiche die bereits in § 2 zitierte Abhandlung vom Jahre 1814: „Mémoire sur les intégrales définies."

Zieht man das erste und das dritte Integral im letzten Ausdruck zusammen, so kommt

$$\int_r^R \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{x}\,dx = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Ferner konvergiert beim Grenzübergange $\lim r = 0$ das vierte Integral gegen den limes $-\pi i$. Denn der Integrand ist eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen im abgeschlossenen Bereiche

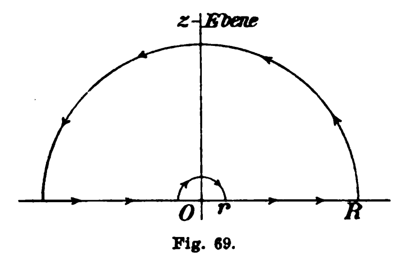


Fig. 69.

$$0 \leqq \varphi \leqq \pi; \qquad 0 \leqq r \leqq h, \qquad h > 0,$$

und infolgedessen stellt das Integral eine stetige Funktion von r im abgeschlossenen Intervalle $0 \leqq r \leqq h$ vor. Demgemäß ist

$$\lim_{r=0}\int_\pi^0 e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi}\, i\, d\varphi = -\pi i.$$

Endlich konvergiert das zweite Integral gegen 0, wenn $R = \infty$ wird. In der Tat ist

$$\left|\int_0^\pi e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi}\, i\, d\varphi\right| \leqq \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi} d\varphi.$$

Nun nimmt zwar hier der Integrand für alle Werte von φ im Intervalle $0 < \varphi < \pi$ gegen 0 ab; das genügt aber bekanntlich nicht, damit das Integral dem Werte 0 zustrebt. Das Integral stellt nämlich den von der Kurve $y = e^{-R\sin\varphi}$ eingegrenzten Flächeninhalt vor, und es handelt sich eben darum zu zeigen, daß diese Größe die Null zum Grenzwerte hat, man vergleiche Kap. 3, § 7, insbesondere Fig. 32. Das beweist man mit Jordan[1]) leicht, wie folgt. Da

$$\sin\varphi \geqq \frac{2\varphi}{\pi}, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist, so wird im selben Intervalle

1) *Cours d'analyse*, Bd. 2, 2. Aufl., S. 286. Die vorstehende Relation gewinnt man sofort, indem man die stetige Funktion

$$f(\varphi) = \sin\varphi/\varphi, \quad 0 < \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi; \quad f(0) = 1,$$

vermöge ihrer Ableitung direkt untersucht. Letztere ist im Intervall $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ negativ, und darum nimmt die Funktion monoton ab.

$$e^{-R\sin\varphi} \leqq e^{-\frac{2R}{\pi}\varphi},$$

und daraus folgt, daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R})$$

ist. Hiermit ist der gewünschte Beweis geliefert.

Als Endresultat dieser Überlegung hat sich nun ergeben, a) daß $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konvergiert, und b) daß beim Grenzübergange $\lim r = 0$, $R = \infty$

$$0 = 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx - \pi i$$

wird. Also ist

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 2. $f(z) = \frac{e^{zi}}{z^2 + k^2}$, k, reell und > 0.

$$\int_{AOB} f(z)\,dz + \int_{BCA} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Nun ist

$$\int_{AOB} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{xi}\,dx}{x^2 + k^2} = 2\int_0^R \frac{\cos x\,dx}{x^2 + k^2},$$

$$\lim_{R=\infty} \int_{AOB} f(z)\,dz = 2\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{x^2 + k^2}$$

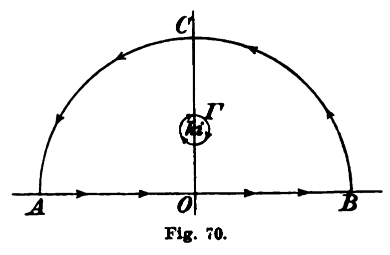


Fig. 70.

Ferner ist

$$\int_{BCA} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi}\, iRe^{\varphi i}\,d\varphi}{R^2 e^{2\varphi i} + k^2},$$

$$\left|\int_{BCA} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{R}{R^2 - k^2}\int_0^\pi e^{-R\sin\varphi}\,d\varphi, \qquad k < R;$$

also ist

$$\lim_{R=\infty} \int_{BCA} f(z)\,dz = 0.$$

Endlich sei längs Γ $z = ki + re^{\varphi i}$; dann wird

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{-k+ire^{\varphi i}}}{2k - ire^{\varphi i}}\,d\varphi,$$

$$\lim_{r=0} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = -\frac{\pi e^{-k}}{k}.$$

Diese Resultate zusammenfassend erhält man nunmehr

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi e^{-k}}{2k}.$$

Das Integral konvergiert noch, wenn $k < 0$ ist, und zwar ist allgemein für alle reellen Werte von k mit der alleinigen Ausnahme von $k = 0$:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi e^{-|k|}}{2|k|}, \qquad (k \neq 0). \tag{2}$$

Beispiel 3. $f(z) = \dfrac{ze^{zi}}{z^2 + k^2}.$

Verfährt man hier genau ebenso, wie beim vorhergehenden Beispiel, so kommt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + k^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-|k|}. \tag{3}$$

Das Integral $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Ein Integral, welches in der Wahrscheinlichkeitslehre auftritt, ist folgendes:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Die nachstehende Auswertung desselben ist besonders einfach und elegant.[1]) Man gehe vom reellen Doppelintegral

$$\iint e^{-x^2-y^2}\,dS$$

aus und erstrecke dies über den ersten Quadranten. Das also ein-

1) Picard, *Traité d'analyse*, Bd. 1, 1. Aufl., S. 104; 2. Aufl., S. 115.

geführte uneigentliche Integral konvergiert, da

$$\lim_{x=\infty,\, y=\infty} r^k e^{-x^2-y^2}, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad k > 2$$

vorhanden ist. Und nun erhält man die gewünschte Formel, indem man dieses Doppelintegral einmal in der Form

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2,$$

dann aber mittels Polarkoordinaten als

$$\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-r^2}\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{4}$$

auswertet. So kommt:

(4) $$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

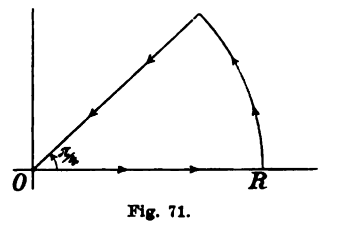


Fig. 71.

Beispiel 4. Wir wenden uns jetzt zur Ermittlung der Fresnelschen Integrale hin. Dazu setze man

$$f(z) = e^{-z^2}$$

und integriere um den in der Figur angedeuteten Bereich. Hierdurch erhält man:

$$\int_0^R e^{-x^2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2[\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi]}\, i R e^{\varphi i} d\varphi + \int_{Re^{\pi i/4}}^0 e^{-\xi^2} d\xi = 0.$$

Beim Grenzübergange $\lim R = \infty$ nähert sich das zweite Integral dem Werte 0, denn es ist

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-[R^2\cos 2\varphi + iR^2 \sin 2\varphi]}\, i R e^{\varphi i} d\varphi\right| \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin\theta} d\theta$$

$$< \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}),$$

wo $2\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ gesetzt ist, und das dritte Integral vermöge der vorhin im 1. Beispiel erhaltenen Relation abgeschätzt ist.

Im dritten Integrale trage man t ein, wo $\xi = \frac{1+i}{\sqrt{2}} t$. Dann wird

$$\int_{Re^{\pi i/4}}^{0} e^{-\xi^2} d\xi = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-t^2 i} dt = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[\int_0^R \cos t^2 dt - i \int_0^R \sin t^2 dt \right].$$

Jetzt bleibt nur noch übrig, den Grenzübergang $R = \infty$ vorzunehmen und darauf Reelles und Imaginäres zu trennen. So erhält man:

$$(5) \qquad \int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Beispiel 5. Man gehe von dem in der Figur angedeuteten Bereiche S und der darin eindeutig erklärten Funktion

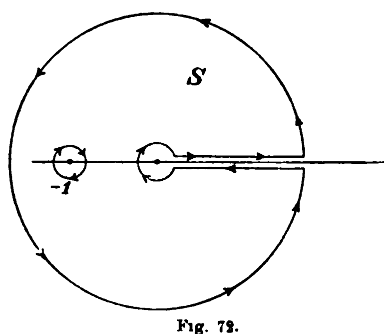


Fig. 72.

$$f(z) = \frac{z^{\mu-1}}{1+z}, \qquad 0 < \mu < 1$$

aus. Dabei soll $f(z)$ auf der oberen Seite der positiven reellen Achse reelle positive Werte erhalten, während die Funktion sonst so erklärt wird, daß sie in S eindeutig und stetig bleibt. Dann leitet man in ähnlicher Weise, wie in den vorhergehenden Fällen, die Formel

$$(6) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}, \qquad 0 < \mu < 1,$$

her. Dieser Satz ist von Wichtigkeit in der Theorie der Gammafunktion.

Weitere Anwendungen des hiermit auseinandergesetzten Verfahrens findet man in den gebräuchlichen Lehrbüchern. So wird z. B. bei Stolz[1]) die Formel:

$$\pi \cot \mu\pi = \lim_{\delta = 0+} \left\{ \int_0^{1-\delta} \frac{x^{\mu-1}}{1-x} dx - \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{x^{\mu-1}}{1-x} dx \right\}$$

hergeleitet, und ferner bei Jordan[2]):

1) *Differential- und Integralrechnung,* Bd. 2, S. 238.

2) *Cours d'analyse,* Bd. 2, 2. Aufl., S. 287. Diese Auswertung rührt von Cauchy her, 1814, a. a. O.

(7) $$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2},$$

indem die Funktion e^{-z^2} um das Rechteck $x = R, -R$; $y = 0, a$ integriert wird, worauf man dann R ins Unendliche wachsen läßt. Vergleiche auch Goursat, *Cours d'analyse*, Bd. 2. Kap. 14, woselbst sich eine große Anzahl von Aufgaben findet.

Alle die genannten Autoren beginnen mit der Betrachtung der Integrale[1])

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{G(x)}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{G(x)}e^{xi}dx,$$

wo $F(x)$, $G(x)$ Polynome sind und $G(x)$ keine reellen Wurzeln hat, und werten diese Integrale mittels Integration durch komplexes Gebiet aus.

Im übrigen werde noch auf den Paragraphen betreffend das Residuum (§ 11) hingewiesen.

§ 4. Die Cauchysche Integralformel.

Aus dem Cauchyschen Integralsatze ergibt sich eine Hauptformel wodurch der Wert einer analytischen Funktion *im Innern* eines Bereiches mittels ihrer Werte *am Rande* desselben ausgedrückt wird.

Die Cauchysche Integralformel.[2]) *Sei $f(z)$ in jedem innern und Randpunkte eines Bereiches S stetig und im Innern von S analytisch.*[3]) *Dann wird $f(z)$ in einem beliebigen inneren Punkte z von S durch die Formel dargestellt:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

wobei die Integration über sämtliche Randkurven in positiver Richtung zu erstrecken ist.

Die Funktion $f(t)/(t-z)$, als Funktion von t allein betrachtet, wird unstetig im Punkte $t = z$. Umgibt man diesen Punkt mit einem

1) Bei Jordan ist die Formulierung ein wenig anders.

2) Cauchy, Turiner Abhandlung vom Jahre 1831, sowie *Exercices d'analyse*, Bd. 2 (1841), S. 52. Man vergleiche ferner die Zitate unter § 13.

3) Man vergleiche Anm. 2) unter § 2.

kleinen Kreise γ: $|t - z| = \varrho$, und hebt man die inneren Punkte dieses Kreises aus S fort, so entsteht ein neuer Bereich, auf welchen der Cauchysche Integralsatz, für die Funktion $f(t)/(t-z)$ ausgesprochen, in Anwendung gebracht werden kann. Hiernach ist

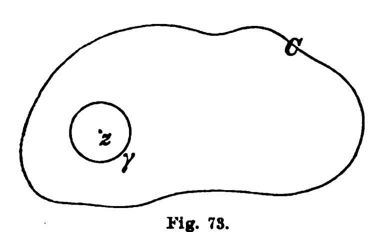


Fig. 73.

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z} = 0.$$

Wir nehmen jetzt den Grenzübergang $\lim \varrho = 0$ vor und sehen zu, was dabei aus dieser Relation wird. Das erste Integral hängt überhaupt nicht von ϱ ab. Im zweiten Integral setze man

$$t - z = \varrho e^{\varphi i}, \quad \text{also} \quad dt = i\varrho e^{\varphi i}\,d\varphi.$$

So wird

$$\int\limits_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z} = -i\int\limits_0^{2\pi} f(z + \varrho e^{\varphi i})\,d\varphi.$$

Dieses letzte Integral ist aber nach § 1 eine stetige Funktion von ϱ in der Nähe der Stelle $\varrho = 0$: $0 \leqq \varrho \leqq h$, $h > 0$. Darum ist

$$\lim_{\varrho=0}\int\limits_0^{2\pi} f(z + \varrho e^{\varphi i})\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi = 2\pi f(z).$$

Als Endresultat erhalten wir also:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die Cauchysche Integralformel ist in der Funktionentheorie das Analogon der Formel der Potentialtheorie:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C U(t)\,\frac{\partial G}{\partial n}\,dt,$$

wo u eine in S eindeutige harmonische Funktion, $U(t)$ den Wert von $u(x, y)$ am Rande C, und G die Greensche Funktion des Bereiches S bedeuten; vergleiche das Kapitel über das logarithmische Potential, Kap. 13, § 4.

Die Cauchysche Integralformel subsumiert sich als ein spezieller Fall unter den Hauptsatz von § 1, wenn man

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{2\pi i}, \qquad F(z) = f(z)$$

setzt und die Kurve C als geschlossen annimmt. Man darf aber nicht umgekehrt schließen, daß sich die durch jene Formel:

$$F(z) = \int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z},$$

definierte Funktion von z, welche ja im ganzen Innern der geschlossenen Kurve C eindeutig definiert und analytisch ist, den Randwerten $2\pi i \varphi(t)$ stetig anschließt. Bei einer willkürlichen Annahme der Funktion $\varphi(t)$ längs C wird dies im allgemeinen nicht der Fall sein.[1])

Ein einfaches Beispiel zum Belege der letzten Behauptung verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Hrn. Van Vleck. Setzt man nämlich in der Formel jenes Hauptsatzes

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{t}$$

und nimmt man als Kurve C den Einheitskreis, so kommt:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dt}{t(t - z)} = \frac{1}{2\pi i z}\left[\int_C \frac{dt}{t - z} - \int_C \frac{dt}{t}\right] = 0.$$

Hier sind die Werte von $\varphi(t)$ solche, welche eine in jedem Randpunkte des Bereiches S: $|z| \leqq 1$ analytische Funktion annimmt. Auch nimmt die Funktion $F(z)$ Randwerte an. Letztere fallen aber mit den Werten von $\varphi(t)$ am Rande nicht zusammen, und stehen auch in keiner ersichtlichen Beziehung zu diesen.

Ein zweites derartiges Beispiel entnimmt man einer Bemerkung von Hermite, der darauf hinweist, daß das Cauchysche Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t - z}$$

in jedem außerhalb des Bereiches S gelegenen Punkte z den Wert 0 hat. Denn für einen solchen Wert von z ist ja

$$\frac{f(t)}{t - z},$$

1) Hierüber besteht eine Untersuchung von Morera, *Rendiconti R. Istituto Lombardo*, 2. Reihe, Bd. 22 (1889). Man vergleiche auch das Kapitel über das logarithmische Potential.

als Funktion von t betrachtet, im ganzen Bereiche S stetig und in jedem inneren Punkte von S analytisch. Darum verschwindet das Integral nach dem Cauchyschen Integralsatze.

§ 5. Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel.

Nach der in Kap. 6, § 5 gegebenen Definition einer analytischen Funktion $f(z)$ ist nur die Existenz und Stetigkeit bzw. die bloße Existenz der Ableitung $f(z)$ vorausgesetzt worden. Die Analogie mit dem Falle einer reellen Funktion eines reellen Arguments läßt hier nicht vermuten, daß höhere Ableitungen im allgemeinen überhaupt vorhanden sein werden. Um so bemerkenswerter ist daher die Aussage des folgenden Satzes.

1. Satz. *Verhält sich $f(z)$ in einem beliebigen Bereiche T analytisch, so besitzt $f(z)$ dort stetige Ableitungen aller Ordnungen, welche sich also auch in T analytisch verhalten.*

Hiernach existieren ebenfalls die höheren partiellen Ableitungen des reellen, sowie des rein imaginären Bestandteils von $f(z)$, und diese Funktionen, welche sämtlich stetig sind, genügen außerdem der Laplaceschen Differentialgleichung:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Der Beweis dieses Satzes ist in den Entwicklungen von §§ 1, 4 mit enthalten. Sei nämlich z_0 ein beliebiger innerer Punkt von T, welchen man mit einer kleinen geschlossenen Kurve, etwa mit einem ganz innerhalb T gelegenen Kreise C umgebe. Für den also eingegrenzten Bereich gilt dann nach jenen Paragraphen die Darstellung:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2},$$

woraus man leicht erkennt, daß sich die Funktion $f'(z)$ im Punkte $z = z_0$ analytisch verhält; vgl. § 1, Aufgabe 2. Jetzt braucht man nur noch den Schluß von n auf $n+1$ heranzuziehen, um den Beweis allgemein zu liefern. Dabei wird die n^{te} Ableitung in der Umgebung des Punktes z_0 durch die Formel gegeben:

$$(1)\qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} = \frac{1}{i^k}\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-k}\partial y^k} + \frac{1}{i^{k-1}}\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-k}\partial y^k}.$$

Da nunmehr die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ablei-

tungen zweiter Ordnung feststeht, so darf man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

bzw. nach x und y differenzieren:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Durch Addition letzterer Gleichungen erhält man

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

mit einem ähnlichen Resultat für v.

Umgekehrt führt jede Lösung u der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ zu einer analytischen Funktion $u + vi$ von $x + yi$. In der Tat sei T ein einfach zusammenhängender, den Punkt $z = \infty$ im Innern nicht enthaltender Bereich, worin eine Lösung u dieser Gleichung betrachtet wird. Definiert man dann v durch die Formel:

$$v = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + C,$$

wobei der Integrationsweg beliebig in T verläuft, so genügen die in T eindeutigen Funktionen u, v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Hängt T dagegen mehrfach zusammen, so sei P ein willkürlicher innerer Punkt von T. In einer geeigneten Umgebung von P wird dann ein Zweig von v eindeutig sein. Hiermit erreicht man Anschluß an das soeben erhaltene Resultat, und der Beweis ist also fertig.

Aus der Cauchyschen Integralformel leitet man ferner eine wichtige Abschätzung für $|f(z)|$, sowie für $|f^{(n)}(z)|$ im Innern eines Bereiches S ab. Sei nämlich M der größte Wert von $|f(z)|$ auf dem Rande von S, z_0 ein innerer Punkt von S, und ϱ die kleinste Entfernung des Punktes z_0 vom Rande, also

$$|t - z_0| \geqq \varrho.$$

Dann ist

(2) $$|f(z_0)| < \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|f(t)|\,|dt|}{|t - z_0|} \leqq \frac{Ml}{2\pi\varrho},$$

wo l die Gesamtlänge des Randes bedeutet. Im Anschluß an Formel (1)

erhält man auch eine analoge Abschätzung für $f^{(n)}(z_0)$. In der Praxis haben diese Abschätzungen den meisten Wert für die Fläche eines um den Punkt z_0 gelegten Kreises. Wir gelangen so zu dem

2. Satz. Cauchys Abschätzung. *Ist $f(z)$ im Kreise $z - z_0 < r$ analytisch und am Rande desselben stetig, so ist*

$$(3) \qquad f(z_0) \leqq M, \qquad f^{(n)}(z_0) \leqq n!\, M r^{-n},$$

wo M den größten Wert von $f(z)$ auf dem Rande des Kreises bedeutet.

Setzt man nämlich in (1)

$$t - z_0 = re^{\varphi i},$$

so kommt

$$f^{(n)}(z_0) \leqq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)\, d\varphi}{r^n} \leqq n!\, M r^{-n}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Hieraus ergibt sich ferner der Satz:

Zusatz. *Unter den nämlichen Bedingungen nimmt $f(z)$ seinen größten Wert am Rande des Kreises an.*

Der Beweis ist der von Bôcher gegebenen zweiten Herleitung des Poissonschen Integrals, Kap. 13, § 4 nachgebildet. Sei z_1 ein beliebiger innerer Punkt des Kreises, und man führe diesen Kreis durch eine lineare Transformation, $z = L(z')$, in einen zweiten Kreis über, derart, daß z_1 in dem Mittelpunkt $z' = z_0'$ des letzteren zu liegen kommt. Dadurch wird $f(z)$ in eine Funktion $F(z')$ verwandelt, welche im neuen Kreise denselben Bedingungen genügt, wie $f(z)$ im ursprünglichen, und außerdem stellt M wieder den absolut genommen größten Randwert dar. Dem vorstehenden Satze gemäß muß also

$$F(z_0') \leqq M$$

sein, mithin ist auch

$$f(z_1) \leqq M, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

3. Satz. Der Liouvillesche Satz. *Ist die Funktion $f(z)$ für alle Werte von z analytisch und bleibt $f(z)$ außerdem in der ganzen z-Ebene endlich:*

$$f(z) < G,$$

wo G eine Konstante bedeutet, so ist $f(z)$ eine Konstante.

Sei z ein beliebiger Wert des Arguments, und man stelle $f(z)$ mittels der Cauchyschen Integralformel dar, indem man als Bereich S

einen großen, den genannten Punkt im Innern enthaltenden Kreis $|z| \leqq R$ nimmt. Dann ist

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right] dt$$

$$= \frac{z}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t(t-z)}$$

$$= \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{\varphi i})\,d\varphi}{Re^{\varphi i} - z}.$$

Also hat man, sobald nur $R > 2|z|$ ist:

$$|f(z) - f(0)| < \frac{|z|}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{G\,d\varphi}{R/2} = \frac{2|z|\,G}{R}.$$

Durch passende Wahl von R kann man den letzten Ausdruck beliebig klein machen. Das erste Glied dieser Relation hängt aber gar nicht von R ab. Hieraus folgt, daß

$$f(z) = f(0)$$

ist.

Aufgabe. Man beweise den Satz mit Hilfe von (3), $n = 1$.

Aus diesem Satze ergibt sich auch ein einfacher Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra.* Sei

$$G(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0, \qquad n > 0,$$

ein beliebiges Polynom. Dann hat die Gleichung $G(z) = 0$ mindestens eine Wurzel. Wäre dem nämlich nicht so, so würde die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{G(z)}$$

allen Bedingungen des Satzes genügen und wäre daher eine Konstante, und zwar die Null, da

$$\lim_{z=\infty} \frac{1}{G(z)} = 0$$

ist.

Wir wenden uns jetzt zu einem von Morera[1]) herrührenden Theorem, welches als die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes angesehen werden kann.

---

1) Morera, *Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, Rendiconti,* 2. Reihe, Bd. 19 (1886), S. 304.

4. **Satz.** Satz von Morera. *Ist $f(z)$ in einem Bereich T stetig und verschwindet das Integral $\int f(z)\,dz$, erstreckt über eine beliebige geschlossene Kurve C von T, welche nur Punkte von T umfaßt:*

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$

so verhält sich $f(z)$ in T analytisch.

Allgemeiner[1]) *genügt die Voraussetzung, daß $f(z)$ in T stetig ist, und daß das Integral verschwindet, wenn es über den Rand eines beliebigen Rechtecks erstreckt wird, dessen Seiten mit der reellen resp. mit der rein imaginären Achse (oder mit irgend zwei anderen festen, senkrecht aufeinander stehenden Geraden der Zahlenebene) parallel verlaufen, und welches außerdem weder im Innern noch am Rande einen Randpunkt von T enthält. Man braucht sogar nur solche Rechtecke in Betracht zu ziehen, deren Seitenlänge eine beliebig kleine vorgegebene positive Größe nicht überschreitet.*

Sei $z = z_0 = x_0 + iy_0$ ein beliebiger innerer Punkt von T. Man umgebe z_0 mit einem Quadrate,

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < h,$$

dessen innere und Randpunkte ausnahmslos dem Bereich T zugehören, und verbinde eine bestimmte Ecke $a + bi$ mit einem willkürlichen Punkte $\zeta = \xi + \eta i$ desselben durch den in der Figur angedeuteten Weg L (man vergleiche auch Kap. 4, § 3, Fig. 34, Typus I, sowie Fig. 35). Führt man jetzt das Integral über diesen Weg, so erhält man dadurch eine im Quadrate eindeutig erklärte Funktion

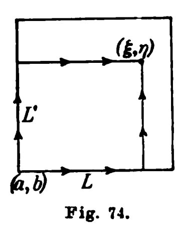


Fig. 74.

$$F(\zeta) = \int_L f(z)\,dz = \int_a^{\xi} f(x + ib)\,dx + i\int_b^{\eta} f(\xi + iy)\,dy.$$

Diese Funktion läßt offenbar eine partielle Ableitung nach η zu, und zwar ist

$$\frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial \eta} = f(\xi + i\eta) = f(\zeta).$$

1) Der Anstoß zu der allgemeineren Formulierung des Satzes wurde durch einen ähnlichen Gedanken von Herrn Bôcher in seiner Behandlung des logarithmischen Potentials gegeben, *Proceedings Amer. Acad. Arts and Sciences,* Bd. 41 (1906) S. 577.

Andererseits kann man, den Voraussetzungen des Satzes gemäß, die Funktion $F(\zeta)$ durch das über L' erstreckte Integral darstellen:

$$F(\zeta) = \int\limits_{L'} f(z)\,dz = i\int\limits_b^\eta f(a + iy)\,dy + \int\limits_a^\xi f(x + i\eta)\,dx.$$

Hiernach findet man:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = f(\xi + i\eta).$$

Es hat sich somit ergeben, daß die beiden reellen Funktionen $U(x, y)$ und $V(x, y)$, wo

$$F(z) = U(x, y) + i\,V(x, y)$$

gesetzt ist, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung zulassen, welche außerdem den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. Infolgedessen verhält sich $F(z)$, und darum auch $f(z) = F'(z)$ im Punkte z_0 analytisch.

Geht man endlich von der in der Klammer ausgesprochenen Voraussetzung aus, so wird man zunächst eine neue Veränderliche z' vermöge der Relation

$$z = z' e^{\alpha i}$$

einführen. Durch passende Wahl von α wird dann dieser Fall auf den soeben besprochenen direkt zurückgeführt.

Auf Grund des Moreraschen Satzes gestaltet sich der Beweis der Weierstraßschen Reihensätze außerordentlich einfach und elegant.

5. Satz. Weierstraßscher Reihensatz.[1]) *Sei*

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen, deren alle sich in einem Bereich T analytisch verhalten. Konvergiert sie dann in jedem in T gelegenen Bereiche S gleichmäßig, so stellt sie eine in T analytische Funktion vor.

Des weiteren läßt sich die Reihe gliedweise differentiieren:

$$f'(z) = u_1'(z) + u_2'(z) + \cdots.$$

Diese letztere Reihe konvergiert ebenfalls gleichmäßig in jedem der ge-

1) Weierstraß, „Zur Theorie der Potenzreihen“, *Werke*, Bd. 1, S. 67. Diese Abhandlung trägt das Datum 1841, wurde aber zu der Zeit nicht veröffentlicht. In den *Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880, S. 780 = *Werke*, Bd. 2, S. 205 hat Weierstraß den Satz ausgesprochen und bewiesen.

nannten Gebiete, und die vorgelegte Reihe gestattet somit eine unbegrenzte Wiederholung der gliedweisen Differentiation.

Vor allem bemerken wir, daß eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger komplexer Funktionen eine stetige Funktion vorstellt und gliedweise integrierbar ist.[1]) Darnach erweist sich die vorliegende Funktion $f(z)$ zunächst als stetig. Bildet man jetzt die Reihe

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u_1(z)\,dz + \int\limits_C u_2(z)\,dz + \cdots,$$

so verschwindet jedes Integral rechter Hand nach dem Cauchyschen Integralsatze. Daher verschwindet auch das linker Hand stehende Integral, und $f(z)$ verhält sich somit zufolge des Moreraschen Satzes in T analytisch.

Um noch die gliedweise Differentiierbarkeit der Reihe festzustellen, setze man die Reihe an:

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\frac{f(t)}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\frac{u_1(t)}{(t-z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\frac{u_2(t)}{(t-z)^2} + \cdots,$$

wo t einen Randpunkt, z einen innern Punkt von dem durch C begrenzten Bereich S bedeutet. Dann überzeugt man sich leicht, daß auch diese Reihe längs C gleichmäßig konvergiert. Hierbei its z als ein fester Punkt anzusehen. Diese Reihe wollen wir nun über den ganzen Rand von S in positiver Richtung integrieren:

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_1(t)\,dt}{(t-z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_2(t)\,dt}{(t-z)^2} + \cdots.$$

Die Integrale stellen aber nach (1) bzw. die Funktionen $f'(z)$, $u_1'(z)$, $u_2'(z), \ldots$ vor, und hiermit ist die gliedweise Differentiation begründet.[2])

1) Die Definition der gleichmäßigen Konvergenz, sowie der Beweis der hier angeführten Sätze überträgt sich vom reellen auf das komplexe Gebiet ohne formale Modifikation.

2) Der hier benutzten Beweismethode hätte man sich auch schon zur Begründung des ersten Teils des Satzes bedienen können, wobei dann im Nenner $t-z$ an Stelle von $(t-z)^2$ treten müßte. Man hüte sich aber davor, gleich aus der Relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_1(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{u_2(t)\,dt}{t-z} + \cdots$$

zu schließen, daß das linker Hand auftretende Integral zufolge der Cauchyschen Integralformel die Funktion $f(z)$ vorstelle. Man kann nämlich zunächst bloß folgern, daß dieses Integral nach dem Hauptsatz von § 1 eine innerhalb S analytische Funktion $F(z)$ definiert, deren Randwerte jedoch, falls überhaupt welche

Behufs der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe der Ableitungen sei S' ein abgeschlossener, innerhalb C gelegener Bereich. Dann weist man ohne Schwierigkeit nach, daß die Reihe (4) gleichmäßig konvergiert, wenn die unabhängigen Variabelen z und t auf S' bzw. C beschränkt werden. Infolgedessen konvergiert die Reihe (5) gleichmäßig in S' und daraus erkennt man die Richtigkeit des Satzes.

Andere Formulierung des 5. Satzes. *Sei*

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen, deren alle in jedem innern und Randpunkte eines Bereiches S stetig und im Innern desselben analytisch sind. Konvergiert sie dann am Rande C von S gleichmäßig, so stellt sie eine innerhalb S analytische Funktion $f(z)$ vor.

Des weiteren läßt sich die Reihe gliedweise differentiieren:

$$f'(z) = u_1'(z) + u_2'(z) \cdots .$$

Diese letzte Reihe konvergiert ebenfalls gleichmäßig in jedem abgeschlossenen, innerhalb S gelegenen Bereiche S', und die vorgelegte Reihe gestattet somit eine unbegrenzte Wiederholung der gliedweisen Differentiation.

Der Beweis erfolgt nach der in der Anmerkung besprochenen Methode.[1]) Aus dieser Form des Satzes leitet man auch die zuerst betrachtete Form ohne weiteres her.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß der vorstehende Satz folgender allgemeineren Fassung fähig ist.

6. Satz. *Allgemeiner sei $s(z, \alpha)$ für unendlich viele Werte von α eine in einem Bereich T analytische Funktion. Beim Grenzübergange* $\lim \alpha = \bar{\alpha}$ *möge $s(z, \alpha)$ ferner einem limes zustreben:*

$$\lim_{\alpha = \bar{\alpha}} s(z, \alpha) = f(z),$$

---

vorhanden sein sollten, nicht notwendig mit dem Werte der Funktion $f(t)$ am Rande zusammenfallen. Der Beweis fährt nun so fort: Die rechts stehenden Integrale stellen allerdings laut der Cauchyschen Integralformel bzw. die Glieder der vorgelegten Reihe vor. Daher stimmt die soeben als innerhalb S analytisch erkannte Funktion $F(z)$ dort mit $f(z)$ überein. Jetzt ist man erst im Besitze aller Angaben, die zur Identifizierung des betreffenden Integrals mit der Cauchyschen Integralformel nötig sind.

Wie man sieht, ist der auf dem Moreraschen Satze fußende Beweis doch bedeutend einfacher.

1) Dieser Satz subsumiert sich übrigens direkt unter den 5. Satz auf Grund der 2. Aufgabe unter dem 3. Satze Kap. 13, § 3.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] für den speziellen Fall [illegible] man nämlich

[illegible]

[illegible] für alle [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Wir schließen diesen Paragraphen mit einem Satze, welcher für die Theorie der bestimmten Integrale (im engeren Sinne des Wortes) von grundlegender Bedeutung ist.

7. Satz. *Sei $f(t, z)$ eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Variabelen t und z, wo t auf einer regulären Kurve C und z in einem Bereiche T liegt. Erteilt man t einen beliebigen Wert, so soll sich $f(t, z)$ ferner, als Funktion von z allein betrachtet, in T analytisch verhalten. Dann definiert das Integral*

$$\int\limits_C f(t, z)\,dt$$

eine in T analytische Funktion $F(z)$. Im übrigen ist

$$\int\limits_\Gamma F(z)\,dz = \int\limits_C dt \int\limits_\Gamma f(t, z)\,dz,$$

wo Γ eine reguläre innerhalb T gelegene Kurve bedeutet, sowie

$$F'(z) = \int\limits_C \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,dt, \qquad F^{(n)}(z) = \int\limits_C \frac{\partial^n f}{\partial z^n}\,dt.$$

Indem man das Integral in seine reellen und rein imaginären Bestandteile zerfällt, erkennt man zunächst die Stetigkeit der durch dasselbe definierten Funktion $F(z)$. Sei Γ_1 eine reguläre geschlossene Kurve des Bereiches T, welche außerdem nur innere Punkte von T umfaßt. Dann erkennt man wieder durch Zerlegung in Reelles und Imaginäres, unter Einführung der Bogenlänge als Integrationsvariabele, daß

$$\int\limits_{\Gamma_1} F(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_1} dz \int\limits_C f(t, z)\,dt = \int\limits_C dt \int\limits_{\Gamma_1} f(t, z)\,dz = 0$$

ist, und hieraus folgt vermöge des Moreraschen Satzes, daß $F(z)$ sich in T analytisch verhält.

Setzt man nun zunächst die Stetigkeit der Ableitung $\partial f/\partial z = f_z(t, z)$, als Funktion der unabhängigen Veränderlichen t, z betrachtet, voraus, so beweist man den zweiten Teil des Satzes, indem man das über einen in T gelegenen Weg erstreckte bestimmte Integral

$$\int\limits_{z_0}^{z} dz \int\limits_C f_z(t, z)\,dt = \int\limits_C dt \int\limits_{z_0}^{z} f_z(t, z)\,dz = F(z) - F(z_0)$$

bildet und dasselbe dann nach z differentiiert.

Wir können aber noch nachweisen, daß $f_z(t, z)$ immer stetig ist, womit denn obigem Beweise allgemeine Gültigkeit zukommt. Diese Behauptung sprechen wir als einen besonderen Satz aus.

8. Satz.[1]) *Genügt $f(t, z)$ denselben Bedingungen, wie im* 7. Satze, *so wird auch die Funktion $\partial f/\partial z = f_z(t, z)$ stetig von t, z abhängen und sich für jeden festen Wert von t analytisch in T verhalten.*

Dasselbe gilt dann allgemein für jede der Funktionen $\partial^n f/\partial z^n$, $n = 1, 2, \cdots$.

Sei $z = z'$ ein willkürlicher Punkt von T, und man betrachte eine Umgebung S_1 von z', welche nebst Rande Γ_1 innerhalb T liegt. Dann läßt sich $f_z(t, z)$ innerhalb S_1 nach Formel (1), $n = 1$, dieses Paragraphen, wie folgt, ausdrücken:

$$f_z(t, z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t, \zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Da nun der Integrand, als Funktion der unabhängigen Veränderlichen t auf C, ζ auf Γ_1 und z in einem abgeschlossenen, innerhalb Γ_1 gelegenen Bereiche $\overline{S}_1$ betrachtet, stetig ist, so wird das Integral auch eine stetige Funktion von t auf C und z in $\overline{S}_1$ vorstellen, womit denn der Satz bewiesen ist.

Aufgabe 1. Genügt $f(t, z)$ denselben Bedingungen, wie im 7. Satz, wobei nun T außerdem einfach zusammenhängen und den Punkt $z = \infty$ nicht im Innern umfassen soll, so genügt die Funktion

$$F(t, z) = \int\limits_a^z f(t, z)\, dz$$

ebenfalls jenen Bedingungen.

Aufgabe 2. Genügt $f(t, z)$ denselben Bedingungen wie im 7. Satze; existiert ferner $\partial f/\partial t = f_t(t, z)$, und ist diese Funktion stetig für alle in Betracht kommenden Wertepaare (t, z), so ist $f_t(t, z)$ für jeden festen Wert von t eine in T analytische Funktion von z.

§ 6. Fortsetzung; isolierte singuläre Punkte.

Die Funktion $f(z)$ sei an jeder Stelle der Umgebung eines Punktes $z = a$ mit Ausnahme dieses Punktes selbst analytisch.[2]) Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich $f(z)$ in dieser Umgebung verhalten kann.

1) Bôcher, *Annals of Mathematics,* 2. Reihe, Bd. 12 (1910), S. 20.

2) Wir erinnern wiederum an die Vereinbarung, wonach unsere Funktionen als eindeutig angesehen werden sollen, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt wird.

a) *Pole.* Vor allem kann $f(z)$ im Punkte a unendlich werden:

$$\lim_{z=a} f(z) = \infty.$$

Die Funktion muß dann beim Herannahen des Punktes z an den Punkt a *längs eines jeglichen Weges* ins Unbegrenzte wachsen. In diesem Falle heißt a ein *Pol* der Funktion.[1])

Beispiel.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

wo m eine positive ganze Zahl und $\varphi(z)$ eine im Punkte $z = a$ analytische, dort nicht verschwindende Funktion von z ist.

b) *Hebbare Unstetigkeiten.* Verlangen wir jetzt, daß $f(z)$ in der Nähe von a endlich bleibe:

$$|f(z)| < G, \qquad 0 < |z-a| < h.$$

Im Falle einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen wäre mit dieser Voraussetzung noch nicht viel getan. Man denke z. B. an die Funktion

$$f(x) = \sin\frac{1}{x},$$

sowie

$$f(x) = \frac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}},$$

welche beide in der Nähe des Punktes $x = 0$ endlich bleiben und dennoch dort eine Unstetigkeit aufweisen; vgl. Kap. 1, §§ 2, 3, insbesondere Figuren 5 und 7.

Wesentlich anders verhält sich aber die Sache bei einer analytischen Funktion eines komplexen Arguments. Es ist ja klar, daß auch hier eine Art von Unstetigkeiten vorkommen kann, wofür die folgenden Beispiele typisch sind.

a) Sei

$$f(z) = (z-a)^2, \qquad z \neq a; \qquad f(a) = 1.$$

b) Sei

$$f(z) = \frac{z^2-a^2}{z-a}, \qquad z \neq a.$$

Eine derartige Unstetigkeit, welche also durch Abänderung des Funktionswertes in einem einzigen Punkte resp. durch eine geeignete

1) Nach Weierstraß eine *außerwesentliche singuläre Stelle.*

ergänzende Erklärung der Funktion in diesem Punkte gehoben werden kann, heißt nach Riemann eine *hebbare* Unstetigkeit. Und nun stellt sich das merkwürdige Resultat heraus, daß hier überhaupt keine weitere Möglichkeit vorhanden ist. Das wollen wir noch in folgenden Satz zusammenfassen.

9. Satz. Riemannscher Satz.[1]) *Ist $f(z)$ in der Umgebung des Punktes $z = a$, nur von diesem Punkte selbst abgesehen, analytisch und bleibt $f(z)$ in diesem Bereiche endlich:*

$$|f(z)| < G, \qquad 0 < |z - a| < h,$$

so nähert sich $f(z)$ einem Grenzwert A, wenn z gegen a konvergiert.

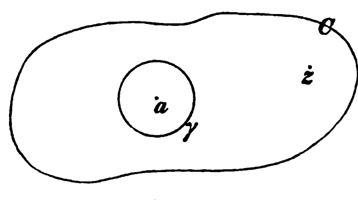


Fig. 75.

Legt man $f(z)$ ferner im Punkte a den Wert A bei: $f(a) = A$, so wird $f(z)$ dadurch auch in diesem Punkte analytisch.

M. a. W. kann die Funktion $f(z)$ unter den Bedingungen des Satzes höchstens eine hebbare Unstetigkeit im Punkte a aufweisen.

Um den Beweis zu führen, stellen wir die Funktion $f(z)$ in der Umgebung von a vermöge eines Integrals dar. Sei C eine geschlossene, den Punkt a im Inneren enthaltende einfache reguläre Kurve der betreffenden Umgebung von a, und $z \neq a$ ein beliebiger innerer Punkt von C, welchen, einmal gewählt, wir nun festhalten wollen. Man lege um a als Mittelpunkt einen Kreis γ vom Radius r und bestimme r so, daß sowohl C als z außerhalb γ liegen. In dem von C und γ also abgegrenzten ringförmigen Gebiete gibt dann die Cauchysche Integralformel folgenden Ausdruck für die Funktion:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Wir wollen zeigen, daß das zweite Integral rechter Hand verschwindet. In der Tat hängt das erste Integral, sowie die Funktion $f(z)$ linker Hand, nicht von r ab, daher gilt dasselbe auch vom genannten Integral. Da nun längs γ

$$t - a = re^{\varphi i}, \qquad |f(t)| < G, \qquad |t - z| \geqq |z - a| - r > 0$$

1) Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe*, § 12, Inauguraldissertation, Göttingen, 1851; *Werke*, S. 23.

ist, so folgt:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}\right| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{G\cdot 2\pi r}{|z-a|-r}.$$

Der letzte Ausdruck kann durch passende Wahl von r beliebig klein gemacht werden, woraus sich denn die Richtigkeit der Behauptung ergibt. Hiermit haben wir die gewünschte Darstellung gewonnen:

$$(2)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Die Formel gilt für jeden inneren Punkt von C mit alleiniger Ausnahme von $z = a$.

Nun knüpfen wir an den Hauptsatz von § 1 an. Daraus erhellt, daß das Integral eine auch im Punkte $z = a$ analytische Funktion vorstellt. Mit dieser Funktion stimmt aber $f(z)$ in allen inneren Punkten $z \neq a$ von C überein. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Der Leser beachte wohl, daß auch der letzte Teil des Satzes eine wichtige Eigenschaft analytischer Funktionen im komplexen Gebiete konstatiert. Im reellen Falle ist beispielsweise die Funktion

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0; \qquad f(0) = 0$$

für alle Werte von x stetig, und diese Funktion läßt außerdem im allgemeinen eine stetige Ableitung zu, nur der Punkt $x = 0$ bildet eine Ausnahme. Warum sollte es denn nicht auch Funktionen eines komplexen Arguments geben, die in einem Bereiche S ausnahmslos stetig sind und, von einem einzigen Punkte $z = a$ abgesehen, mit einer stetigen Ableitung versehen sind?[1])

Aufgabe. Die Umgebung des Punktes $z = a$ möge ein-eindeutig auf einen endlichen Bereich der w-Ebene bezogen sein; außerdem soll die Abbildung der Umgebungen zweier zugehöriger Punkte $z = z'$, $w = w'$, höchstens mit Ausnahme des Punktes $z = a$, konform sein.

1) Das Übersehen dieser Möglichkeit hat auch früher zu einem falschen Beweise des obigen Satzes geführt, vgl. Durège, *Theorie der Funktionen*, 2. Aufl., 1873, S. 112. Dieser falsche Beweis ist dann von späteren Autoren vielfach reproduziert worden. Der hier gegebene Beweis findet sich in der ersten Auflage des Durègeschen Werkes und dürfte wohl von Riemann herstammen, welcher aber den Satz a. a. O. auf andere Weise bewies. Wegen einer Reihe anderer einfacher Beweise vergleiche man Landau, *Bull. Amer. Math. Soc.* 2. Reihe, Bd. 12 (1906), S. 155; Curtiss, *Annals of Mathematics*, 2. Reihe, Bd. 7 (1906), S. 161; sowie Bôcher, ibid. S. 163.

Man zeige, daß w dann beim Grenzübergange $\lim z = a$ einem Grenzpunkte $w = b$ zustrebt und daß, wenn der Punkt $z = a$ dem Punkte $w = b$ entspricht, die Beziehung auch in diesem Punkte konform ist.

c) *Wesentliche Singularitäten.* Dieser Fall umfaßt alle Möglichkeiten, welche sich nicht unter a) oder b) subsumieren. Dem entspricht die folgende Definition: Hat $f(z)$ im Punkte $z = a$ eine Singularität, die weder ein Pol noch eine hebbare Unstetigkeit ist, so heißt a nach Weierstraß eine *wesentliche singuläre Stelle.*[1]) Bezüglich des Verhaltens der Funktion in der Nähe eines derartigen Punktes hat Weierstraß den folgenden Satz gefunden.

10. Satz. *In der Umgebung einer isolierten wesentlichen singulären Stelle kommt die Funktion jedem vorgegebenen Werte beliebig nahe.*

Sei C eine beliebige reelle oder komplexe Größe. Dann soll gegezeigt werden, daß nach Annahme zweier willkürlicher positiver Zahlen ε, h ein Punkt $z \neq a$ von der Umgebung $|z - a| < h$ der Stelle a existiert, wofür

$$|C - f(z)| < \varepsilon$$

ist. Träfe das nämlich nicht zu, so müßte durchweg

$$\frac{1}{|C - f(z)|} \leqq \frac{1}{\varepsilon} \qquad 0 < |z - a| < h,$$

sein, und die Funktion $1/[C - f(z)]$ würde somit alle Voraussetzungen des Falles b) erfüllen. Infolgedessen müßte diese Funktion nach dem 9. Satze beim limes $z = a$ einem Grenzwert λ zustreben. Ist $\lambda = 0$, so wird $f(z)$ im Punkte a unendlich und entspricht daher den Bedingungen des Falles a). Ist dagegen $\lambda \neq 0$, so entspricht $f(z)$ den Bedingungen des Falles b). Beides verstößt gegen die Voraussetzungen und damit ist der Beweis fertig.

Beispiel. Sei

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \qquad a = 0.$$

Hat C irgend einen von 0 verschiedenen Wert, so läßt sich die Gleichung

$$C = e^{\frac{1}{z}} \tag{3}$$

nach z wirklich auflösen und zwar häufen sich ihre Wurzeln in der Nähe der Stelle $a = 0$:

1) Die Definition einer isolierten wesentlichen singulären Stelle läßt eine Erweiterung zu, die wir später einmal besprechen werden.

$$z_k = \frac{1}{\log C} = \frac{1}{\log|C| + (\gamma + 2k\pi)i},$$

wo γ einen besonderen Wert von $\operatorname{arc} C$ bedeutet. Je größer k angenommen wird, desto näher rückt die entsprechende Wurzel an den Punkt $z = 0$ heran. Wählt man dagegen $C = 0$, so hat Gleichung (3) keine Wurzel. Trotzdem bleibt der Weierstraßsche Satz bestehen, denn die Funktion strebt ja dem Werte 0 zu, wenn z etwa längs der negativen reellen Achse gegen 0 konvergiert.

Hiermit wird die Frage nahe gelegt, ob es im allgemeinen mehrere, eventuell auch unendlich viele Werte geben kann, die die Funktion in der Nähe einer isolierten wesentlichen singulären Stelle nicht annimmt. Diese Frage hat Picard erledigt, indem er zeigte, daß es höchstens (wie im vorliegenden Falle) *einen*[1]) Wert geben kann, den die Funktion nicht wirklich annimmt.

Einen besonderen Fall des Picardschen Satzes, welcher jedoch gegenwärtig für die Praxis vollkommen auszureichen scheint, kann man noch mit elementaren Hilfsmitteln beweisen.

11. Satz. *Die Funktion $f(z)$ habe im Punkte $z = a$ eine isolierte wesentliche singuläre Stelle; sei ferner C eine willkürliche komplexe Größe, $|w - C| < h$ eine beliebig kleine Umgebung des Punktes $w = C$. Dann gibt es innerhalb dieser Umgebung einen Punkt C', wofür die Gleichung*

$$f(z) = C'$$

unendlich viele Wurzeln besitzt, welche denn den Punkt a zur Häufungsstelle haben.

Dem Weierstraßschen Satze zufolge nimmt nämlich $f(z)$ für einen innerhalb des Bereichs $0 < |z - a| < \delta_1$ gelegenen Punkt ζ_1 einen Wert C_1 an, welcher im Bereiche $|w - C| < h = h_1$ liegt. Ist $f'(\zeta_1) \neq 0$, so definiert die Gleichung

$$w = f(z)$$

eine ein-eindeutige Abbildung der Umgebung von ζ_1 auf die Umgebung T_1 von C_1; erstere Umgebung wollen wir als einen kleinen Kreis, $|z - \zeta_1| < \varepsilon_1$, wählen, welcher ganz im Bereiche $|z - a| < \delta_1$ liegt, aber nicht bis an den Punkt a hinanreicht, und wofür sich außerdem T_1 ganz im Bereiche $|w - C| < h_1$ befindet. Sollte indessen

1) bzw. *zwei* Werte, falls man die in der letzten Anmerkung erwähnte Erweiterung der Definition der isolierten wesentlichen singulären Stellen zuläßt, wonach sich Pole in der Nähe derselben häufen dürfen. Man vergleiche Kap. 13, § 15

$f'(\zeta_1) = 0$ sein, so kann man jedenfalls einen zweiten Punkt ζ_1' finden, wofür $f'(\zeta_1') \neq 0$ ist, während $f(\zeta_1')$ noch im Bereiche $|w - C| < h_1$ liegt, und diesen dann als den Punkt ζ_1 nehmen.

Man wiederhole diesen Schritt, indem man nun C_1 an Stelle von C treten läßt und überdies h_2, δ_2 so klein nimmt, daß der Kreis $|w - C_1| < h_2$ innerhalb T_1 liegt, während andererseits kein Punkt des Kreises $|z - a| < \delta_2$ mit einem Punkte des Kreises $|z - \zeta_1| < \varepsilon_1$ zusammenfällt. Auf diese Weise gelangt man zu einem neuen Punkte ζ_2, wofür $C_2 = f(\zeta_2)$ im Kreise $|w - C_1| < h_2$ liegt und außerdem $f'(\zeta_2) \neq 0$ ist. Infolgedessen wird ein kleiner Kreis $|z - \zeta_2| < \varepsilon_2$, welcher im Kreise $|z - a| < \delta_2$ liegt und nicht bis an a hinanreicht, ein-eindeutig auf eine Umgebung T_2 von C_2 abgebildet; im übrigen soll ε_2 so klein genommen werden, daß T_2 in T_1 liegt.

Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens erhält man eine unbegrenzte Folge ineinander eingeschachtelter Bereiche $T_1, T_2, \ldots$, welche mittels der Relation

$$w = f(z)$$

bzw. auf die Kreise $|z - \zeta_n| < \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ein-eindeutig abgebildet werden. Diese Bereiche T_n haben mindestens einen Punkt C' gemeinsam, und diesem Punkte entspricht nunmehr in jedem jener Kreise ein Bildpunkt z_n:

$$C' = f(z_n), \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Hiermit ist der Beweis erbracht.

Zusatz. *Der Satz gilt auch für eine wesentliche singuläre Stelle zweiter Art, d. h. für den Fall, daß $f(z)$ in der Nähe der Stelle $z = a$ bis auf Pole analytisch ist, daß sich aber Pole in jeder Umgebung des Punktes $z = a$ befinden.*

In der Tat sei C eine beliebige Zahl. Nimmt $f(z)$ den Wert C in jeder vorgegebenen Nachbarschaft des Punktes $z = a$ an, so wird der Satz bereits zugestanden. Im anderen Falle hat die Funktion

$$F(z) = \frac{1}{C - f(z)},$$

wo $F(z)$ in den Polen von $f(z)$ als 0 erklärt wird, eine wesentliche singuläre Stelle im Punkte $z = a$, wie sie der vorstehende Satz voraussetzt, und der Beweis erfolgt jetzt ohne weiteres auf Grund dieses Satzes.

Isolierte singuläre Linien. Im Anschluß an das Vorhergehende wollen wir noch den folgenden Satz beweisen.

12. Satz.[1]) *Ist $f(z)$ in einem Bereiche S stetig und, abgesehen von den Punkten einer einfachen regulären Kurve Γ, im Innern von S analytisch, so ist $f(z)$ auch in den innerhalb S gelegenen Punkten von Γ analytisch.*

Wir wollen zunächst annehmen, daß S durch die Kurve Γ in zwei Bereiche S_1, S_2 zerlegt wird. Die Ränder von S, S_1, S_2 mögen mit C, C_1, C_2 bezeichnet werden. Sei z ein beliebiger innerer Punkt von S_1. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Andererseits ist nach Hermites Bemerkung, § 4, Ende

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen kommt[2])

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Nach demselben Raisonnement stellt diese Formel die Funktion $f(z)$ im Bereiche S_2 ebenfalls dar. Nun definiert aber das Integral nach dem Hauptsatz von § 1 eine Funktion, die sich im ganzen Innern von S analytisch verhält. Wegen der Stetigkeit von $f(z)$ wird also diese Funktion auch in den Punkten von Γ durch die vorstehende Formel ausgedrückt, womit denn der Satz für diesen Fall bewiesen ist.

Um den Satz jetzt allgemein zu beweisen, fassen wir einen beliebigen innerhalb S gelegenen Punkt P von Γ ins Auge und legen einen kleinen Kreis um ihn. Dann sind für diese Kreisfläche alle Bedingungen des soeben erledigten Falles erfüllt, und darum verhält sich $f(z)$ analytisch in P. Hiermit ist der Beweis fertig. Man kann auch mehrere Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ zulassen, welche eine endliche Anzahl von mehrfachen und Schnittpunkten haben; doch wäre es ein Irrtum zu glauben, daß der Satz notwendig gelte, wenn die Anzahl dieser Kurven unendlich wird.

1) Riemann, *Inauguraldissertation*, § 12; *Werke*, S. 23.

2) Daß bei den beiden Integrationen Γ zweimal durchlaufen wird und zwar das zweite Mal in entgegengesetztem Sinne, leuchtet ja ohne weiteres ein. Die arithmetische Begründung dieser Annahme wird durch die Entwicklungen von Kap. 5, § 7 geliefert.

Aufgabe 1. In einem Bereich T, welcher aus einem längs eines Radius ab aufgeschnittenen Kreisringe besteht, sei $f(z)$ analytisch. Dabei wollen wir die beiden Ufer von ab als das positive und das negative unterscheiden. Wenn sich z einem Punkte von ab von der positiven (negativen) Seite her nähert, so soll $f(z)$ einem Grenzwert w^+ (w^-) zustreben, und zwar soll stets $w^+ = w^- + \lambda$ sein, wo λ eine Konstante bedeutet. Man zeige, daß sich dann die Ableitung $f'(z)$ im ganzen aufgeschnittenen Kreisringe analytisch verhält, sofern man dieser Funktion in den Punkten von ab zweckmäßige Werte beilegt.

Aufgabe 2. Man beweise den 12. Satz mit Hilfe des Morera-schen Satzes.

§ 7. Das Analogon des Mittelwertsatzes in der Differentialrechnung.

Mit Rücksicht auf die Rolle, welche das in diesem Paragraphen zu besprechende Theorem in der Funktionentheorie spielt, wird man dasselbe neben den Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1,$$

und die Verallgemeinerung desselben, nämlich den Taylorschen Lehrsatz mit Restglied:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

zu stellen haben.

Hauptsatz. *In einem Bereich T sei $f(z)$ analytisch, und sei a ein beliebiger Punkt*[1] *von T. Dann läßt sich $f(z)$ durch die Formel darstellen:*

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n P_n(z),$$

wo n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet und $P_n(z)$ sich in T analytisch verhält.

Ist S ein regulärer Bereich, welcher den Punkt a im Innern enthält und nebst seinem Rande in T liegt, so wird $P_n(z)$ innerhalb S durch das Integral ausgedrückt:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^n(t-z)}.$$

Man geht von der Darstellung der Funktion $f(z)$ im Bereiche S durch die Integralformel aus und formt den Integranden folgendermaßen um.

---

1) Wir erinnern nochmals daran, daß ein Bereich T nur aus innern Punkten besteht.

Sind A und B irgend zwei ungleiche komplexe Zahlen, so hat man

$$(1)\qquad \frac{1}{A-B}=\frac{1}{A}+\frac{B}{A^2}+\cdots+\frac{B^{n-1}}{A^n}+\frac{B^n}{A^n(A-B)}.$$

Setzt man hier

$$A=t-a,\qquad B=z-a,$$

so kommt

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(t-a)-(z-a)}=\frac{1}{t-a}+\frac{z-a}{(t-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(t-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{(t-a)^n(t-z)}.$$

Diesen Ausdruck für $1/(t-z)$ trägt man nun in die Integralformel ein. Das gibt:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)dt}{t-a}+\frac{z-a}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)dt}{(t-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)dt}{(t-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)dt}{(t-a)^n(t-z)}.$$

Mit Rücksicht auf § 5, (1), sowie den Hauptsatz von § 1 erweist sich dies aber geradezu als die in Aussicht genommene Darstellung.

Aus der Integraldarstellung für $P_n(z)$ leitet man eine wichtige Abschätzung für $|P_n(z)|$ her. Um den Punkt a lege man einen Kreis K vom Radius R, welcher nebst seinem Rande in T liegen soll; darauf nehme man S so, daß K auch im Innern von S liegt. Sei M der größte Wert von $|f(t)|$ längs C, $\varkappa$ die kleinste Entfernung eines Punktes der Peripherie des Kreises K von einem Randpunkte von S, und L die Gesamtlänge von C:

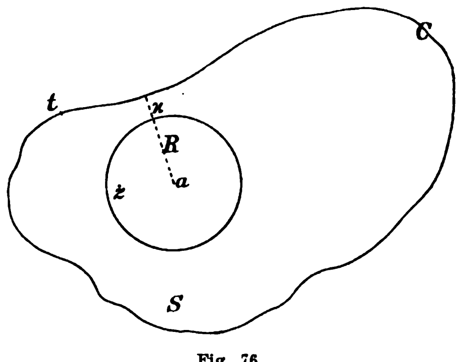


Fig. 76.

$$|f(t)|\leqq M,\qquad |t-z|\geqq\varkappa,$$

sofern z im Kreise K liegt. Dann erhält man das folgende Resultat.

Abschätzung von $P_n(z)$. *Für die Punkte z des um a gelegten Kreises K gilt gleichmäßig die Abschätzung:*

$$|P_n(z)|\leqq\frac{ML}{2\pi(R+\varkappa)^n\varkappa}.$$

In der Tat ist

$$P_n(z) \leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{|f(t)| \cdot |dt|}{|t-a|^n |t-z|} \leqq \frac{ML}{2\pi(R+\varkappa)^n \varkappa}.$$

Dabei ist das letzte Glied dieser Relation unabhängig von z.

Aufgabe. Man zeige, daß die obige Darstellung eindeutig ist, d. h. daß es keine zweite Darstellung von der Form

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n \varphi(z)$$

gibt, welche mit der vorstehenden nicht identisch wäre.

Anwendung des Hauptsatzes. Auf Grund der voraufgehenden Entwicklungen wollen wir jetzt ein wichtiges Theorem beweisen, auf welches sich die Sätze des folgenden Paragraphen stützen werden.

Lehrsatz. *Ist $f(z)$ im Bereiche T analytisch und verschwinden sämtliche Ableitungen von $f(z)$ in einem einzigen Punkte a von T, so hat $f(z)$ im ganzen Bereich T einen konstanten Wert.*

Nach dem Hauptsatze ist nämlich hier für jeden Wert von n

$$f(z) = f(a) + (z-a)^n P_n(z).$$

Für einen im Innern des Kreises K befindlichen Punkt z ist aber

$$|z-a| = h < R,$$

$$|f(z) - f(a)| = h^n |P_n(z)| \leqq \frac{ML}{2\pi\varkappa}\left(\frac{h}{R+\varkappa}\right)^n.$$

Der letzte Teil dieser Relation kann durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden, darum muß der erste Teil, welcher ja von n gar nicht abhängt, den Wert 0 haben, und $f(z)$ hat also im ganzen Kreise K den konstanten Wert

$$f(a) = c.$$

Sei jetzt Z ein beliebiger Punkt von T, der K nicht zugehört. Wir wollen zeigen, daß auch für Z

$$f(Z) = c$$

ist. Dazu verbinde man a mit Z durch eine in T gelegene reguläre Kurve Γ. Längs Γ ist $f(z)$ eine (komplexe) stetige Funktion der von a aus gemessenen Bogenlänge s und außerdem hat $f(z)$ wenigstens im Kreise K den Wert c. Sollte dies nicht durchweg der Fall sein, so fasse man alle Punkte von Γ ins Auge, in welchen $f(z) \neq c$ ist.

Die untere Grenze der entsprechenden Werte von s soll mit s', der zugehörige Punkt von Γ mit a' bezeichnet werden. Dann ist längs des Bogens $0 \leqq s \leqq s'$ $f(z) = c$, während es in jeder Nähe von a' Punkte gibt, für welche diese Gleichung nicht gilt. Das geht aber nicht an. Denn längs des genannten Bogens und also insbesondere im Punkte a' verschwindet ja zunächst $f'(z)$ (man vgl. Kap. 6, § 4, Aufgabe), sodann auch $f''(z)$, usw., also verschwinden schließlich daselbst alle Ableitungen von $f(z)$. Infolgedessen gibt es einen Kreis K' um a', in welchem $f(z)$ den konstanten Wert $f(a') = c$ annimmt. Hiermit ist die Unmöglichkeit der Annahme, daß $f(z)$ längs Γ nicht durchweg den Wert c besitze, zur Evidenz gebracht, und der Beweis ist fertig.

Aus diesem Theorem erschließt man unmittelbar den folgenden[1])

Identitätssatz. *Ist $f(z)$ in einem Bereiche T analytisch und verschwindet $f(z)$ für alle Punkte der Umgebung eines Punktes $z = a$ von T, oder auch bloß für die Punkte eines beliebig kleinen von a ausgehenden Kurvenbogens, so ist in T durchweg $f(z) = 0$.*

Eine scheinbar allgemeinere Formulierung dieses Satzes, wenn auch damit dem Inhalt nach identisch, ist folgende.

Sind $f(z)$, $\varphi(z)$ in einem Bereiche T analytisch und stimmen ihre Werte in allen Punkten der Umgebung eines Punktes a von T, oder auch bloß in den Punkten eines beliebig kleinen von a ausgehenden Kurvenbogens miteinander überein, so ist im ganzen Bereiche T

$$f(z) = \varphi(z).$$

Im nächsten Paragraphen wird dieser Satz noch erweitert, vgl. daselbst unter dem 1. Satze.

§ 8. Die Nullpunkte und Pole einer analytischen Funktion.

Es handelt sich jetzt um zwei grundlegende Sätze betreffend das Verhalten einer analytischen Funktion in der Nähe eines Nullpunktes oder Poles. Der erste Satz lautet, wie folgt.

---

1) Gauß, „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte," *Beobachtungen des magnetischen Vereins für das Jahr 1839*, Leipzig, 1840, = *Werke*, Bd. 5, S. 223; Riemann, *Inauguraldissertation*, 1851, § 11. Sowohl Gauß als Riemann versuchten, mit Integraldarstellungen für die in Betracht kommenden Funktionen auszukommen, sind aber zu keinen stichhaltigen Beweisen gelangt.

1. Satz. *Ist $f(z)$ im Punkte $z = a$ analytisch und verschwindet $f(z)$ dort, ohne identisch $= 0$ zu sein, so läßt sich $f(z)$ in der Form darstellen:*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

wo m eine natürliche Zahl und $\varphi(z)$ eine im Punkte a analytische, dort nicht verschwindende Funktion von z ist. Infolgedessen verschwindet $f(z)$ in keinem zweiten Punkte der Umgebung von $z = a$.

Nach dem Satze von § 7, S. 318 können nämlich alle Ableitungen von $f(z)$ im Punkte a nicht $= 0$ sein. Sei also $f^{(m)}(a)$ die erste, die dort nicht verschwindet. Dann ergibt der Hauptsatz von § 7 die Darstellung:

$$f(z) = (z - a)^m \left[\frac{f^{(m)}(a)}{m!} + (z - a) P_{m+1}(z)\right],$$

und darin ist eben der Beweis des Satzes enthalten.

Der Punkt a heißt[1]) ein *Nullpunkt* oder eine *Wurzel* n^{ter} *Ordnung.* Man sagt wohl auch, die Funktion habe m (einfache) Nullpunkte oder Wurzeln im Punkte a. Unter dem Ausdruck: *$f(z)$ nimmt im Punkte a den Wert $b = f(a)$ m-mal an,* wollen wir verstehen, daß die Funktion $f(z) - b$ einen Nullpunkt m^{ter} Ordnung dort besitzt:

$$f(z) - b = (z - a)^m \varphi(z).$$

Wir sagen ferner, *$f(z)$ nimmt den Wert b in einem Bereich T k-mal an,* wenn die Summe der Ordnungen der innerhalb T befindlichen Nullpunkte von $f(z) - b$ gleich k ist.

Aus diesem Satze folgt vor allem, daß der Identitätssatz des vorhergehenden Paragraphen auch dann noch gilt, wenn man an Stelle jener zweidimensionalen Umgebung von a bzw. des von a ausgehenden Bogens nur eine unendliche Menge isolierter Punkte mit der Häufungsstelle $z = a$ treten läßt.

Im Anschluß an den soeben bewiesenen Satz erhält man einen analogen betreffend das Verhalten einer Funktion in der Nähe eines Poles, $z = a$. Da nämlich hier

$$\lim_{z=a} \frac{1}{f(z)} = 0$$

ist, so verhält sich die Funktion

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad z \neq a; \qquad F(a) = 0$$

1) Unter einem *Nullpunkt* oder einer *Wurzel* einer Funktion versteht man allgemein jeden Wert des Arguments, wofür die Funktion verschwindet. Der Inhalt der obigen Definition besteht eben in der Erklärung des Begriffs der *Ordnung* eines Nullpunktes.

nach § 6, 9. Satz im Punkte a analytisch und läßt sich also laut des obigen Satzes in der Gestalt schreiben:

$$F(z) = (z-a)^m \Phi(z), \qquad \Phi(a) \neq 0.$$

Der reziproke Wert der Funktion $\Phi(z)$, $\varphi(z) = 1/\Phi(z)$, verhält sich nun auch im Punkte a analytisch, und wir gelangen somit zu folgendem Satze.

2. Satz. *Hat die Funktion $f(z)$ im Punkte a einen Pol, so läßt sich $f(z)$ in der Form schreiben:*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

wo m eine natürliche Zahl und $\varphi(z)$ eine im Punkte a analytische, dort nicht verschwindende Funktion von z ist.

Unter der *Ordnung* eines Poles versteht man die Zahl m, welche bei der obigen Darstellung den Exponenten bildet. Man sagt wohl auch, die Funktion $f(z)$ habe im Punkte a m (einfache) Pole.

An die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen anknüpfend erhalten wir noch eine zweite Darstellung für eine Funktion $f(z)$ in der Nähe eines Poles. Schreibt man nämlich nach § 7

$$\varphi(z) = A_m + A_{m-1}(z-a) + \cdots + A_1(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \psi(z),$$

so gelangt man zu folgendem

Zusatz. *In der Umgebung eines Poles $z = a$ kann $f(z)$ auch in der Gestalt dargestellt werden:*

$$f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{z-a} + \psi(z),$$

wobei $A_m \neq 0$ ist und $\psi(z)$ sich im Punkte a analytisch verhält.

Die Summe der rechter Hand auftretenden Brüche bildet den *Hauptteil* der Funktion $f(z)$ im Pole a.

Wie man sieht, sind alle Darstellungen dieses Paragraphen eindeutig.

Aufgabe 1. Die Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ mögen im Punkte $z = a$ einen Pol m^{ter} bzw. n^{ter} Ordnung haben. Was kann man dann über das Verhalten der Funktionen

$$f(z)\varphi(z), \qquad f(z) + \varphi(z), \qquad f(z)/\varphi(z)$$

in diesem Punkte aussagen? (Man erörtere *alle* Fälle.)

Aufgabe 2. Im Punkte $z = a$ habe $f(z)$ einen m-fachen Nullpunkt. Man zeige, daß dann das Integral

$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz$$

einen $(m+1)$-fachen Nullpunkt dort erhält.

Man spreche einen analogen Satz für das Integral

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z)\,dz$$

in der Umgebung eines Poles a aus.

Die Sätze dieses Paragraphen sind deshalb alle bemerkenswert, da die Analogie mit den reellen stetigen Funktionen einer oder zweier reeller Veränderlichen einen derartigen Sachverhalt nicht vermuten läßt. Man denke etwa an die Funktion

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0; \qquad f(0) = 0.$$

Sie ist ja nebst allen Ableitungen stetig und verschwindet im Punkte $x = 0$. Sie hat aber noch unendlich viele andere Wurzeln in der Nähe dieses Punktes. Allein wenn man dieses Vorkommnis ausschließt, braucht ein Nullpunkt immer noch keine selbst durch eine gebrochene oder gar irrationale Zahl ausdrückbare Ordnung zu besitzen, wie das Beispiel zeigt:

$$f(x) = \frac{(x^2)^\mu}{\log x^2}, \quad x \neq 0; \qquad f(0) = 0,$$

wobei $\mu \geqq 0$ eine beliebige reelle Konstante bedeutet.

Ähnliche Bemerkungen gelten auch bezüglich eines Poles, wie man sich an den Beispielen

$$\frac{1}{x \sin\frac{1}{x}} \quad \text{und} \quad \frac{\log x^2}{(x^2)^\mu}, \quad \mu \geqq 0$$

klar macht.

§ 9. Der Punkt ∞.

In der projektiven Geometrie sieht man sich genötigt, neben den eigentlichen Punkten und Geraden der Ebene noch ideale Elemente, nämlich die Punkte der unendlich fernen Geraden, einzuführen,

damit die Sätze der Geometrie den dem Wesen der Sache entsprechenden Umfang erhalten und damit an Inhalt gewinnen. In der Funktionentheorie verhält sich die Sache genau ebenso, — eine Behauptung, wofür schon die rationalen Funktionen (vgl. den folgenden Paragraphen) einen ersten Beleg liefern werden; nur ist es für die Funktionentheorie die Transformation

$$w = \frac{1}{z}, \tag{1}$$

welche für die Festsetzung bzgl. des unendlich fernen Bereiches maßgebend ist. Durch diese Transformation gehen die außerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$ befindlichen Punkte der z-Ebene ein-eindeutig und stetig in die innerhalb des Einheitskreises $|w| = 1$ gelegenen Punkte der w-Ebene über, den Punkt $w = 0$ allein ausgenommen; man vgl. Kap. 6, § 10. Rückt der Punkt z längs eines beliebigen Weges ins Unendliche, so strebt der Punkt w dem Punkte $w = 0$ zu, und umgekehrt.

Den Bedürfnissen der Transformation (1) entsprechend wollen wir also den eigentlichen Punkten der Ebene noch einen idealen Punkt hinzufügen und denselben als den *Punkt* ∞ bezeichnen.[1]) Die Transformation (1) erweitern wir auch zugleich dadurch, daß wir dem Punkte $z = \infty$ den Punkt $w = 0$, sowie dem Punkte $w = \infty$ den Punkt $z = 0$ zuordnen. Dann entspricht der Umgebung des Punktes $w = 0$ in ausnahmslos ein-eindeutiger Weise ein Teil der erweiterten z-Ebene. Dieser Teil bildet die *Umgebung des Punktes* $z = \infty$, welche wir nun direkt definieren wollen als denjenigen Teil der z-Ebene inklusive des Punktes $z = \infty$, welcher außerhalb einer beliebigen geschlossenen Kurve liegt. Wenn wir sagen: *der Bereich T enthält den Punkt $z = \infty$ im Inneren*, so heißt das, daß T alle eigentlichen Punkte der Ebene umfaßt, welche außerhalb eines geeignet gewählten Kreises liegen. Der Punkt $z = \infty$ heißt eine *Häufungsstelle* einer Punktmenge, wenn es außerhalb eines beliebig vorgegebenen Kreises stets einen Punkt der Menge gibt. Jede unendliche Punktmenge hat offenbar mindestens eine Häufungsstelle in der erweiterten Ebene.

---

1) Das System der komplexen Zahlen in ähnlicher Weise durch Hinzufügung einer *Zahl* ∞, — des sogenannten „eigentlichen Unendlichen", — zu erweitern, ist nicht angebracht; man vgl. die Einleitung zum 2. Abschnitte, sowie S. 6, Anm. 2. Will man sich doch ein abgeschlossenes Zahlensystem verschaffen, damit die Sonderstellung des Punktes ∞ gehoben wird, so empfiehlt sich der Gebrauch homogener Variabelen.

Eine durch den Punkt $z = \infty$ gehende Kurve C heißt *eine reguläre Kurve der erweiterten Ebene*, falls sie der auf S. 150 erwähnten Definition genügt. Eine solche Kurve bleibt invariant gegenüber einer linearen Transformation der Ebene.

Projiziert man die Ebene stereographisch auf die Kugel (vgl. Kap. 6, § 9) und ordnet man dabei dem Nordpol letzterer den Punkt $z = \infty$ zu, so wird dadurch die ganze erweiterte z-Ebene in eineindeutiger Weise auf die Kugel bezogen. Insbesondere geht die Umgebung des Punktes $z = \infty$ in die Umgebung des Nordpols über.

Über das Verhalten einer Funktion im Punkte $z = \infty$. In einem Bereiche T, welcher den Punkt $z = \infty$ im Innern enthält, sei $f(z)$ analytisch. Durch (1) geht $f(z)$ dann in eine Funktion von w über:

$$f(z) = \varphi(w),$$

welche in der Umgebung von $w = 0$, diesen Punkt allein ausgenommen, analytisch ist. Das Verhalten von $\varphi(w)$ im Punkte $w = 0$ soll für das Verhalten von $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ maßgebend sein. Nach den Entwicklungen von § 6 unterscheidet man hier drei Fälle.

a) $f(z)$ wird unendlich, wenn $z = \infty$ wird:

$$f(\infty) = \infty.$$

Dann sagen wir: $f(z)$ hat einen *Pol im Punkte* $z = \infty$.

b) Die Funktion $f(z)$ bleibt endlich im Bereiche T. Dann bleibt $\varphi(w)$ auch endlich und strebt zufolge des 9. Satzes von § 6 einem Grenzwert A zu, wenn $w = 0$ wird. Setzt man noch $\varphi(0) = A$, so verhält sich $\varphi(w)$ auch im Punkte $w = 0$ analytisch. Dem entspricht die folgende Definition: Bleibt $f(z)$ in T endlich:

$$|f(z)| < G,$$

so verhält sich $f(z)$ *im Punkte* $z = \infty$ *analytisch* und hat dort den *Wert*

$$A = \lim_{z=\infty} f(z) = f(\infty).$$

c) In jedem anderen Falle sagt man: $f(z)$ hat eine *wesentliche singuläre Stelle im Punkte* $z = \infty$. Die Funktion kommt dann jedem vorgeschriebenen Werte in jeder Umgebung dieses Punktes beliebig nahe.

Darstellung einer Funktion in der Umgebung des Punktes $z = \infty$. An den Hauptsatz von § 7, sowie an die Sätze von § 8 betreffend

die Darstellung von $\varphi(w)$ in der Nähe von $w = 0$ anknüpfend, können wir nun folgende Sätze aussprechen.

1. Satz. *Verhält sich $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ analytisch, so hat man*

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{\varphi(z)}{z^n},$$

wo n beliebig und $\varphi(z)$ im Punkte ∞ analytisch ist.

2. Satz. *Verschwindet $f(z)$ im Punkte ∞, ohne identisch $= 0$ zu sein, so ist*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^m},$$

wo m eine natürliche Zahl ist und $\varphi(z)$ sich im Punkte ∞ analytisch verhält, dort aber nicht verschwindet.

3. Satz. *Hat $f(z)$ im Punkte ∞ einen Pol, so ist*

$$f(z) = z^m \varphi(z) = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_1 z + \psi(z),$$

wo m eine natürliche Zahl ist, die Funktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sich beide im Punkte ∞ analytisch verhalten, und überdies $c_m = \varphi(\infty) \neq 0$ ist.

Definitionen. Die im 2. und 3. Satze sich einstellende Zahl m definiert die *Ordnung* des Nullpunktes bzw. Poles, welchen $f(z)$ im Punkte ∞ hat. Ist $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ analytisch, so sagt man: $f(z)$ nimmt den Wert A im Punkte $z = \infty$ m mal an, falls die Funktion $f(z) - A$ dort m Wurzeln hat. Das in der letzten Formel des 3. Satzes auftretende Polynom heißt der *Hauptteil* von $f(z)$ im Punkte ∞.

Beispiel. Die Funktion von § 1:

$$F(z) = \int\limits_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z}$$

verhält sich analytisch in allen eigentlichen Punkten der Umgebung des Punktes $z = \infty$. Ferner findet man

$$\lim_{z=\infty} \int\limits_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z} = 0,$$

d. h. $F(z)$ verhält sich auch im Punkte ∞ analytisch und verschwindet dort. Um die Ordnung dieser Wurzel zu bestimmen, setze man

$$\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{z}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{tz^{-1}-1}$$

und beachte, daß

$$\lim_{z=\infty} \int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{tz^{-1}-1} = -\int_C \varphi(t)\,dt$$

ist. Verschwindet dieses letzte Integral nicht, so liegt eine einfache Wurzel vor.

Konforme Abbildung der Umgebung des Punktes $z=\infty$. Der durch (1) definierten Transformation der Ebene entspricht nach Kap. 6, § 10 eine Transformation der Kugel in sich, welche aus einer Rotation derselben um eine in der Ebene des Äquators gelegene Achse durch den Winkel π besteht, und welche also die Umgebung ihres Nordpols auf die Umgebung des Südpols konform überführt. Hiermit wird hinsichtlich besagter Transformation der Ebene die folgende Definition nahegelegt: Die durch die erweiterte Transformation (1) definierte Beziehung der Umgebung des Punktes $z=\infty$ auf die Umgebung des Punktes $w=0$ soll auch im Punktepaare $z=\infty$, $w=0$ *konform* heißen. Allgemeiner seien z_0 und w_0 zwei beliebige Punkte der z- bzw. w-Ebene, wovon mindestens einer der Punkt ∞ sein soll. Die Umgebungen dieser Punkte sollen einander in ein-eindeutiger Weise zugewiesen sein, wobei außerdem z_0 und w_0 einander entsprechen sollen. Dann heißt die Beziehung auch im Punktepaare z_0, w_0 *konform*, wenn sie es in jedem anderen jenen Umgebungen angehörigen Punktepaare ist. Es ergibt sich, daß dann die entsprechenden Bereiche der Kugeln ebenfalls konform aufeinander bezogen werden. Das zeigt man nämlich dadurch, daß man jeden dieser Bereiche auf einen endlichen Bereich der Ebene stereographisch projiziert und dann den in der Aufgabe von S. 311 ausgesprochenen Satz in Anwendung bringt. Nun hatten wir früher den Satz: *Wird die Umgebung eines Punktes P auf die Umgebung eines Punktes Q und diese wieder auf die Umgebung eines Punktes R ein-eindeutig und konform bezogen, so ist die dadurch definierte Abbildung der Umgebung von P auf diejenige von R auch eine konforme.* Bei der erweiterten Definition der konformen Abbildung bleibt dieser Satz noch bestehen.

Um die z-Ebene, der Transformation (1) gemäß, auf die w-Ebene abzubilden, kann man unter Benutzung der Kugel folgendermaßen vorgehen. Die z-Ebene möge die Kugel im Südpol, die w-Ebene diese im Nordpol berühren, und zwar sollen dabei die reellen Achsen

der beiden Ebenen gleichgerichtet, die imaginären Achsen einander entgegengesetzt gerichtet sein. Dann wird man die z-Ebene mit dem Nordpol als Projektionszentrum auf die Kugel und diese dann wieder mit dem Südpol als Projektionszentrum auf die w-Ebene stereographisch projizieren. Hierdurch kommt die in Rede stehende Transformation gerade zustande. Vgl. darüber Neumann, *Abelsche Integrale*, 1. Aufl., 1865, 4. Vorlesung; 2. Aufl., 1884, 3. Kap.

Aufgabe 1. Ist $f(z)$ eine rationale Funktion:

$$f(z) = \frac{G(z)}{\Gamma(z)},$$

wo $G(z)$, $\Gamma(z)$ zwei Polynome sind, so zeige man, daß $f(z)$ entweder im Punkte $z = \infty$ analytisch ist oder einen Pol dort besitzt.

Aufgabe 2. Man zeige, daß eine in jedem Punkte der erweiterten z-Ebene analytische Funktion nichts anderes als eine Konstante sein kann.

Aufgabe 3. Es ist bereits einmal bewiesen worden, daß sich eine im Punkte $z = a$ analytische Funktion, deren Ableitungen alle in diesem Punkte verschwinden, auf eine Konstante reduziert. Gilt dieser Satz auch in der erweiterten Ebene?

Aufgabe 4. Man zeige, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Umgebung des Punktes $z = \infty$ durch die Funktion

$$w = f(z)$$

auf die Umgebung des Punktes $w = \infty$ konform bezogen werde, darin besteht, daß $f(z)$ einen einfachen Pol in $z = \infty$ habe. Wie lautet die Bedingung, daß jener Bereich der z-Ebene auf die Umgebung eines endlichen Punktes $w = b$ konform abgebildet werde?

Aufgabe 5.[1]) Sei T ein Bereich, welcher den Punkt $z = \infty$ im Innern enthält und von einer endlichen Anzahl einfacher regulärer geschlossener Kurven C begrenzt ist. Sei ferner $f(z)$ innerhalb T analytisch und am Rande von T stetig. Dann ist

$$f(z) - f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t - z},$$

wo z ein beliebiger innerer Punkt von T ist.

---

1) Auf diesen Satz hat mich Hr. Curtiss aufmerksam gemacht.

Aufgabe 6. Ist $f(z)$ in der Umgebung des Punktes $z = \infty$, höchstens von diesem Punkte selbst abgesehen, analytisch, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit des Integrals

$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz$$

in diesem Bereiche darin, daß das Residuum (vgl. unten, § 11) von $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ verschwinde. Soll $F(z)$ überdies im Punkte $z = \infty$ analytisch sein, so muß $f(z)$ dort mindestens zweimal verschwinden. — Wie lautet der Satz für einen endlichen Punkt?

§ 10. Die rationalen Funktionen.

Wir wollen in diesem Paragraphen die hauptsächlichsten funktionentheoretischen Sätze betreffend Polynome[1]) und rationale Funktionen zusammenstellen, deren Beweis schon in der niederen Algebra gegeben zu werden pflegt, und ihnen dann noch einen weiteren Satz (den 7. Satz) hinzufügen, welcher für die Funktionentheorie von großer Bedeutung ist.

Was den Fundamentalsatz der Algebra anbetrifft, nämlich den Satz, daß jedes Polynom vom Grade $n \geqq 1$ eine Wurzel besitzt, so gehört sein Beweis allerdings nicht in die niedere Algebra. Wir haben ja bereits zwei Beweise dieses Satzes kennen gelernt, Kap. 6, § 3 und Kap. 7, § 5; vgl. auch Kap. 13, § 3.

Unter einer *ganzen rationalen Funktion* einer oder mehrerer Veränderlichen versteht man eine Funktion, die sich auf die Form eines Polynoms bringen läßt. Eine Funktion, welche als der Quotient zweier teilerfremder Polynome dargestellt werden kann, wobei sich das Nennerpolynom nicht auf eine Konstante reduziert, heißt eine *gebrochene rationale Funktion.*

1. Satz. *Jedes Polynom*

(1) $$G_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad n \geqq 1,$$

läßt sich auf eine, aber auch nur auf eine Weise in das Produkt linearer Faktoren zerlegen:

$$G_n(z) = a_0 (z - \alpha_1)^{k_1} (z - \alpha_2)^{k_2} \cdots (z - \alpha_m)^{k_m},$$

1) Wegen der hierher gehörigen Definitionen, sowie auch der Beweise der Sätze, sei auf Bôcher's *Algebra*, Kap. 1 verwiesen.

wo $k_1, \dots k_m$ *natürliche Zahlen bedeuten, deren Summe gleich* n *ist, und wo die Wurzeln* α_i *im übrigen voneinander verschieden sind.*

Im Anschluß daran ergeben sich noch die weiteren Sätze:

2. Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Polynome einen gemeinsamen Teiler haben, welcher sich nicht auf eine Konstante reduziert, besteht darin, daß sie eine gemeinsame Wurzel haben.*

Eine Funktion *verschwindet identisch*, wenn sie für alle in Betracht kommenden Werte des Arguments gleich 0 ist. Zwei Funktionen sind einander *identisch gleich*, wenn ihre Differenz identisch verschwindet.

3. Satz. Identitätssatz. *Verschwindet ein Polynom für mehr getrennte Werte seines Arguments als die Zahl, welche seinen Grad anzeigt, so verschwinden sämtliche Koeffizienten, und das Polynom verschwindet somit identisch.*

Allgemeiner: Haben zwei Polynome,

$$G(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$
$$\Gamma(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m, \qquad b_0 \neq 0,$$

gleiche Werte für mehr als N *Werte des Arguments, wo* N *die größere der beiden Zahlen* n, m *bedeutet, so stimmen ihre Koeffizienten beziehungsweise miteinander überein:*

$$a_i = b_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, \; n = m.$$

Mithin sind die Polynome einander identisch gleich.

Mit Rücksicht auf die Entwicklungen von §§ 8, 9 können wir ferner sagen:

4. Satz. *Eine rationale Funktion* $R(z)$ *ist eine eindeutige Funktion, welche sich in der ganzen erweiterten* z*-Ebene im allgemeinen analytisch verhält und keine anderen singulären Punkte als nur Pole besitzt.*

5. Satz. *In der erweiterten* z*-Ebene ist die Anzahl* n *der Pole einer rationalen Funktion*

$$R(z) = \frac{G(z)}{\Gamma(z)},$$

wo $G(z)$, $\Gamma(z)$ *teilerfremde Polynome sind, gleich dem höheren der beiden Grade von* $G(z)$, $\Gamma(z)$. $R(z)$ *nimmt dort jeden Wert genau* n *mal an.*

Besonders einfach gestaltet sich jetzt die Herleitung der Partialbruchzerlegung.

6. Satz. *Eine rationale Funktion läßt sich sowohl durch den Quotienten zweier Produkte:*

$$R(z) = C\frac{(z-\alpha_1)^{k_1}\cdots(z-\alpha_p)^{k_p}}{(z-\beta_1)^{l_1}\cdots(z-\beta_q)^{l_q}}$$

als auch mittels partieller Brüche:

$$\begin{aligned} R(z) = &\frac{C_1^{(1)}}{(z-\beta_1)^{l_1}} + \frac{C_2^{(1)}}{(z-\beta_1)^{l_1-1}} + \cdots + \frac{C_{l_1}^{(1)}}{z-\beta_1} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{C_1^{(q)}}{(z-\beta_q)^{l_q}} + \frac{C_2^{(q)}}{(z-\beta_q)^{l_q-1}} + \cdots + \frac{C_{l_q}^{(q)}}{z-\beta_q} \\ &+ C_1 z^m + C_2 z^{m-1} + \cdots + C_m z + C, \end{aligned}$$

darstellen.

Der erste Teil des Satzes erhellt sofort. Zum Beweise des zweiten Teiles ziehe man von $R(z)$ den Hauptteil der Funktion in jedem Pole ab. Die dadurch erhaltene Funktion

$$\Phi(z) = R(z) - \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{C_j^{(i)}}{(z-\beta_i)^{l_i-j+1}} - \sum_{j=1}^{m} C_j z^{m-j+1}$$

verhält sich dann in jedem Punkte der erweiterten z-Ebene mit Ausnahme der Pole $\beta_1, \ldots \beta_q$, wo sie nicht definiert ist, analytisch, und bleibt überdies endlich. Definiert man $\Phi(z)$ noch in den Punkten β_i, $i = 1, \cdots q$, als $\lim_{z=\beta_i} \Phi(z)$, so erweist sich $\Phi(z)$ nach dem 9. Satze von § 6 als eine in der ganzen erweiterten z-Ebene ausnahmslos analytische Funktion. Darum ist $\Phi(z)$ eine Konstante, § 9, Aufgabe 2.

Zum Schluß beweisen wir die Umkehrung des 4. Satzes.

7. Satz.[1]) *Eine Funktion $f(z)$, die in der erweiterten z-Ebene im allgemeinen analytisch ist und keine anderen Singularitäten als nur Pole dort besitzt, ist eine rationale Funktion. Hat die Funktion insbesondere keine Pole im Endlichen, so ist sie eine ganze rationale Funktion.*

---

1) Meray, *Comptes Rendus,* Bd. 40 (1855), S. 788. Man vgl. auch wegen der Sätze dieses Paragraphen Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques,* 1859, Kap. 4, S. 34.

Zunächst ist klar, daß die Anzahl der Pole eine endliche sein muß. Denn sonst gäbe es ja mindestens eine im Endlichen oder im Punkte ∞ gelegene Häufungsstelle von Polen. Ein solcher Punkt kann aber kein Pol sein, denn in der Nähe eines Poles verhält sich die Funktion, wie wir wissen, vom Pole selbst abgesehen, ausnahmslos analytisch.

Zieht man jetzt von $f(z)$ den Hauptteil der Funktion in jedem Pole ab, so kann man hier wieder genau so schließen, wie beim Beweise des 6. Satzes.

Aus den vorstehenden Sätzen geht hervor, daß eine rationale Funktion durch Angabe der Pole nebst dem Hauptteile der Funktion in jedem derselben, resp. durch Angabe der Nullpunkte und Pole (je mit der zugehörigen Multiplizität) bis auf eine additive bzw. multiplikative Konstante bestimmt wird. Bei der letzten Bestimmung muß nur die Gesamtzahl der Nullpunkte und Pole in der erweiterten Ebene die nämliche sein.

Zusatz. *Wird die erweiterte Ebene (resp. die Kugel) ausnahmslos ein-eindeutig und konform in sich übergeführt, so läßt sich diese Verwandlung vermöge einer linearen Transformation ausdrücken.*

§ 11. Das Residuum.

Sei $f(z)$ eine Funktion, welche in der Umgebung einer Stelle $z = a$, höchstens mit Ausnahme dieses Punktes selbst, analytisch ist, und sei ferner S ein von einer einfachen regulären geschlossenen Kurve C begrenzter Bereich, welcher a umfaßt, innerhalb des Bereiches T, wo $f(z)$ betrachtet wird, liegt und weiter keinen singulären Punkt von $f(z)$ im Inneren oder auf seinem Rande enthält. Dann heißt das in positivem Sinne über den Rand von S erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz$$

das *Residuum* von $f(z)$ im Punkte a. Ist $a = \infty$, so wird man, wie erinnerlich, unter dem positiven Sinne denjenigen verstehen, in welchem C durchlaufen werden muß, damit man den außerhalb C gelegenen Teil der z-Ebene zur Linken hat. In einem endlichen Punkte a, in welchem $f(z)$ analytisch ist, hat das Residuum den Wert 0.

Von besonderer Bedeutung ist das Residuum einer Funktion in einem Pole a. Stellt man $f(z)$ hier in der Form dar:

$$f(z) = \frac{C_m}{(z-a)^m} + \frac{C_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{C_1}{z-a} + \psi(z),$$

so hat das Residuum den Wert C_1. Ist $f(z)$ im Punkte ∞ analytisch oder hat $f(z)$ dort einen Pol:

$$f(z) = C_m z^m + \cdots + C_1 z + C_0 + C_{-1} z^{-1} + z^{-2}\varphi(z), \qquad m \gtreqless 0,$$

so erhält man als Wert des Residuums nicht C_1, sondern $-C_{-1}$.

1. Satz. *In jedem inneren und Randpunkte eines von einer oder mehreren einfachen geschlossenen regulären Kurven begrenzten Bereiches Σ sei $f(z)$ bis auf innerhalb Σ gelegene Pole stetig und innerhalb Σ, von jenen Polen abgesehen, analytisch. Dann erhält man die Summe der Residuen von $f(z)$ in den Polen, indem man $f(z)/2\pi i$ in positivem Sinne über den Gesamtrand von Σ hin integriert. Der Satz gilt auch dann noch, wenn Σ den Punkt ∞ als inneren, nicht aber als Randpunkt enthält.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Cauchyschen Integralsatze, indem man jeden singulären Punkt durch einen kleinen Kreis, den Punkt $z = \infty$, falls er in Σ enthalten ist, durch einen großen Kreis ausschneidet und dann über den Rand des neuen Bereichs integriert. In der deutschen Literatur ist diese Art, die Summe der Residuen innerhalb eines gegebenen Bereiches zu erhalten, als die *Methode des Herumintegrierens* bekannt.

Unter dem *logarithmischen Residuum* von $f(z)$ im Punkte a wollen wir das Residuum der Funktion $f'(z)/f(z)$ in diesem Punkte verstehen, also das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \log f(z) \Big|_C,$$

wo der letzte Ausdruck den Zuwachs bedeutet, welchen die Funktion $\log f(z)/2\pi i$ erfährt, wenn z die Kurve C in positivem Sinne durchläuft. Das logarithmische Residuum ist also nichts anderes als der Zuwachs der Funktion $\operatorname{arc} f(z)$ längs der Kurve C, geteilt durch 2π. Im Anschluß an den Zusatz von Kap. 6, § 3 kann man also jetzt den folgenden Satz aussprechen.

2. Satz. *Die Ordnung eines Nullpunktes oder eines Poles der Funktion $f(z)$ ist gleich dem logarithmischen Residuum bzw. dem negativen Werte des logarithmischen Residuums der Funktion in diesem Punkte, der auch insbesondere der Punkt ∞ sein kann.*

Nach den gegenwärtigen Methoden würde man den Beweis, wie folgt, führen. Sei a zunächst ein im Endlichen gelegener Nullpunkt m^{ter} Ordnung:

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \qquad \varphi(a) \neq 0.$$

Dann ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ im Punkte $z = a$ analytisch ist. Daraus folgt der erste Teil des Satzes für den genannten Fall. In dieser letzten Gleichung ist fernerhin der Beweis für den Fall eines im Endlichen gelegenen Poles enthalten, indem man jetzt unter m eine negative ganze Zahl versteht. In ähnlicher Weise wird auch der Fall behandelt, daß der Nullpunkt oder Pol im Punkte $z = \infty$ liegt.

An diese Sätze schließt sich noch ein wichtiges Kriterium bezüglich der Anzahl der Nullpunkte und Pole einer analytischen Funktion in einem gegebenen Bereiche.

3. Satz. *Im Innern eines von einer oder mehreren einfachen regulären geschlossenen Kurven begrenzten Bereiches Σ sei $f(z)$ höchstens mit Ausnahme von Polen analytisch; ferner sei $f(z)$, sowie $f'(z)$ am Rande stetig, und außerdem sei $f(z)$ dort von Null verschieden. Dann ist die Gesamtzahl der in Σ gelegenen Nullpunkte von $f(z)$ weniger der Gesamtzahl der Pole, jeden dieser Punkte seiner Multiplizität nach gerechnet, gleich dem längs der ganzen Begrenzung C von Σ in positivem Sinne erstreckten Integral*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}.$$

Der Satz gilt selbst dann noch, wenn Σ den Punkt $z = \infty$ zum inneren oder Randpunkte hat.

Liegt der Rand im Endlichen, so kann man gerade so verfahren, wie beim Beweise des 1. Satzes. Im andern Falle wird man den Rand zunächst durch eine lineare Transformation ins Endliche schaffen.

Vermöge dieses Satzes kann man auch den letzten Teil des 5. Satzes von § 10 beweisen, indem man die erweiterte Ebene durch eine geschlossene Kurve zerlegt und den Satz dann auf jeden der beiden dadurch entstehenden Bereiche anwendet. Einen besonderen Fall des 3. Satzes wollen wir noch explizite erwähnen.

Besteht Σ aus dem Innern einer einzigen im Endlichen gelegenen Kurve C und hat $f(z)$ keine Pole; wächst ferner das vorstehende Integral,

oder auch die Funktion $\operatorname{arc} f(z)/2\pi$ *um* n, *wenn* z *den Rand in positivem Sinne durchläuft, so hat* $f(z)$ *genau* n *Wurzeln in* Σ.

Bei Cauchy spielte der Begriff des Residuums und die Methode des Herumintegrierens von vornherein eine wesentliche Rolle. Den Kern dieser Methode findet man schon in der Abhandlung vom Jahre 1814,[1]) während das Residuum bereits zur Zeit der Abfassung der *Exercices de mathématiques* (1826), also fünf Jahre vor der Entdeckung des Cauchy-Taylorschen Reihensatzes, ein gebräuchliches Werkzeug in seinen Händen war. Ist doch die Cauchysche Integralformel selbst weiter nichts, als eine Anwendung des 1. Satzes dieses Paragraphen auf die Funktion von t: $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(t)}{t-z}$. Auch zur Herleitung von Reihen- und Produktentwicklungen wandte Cauchy dieses Verfahren an, und neuere Forscher haben den Gedanken wieder aufgenommen und mit Erfolg verwertet. Man vgl. vornehmlich Dini, *Serie di Fourier*, sowie die damit verwandten Untersuchungen von Kneser.[2]) Zur Einführung in diesen Gedankenkreis leistet die Darstellung bei Picard, *Traite d'analyse*, Bd. 2, Kap. 6 vorzügliche Dienste. Wir werden später einmal wieder hierauf zurückkommen.

Aufgabe 1. Hat $f(z)$ eine einfache Wurzel $z = a$, aber keine Pole in einem Bereiche S, so ist

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_C z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Aufgabe 2. Man zeige, daß das Residuum von

$$\frac{A}{(z-a)(x-z)}$$

im Punkte $z = a$ den Wert $A/(x-a)$ hat. Allgemein hat dort die Funktion

$$\frac{A}{(z-a)^m(x-z)}$$

das Residuum

$$\frac{A}{(x-a)^m}.$$

Aufgabe 3. Man bestimme das Residuum, sowie das logarithmische Residuum der Funktion

$$\frac{z}{(z-a)(z-b)^2}$$

im Punkte $z = b$.

---

1) Man vergleiche die 1. Anmerkung zu § 2.

2) *Math. Ann.* Bd. 58 (1903), S. 81.

§ 12. Über Potenzreihen.

Sei

(1) $$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe, von der man weiß, daß sie für einen von 0 verschiedenen Wert $z = Z$ konvergiert, oder allgemeiner, daß die Terme der Reihe für $z = Z$ bloß endlich bleiben:

(2) $$|c_n Z^n| \leqq G,$$

wo G eine positive Konstante bedeutet. Sieht man von dem besonderen Falle ab, daß die Reihe überhaupt für alle Werte von z konvergiert, so gibt es stets einen Kreis, den sogenannten *Konvergenzkreis*[1]), innerhalb dessen die Reihe absolut konvergiert und außerhalb dessen sie divergiert. In den Randpunkten dieses Kreises kann sowohl Konvergenz als Divergenz herrschen. Der Beweis des entsprechenden Satzes im Bereiche reeller Veränderlicher (Kap. 3, § 4) paßt auch hier ohne formale Modifikation.

Hinsichtlich des funktionentheoretischen Verhaltens einer Potenzreihe besteht der folgende Satz.

Lehrsatz. *Sei T ein beliebiger Bereich, welcher nebst seinen Randpunkten innerhalb des Konvergenzkreises der Potenzreihe*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

liegt. Dann konvergiert die Reihe für den Bereich T inklusive seines Randes gleichmäßig und stellt infolgedessen eine im Konvergenzkreise analytische Funktion vor.

Man kann nämlich eine positive Größe H so wählen, daß H einerseits kleiner als der Konvergenzradius der Potenzreihe ist, während H andererseits groß genug ist, damit T im Kreise $|z| \leqq H$ liegt. Nun konvergiert aber die Reihe nach dem Vorhergehenden für $z = H$ absolut; d. h. die Reihe

$$|c_0| + |c_1| H + |c_2| H^2 + \cdots$$

konvergiert. Daraus erschließen wir die gleichmäßige Konvergenz der vorgelegten Reihe für alle Punkte $|z| \leqq H$ und also insbesondere für die Punkte von T nebst Rand. Denn das Weierstraßsche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz (Kap. 3, § 4) gilt ja auch für Reihen

1) Auch *wahrer Konvergenzkreis* genannt.

mit komplexen Gliedern. Im vorliegenden Falle braucht man also nur

$$M_n = |c_n| H^n$$

zu setzen, dann ist durchweg

$$|c_n z^n| \leqq M_n$$

und alle Forderungen des Kriteriums sind erfüllt.

Man beachte wohl, daß der vorstehende Satz nicht gleichbedeutend mit dem folgenden Satze ist: Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig innerhalb ihres Konvergenzkreises. Dieser Satz ist falsch, wie schon die geometrische Reihe.

$$1 + z + z^2 + \cdots$$

zeigt. Diese Reihe hat den Einheitskreis zum Konvergenzkreise, konvergiert aber nicht gleichmäßig innerhalb desselben, denn der auf die ersten n Glieder folgende Rest hat ja den Wert

$$r_n = \frac{z^n}{1 - z}$$

und bleibt somit in besagtem Kreise nicht einmal endlich, geschweige denn dem absoluten Betrage nach unter einer vorgegebenen positiven Größe ε. Eine Potenzreihe konvergiert stets *absolut* im Innern ihres Konvergenzkreises, im allgemeinen aber *nicht gleichmäßig*.

Aufgabe. Man zeige, daß der Konvergenzbereich der Reihe

$$c_0 + \frac{c_1}{z - a} + \frac{c_2}{(z - a)^2} + \cdots$$

im allgemeinen aus dem Äußern eines Kreises $|z - a| = R$ besteht. Insbesondere kann $R = 0$ sein, die Reihe kann für alle Werte von z mit Ausnahme von $z = a$ konvergieren. Andererseits erleidet der Satz eine Ausnahme, falls die Reihe überhaupt für keinen Wert von z konvergieren sollte. Des weiteren konvergiert die Reihe gleichmäßig in jedem abgeschlossenen, außerhalb des Kreises $|z - a| = R$ gelegenen Bereiche T, welcher nur keinen Randpunkt mit besagtem Kreise gemein hat, und stellt somit in ihrem Konvergenzbereiche eine analytische Funktion vor.

Identitätssatz. *Verschwindet eine Potenzreihe für alle Werte des Arguments in der Umgebung der Stelle $z = 0$, so verschwindet jeder Koeffizient derselben.*

Stimmen die Werte zweier Potenzreihen für alle Werte des Arguments in der Umgebung der Stelle $z = 0$ miteinander überein, so haben ihre Koeffizienten bzw. gleiche Werte.

Allgemeiner genügt es vorauszusetzen, daß das Verschwinden resp. die Übereinstimmung bloß in einer abzählbaren Menge von Punkten mit der Häufungsstelle $z = 0$ stattfindet.

Setzt man nämlich in der gegebenen Reihe:

$$0 = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

zuerst $z = 0$, so folgt $c_0 = 0$. Daraus schließt man:

$$0 = z(c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots).$$

Solange $z \neq 0$ ist und im Konvergenzkreise der gegebenen Reihe liegt, ist also

$$0 = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \cdots.$$

Diese letzte Reihe stellt aber eine im Punkte $z = 0$ stetige Funktion vor, und infolgedessen verschwindet sie auch für $z = 0$. Hiermit ist gezeigt, daß $c_1 = 0$ ist.

Durch Wiederholung dieses Schlusses beweist man allgemein, daß $c_n = 0$ ist.

Der zweite Teil des Satzes ergibt sich, indem man die eine Reihe gliedweise von der anderen abzieht und dann den ersten Teil des Satzes auf die neue Reihe anwendet. Den Beweis des letzten Teils wird der Leser mit Leichtigkeit führen.

§ 13. Die Cauchy-Taylorsche Reihe.

Die Reihenentwicklung einer analytischen Funktion $f(z)$ nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ ergibt sich auch unmittelbar aus dem Theorem von § 7.

Der Cauchy-Taylorsche Reihensatz[1]). *Ist $f(z)$ in einem*

1) Brook Taylor, *Methodus incrementorum directa et inversa*, London, 1715, S. 21; man vergleiche Pringsheim, „Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes“ *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge, Bd. 1 (1900) S. 433. Die erste Veröffentlichung dieses Satzes in der gegenwärtigen Formulierung findet sich in einer lithographierten Abhandlung von Cauchy aus dem Jahre 1831; „Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appellé calcul de limites“, lu à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831; darüber eine Anzeige in Férussac's *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques,* Bd. 15 (1831) S. 260.

Bereich T analytisch und ist a ein beliebiger Punkt von T, so läßt sich $f(z)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe entwickeln:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots.$$

Dabei konvergiert die Reihe und stellt die Funktion $f(z)$ für alle Werte z dar, die innerhalb des größten Kreises um a liegen, welcher nur keinen dem Bereich T nicht zugehörigen Punkt im Innern einschließt. Die Darstellung ist überdies eindeutig.

Sei z ein innerer Punkt des im Satze genannten Kreises. Dann hat man nach § 7

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n P_n(z)$$

und es handelt sich bloß noch um den Nachweis, daß das Restglied $(z-a)^n P_n(z)$ bei wachsendem n gegen 0 abnimmt. Man nehme den Kreis K so, daß er z umfaßt. Dann ist nach der Abschätzung jenes Paragraphen

$$|(z-a)^n P_n(z)| \leqq \frac{ML}{2\pi\varkappa}\left(\frac{R}{R+\varkappa}\right)^n,$$

und das Restglied konvergiert auch in der Tat gegen 0, w. z. b. w. Daß die Darstellung außerdem eindeutig ist, ergibt sich aus dem Identitätssatz von § 12.

Insbesondere kann die Reihe für alle Werte von z konvergieren. Der Definitionsbereich der Funktion $f(z)$ läßt sich dann auf die ganze Ebene ausdehnen. In diesem Falle heißt $f(z)$ eine *ganze* Funktion, und zwar, sofern die Reihe nicht gerade mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht und somit zum Polynom wird, eine *ganze transzendente* Funktion (Weierstraß).

Die Entwicklung im Punkte $z = \infty$. Enthält der Bereich T den Punkt $z = \infty$ im Inneren, so nehme man die Transformation

$$w = \frac{1}{z} \quad \text{oder allgemeiner} \quad w = \frac{1}{z-a}$$

vor. Ist nun $f(z)$ im Punkte $z = \infty$ analytisch, so geht $f(z)$ dabei

---

Hierauf folgte eine italienische Übersetzung der Abhandlung (resp. der ersten Teile davon) in den *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*, Bd. 2, S. 1, 133, 261; Milan, 1834. Der erste, für die Funktionentheorie am wichtigste Teil der Abhandlung ist in der Ursprache von Cauchy in den *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, Bd. 2, 1841, S. 41 abgedruckt. Wegen weiterer Zitate vergleiche man *Enzyklopädie*, II B 1, Nr. 7.

in eine Funktion

$$f(z) = \psi(w)$$

über, welche sich bei gehöriger Festsetzung bezüglich ihres Wertes im Punkte $w = 0$ auch dort analytisch verhält und infolgedessen durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann:

$$\psi(w) = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \cdots.$$

Daraus findet man, indem man sich bloß auf die erste Transformation beschränkt:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots.$$

Die Reihe konvergiert und stellt die Funktion für alle diejenigen Werte von z vor, welche außerhalb des kleinsten um $a = 0$ gelegten, alle Randpunkte von T im Innern oder auf seiner Begrenzung enthaltenden Kreises liegen.

Diese Entwicklung wird in der Regel erst aus der Laurentschen Reihe abgeleitet. Die beiden auf die Koeffizienten sich beziehenden Formeln (vgl. § 15):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C t^{n-1} f(t)\,dt, \qquad |c_n| \leqq M r^n,$$

lassen sich hier aber auch direkt, also ohne Voraussetzung des Laurentschen Satzes ableiten, und zwar nach demselben Verfahren, wie das in § 15, Ende, angewandte.

§ 14. Zur Reihenentwicklung zusammengesetzter Funktionen.

Die Koeffizienten der Cauchy-Taylorschen Reihenentwicklung für einige der wichtigsten elementaren Funktionen lassen sich direkt durch Differentiationen berechnen. So erhält man die Darstellungen

(1) $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \qquad |z| < \infty;$$

(2) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots, \qquad |z| < \infty;$$

(3) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots, \qquad |z| < \infty;$$

(4) $$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \cdots, \qquad |z| < 1;$$

(5) $$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

Die ersten drei Reihen konvergieren für alle Werte von z, die beiden letzten haben den Einheitskreis zum Konvergenzkreise (sofern m nicht gerade eine natürliche Zahl oder 0 ist). Bei den Formeln (4) und (5) handelt es sich ja selbstredend um eine besondere Bestimmung der linker Hand stehenden vieldeutigen Funktionen.

Die Formel (5) wird auch durch gliedweise Integration der geometrischen Reihe hergeleitet:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots,$$

$$\log(1+z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots.$$

Hierbei soll der Integrationsweg auf das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ beschränkt werden. Dann stellt das Integral nach § 3, 1. Satz (bzw. die Reihe nach § 12, Lehrsatz) eine in diesem Kreise analytische Funktion vor. Längs der Strecke der reellen Achse $-1 < x < 1$ stimmt diese Funktion ferner mit dem reellen Logarithmus $\log(1+x)$ überein. Dem Identitätssatze von § 7 zufolge fällt also das Integral resp. die Reihe mit derjenigen Bestimmung der Funktion $\log(1+z)$ zusammen, welche sich im Einheitskreise analytisch verhält und längs jener Strecke der reellen Achse reelle Werte annimmt. — Im übrigen sei an das erste Beispiel von § 3 erinnert; vermöge eines ähnlichen Integrationsweges kann auch hier das Integral mit einer geeigneten Bestimmung der Funktion $\log(1+z)$ identifiziert werden. Oder man kann das vorgelegte Integral mittels der Transformation $z' = z - 1$ in jenes frühere Integral direkt überführen.

Auf ähnliche Weise findet man ferner die Entwicklungen

$$(6) \qquad \operatorname{arc\,tan} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots, \qquad |z| < 1;$$

$$(7) \qquad \operatorname{arc\,sin} z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5} + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

Allgemein lassen sich die Koeffizienten der Reihenentwicklung für die Funktionen (1) ... (5) in einem beliebigen Punkte $z = a$ der Ebene, in welchem sich die betreffende Funktion analytisch verhält,

durch die soeben verwendeten Methoden berechnen. Im besonderen wollen wir noch die beiden Entwicklungen hersetzen:

$$\log z = \log a + \frac{1}{a}(z-a) - \frac{1}{2a^2}(z-a)^2 + \cdots,$$

$$z^m = a^m + m a^{m-1}(z-a) + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2}(z-a)^2 + \cdots,$$

bemerken aber zugleich, daß sie sich auch direkt ergeben, indem man einerseits

$$\log z = \log[a + (z-a)] = \log a + \log\left(1 + \frac{z-a}{a}\right),$$

andererseits

$$z^m = [a + (z-a)]^m = a^m\left(1 + \frac{z-a}{a}\right)^m$$

setzt und sodann die Formel (5) bzw. (4) in Anwendung bringt. Beide Reihen haben zum Konvergenzkreis $|z-a| < |a|$.

Der Quotientensatz. Wird eine Funktion in der Form eines Quotienten $f(z)/\varphi(z)$ gegeben und entwickelt man Zähler und Nenner nach dem Cauchy-Taylorschen Satze, so erhält man eine Reihenentwicklung für besagten Quotienten dadurch, daß man die Nennerreihe in die Zählerreihe gerade so dividiert, als ob es sich bloß um Polynome handelte. In der Tat sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$
$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots,$$

und sei zunächst $b_0 \neq 0$. Dann hat man nach dem Cauchy-Taylorschen Lehrsatze

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots.$$

Um die Koeffizienten c_n nun wirklich zu berechnen, multipliziere man diese Gleichung mit $\varphi(z)$; so kommt:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)$$
$$= b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0) z + (b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0) z^2 + \cdots.$$

Bringt man nun noch den Identitätssatz von § 12 in Anwendung, so ergibt sich:

$$b_0 c_0 = a_0,$$
$$b_0 c_1 + b_1 c_0 = a_1,$$
$$b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Das sind aber nichts anderes, als die Gleichungen, woraus sich die ersteren Terme des Quotienten zweier Polynome bestimmen, und das wollten wir eben beweisen.

Beispiel.

$$f(z) = \sin z, \qquad \varphi(z) = \cos z,$$

$$\tan z = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots} = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \cdots.$$

Wie man sich leicht überzeugt, behält das Verfahren selbst dann noch seine Gültigkeit bei, wenn die Nennerfunktion eine Wurzel m^{ter} Ordnung in $z = 0$ hat, nur tritt dann, sofern die Zählerfunktion nicht mindestens eben so oft resp. identisch verschwindet, der Hauptteil des Poles vor die Potenzreihe.

Beispiel:

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 \cdots.$$

Zusammengesetzte Funktionen. Handelt es sich um die Berechnung einer bestimmten Anzahl der Koeffizienten der Reihenentwicklung für eine zusammengesetzte Funktion, so leistet häufig das folgende Verfahren gute Dienste. Wir wollen es zunächst an einem Beispiele erläutern. Es sollen nämlich die Koeffizienten der Reihe für

$$e^{z \sin z}$$

bis zum Gliede mit z^8 wirklich ausgerechnet werden. Dazu setze man

$$w = z \sin z$$

und ziehe die Entwicklungen (1), (2) heran:

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{6} + \frac{w^4}{24} + \cdots$$

$$z \sin z = z^2 - \frac{z^4}{6} + \frac{z^6}{120} - \cdots.$$

Nun ist nach dem Satze der elementaren Reihenlehre betreffend die Multiplikation zweier absolut konvergenten Reihen

$$\begin{aligned}
1 &= 1, \\
w &= z^2 - \tfrac{1}{6} z^4 + \tfrac{1}{120} z^6 - \tfrac{1}{5040} z^8 + \cdots, \\
\tfrac{1}{2} w^2 &= \tfrac{1}{2} z^4 - \tfrac{1}{6} z^6 + \tfrac{1}{45} z^8 + \cdots, \\
\tfrac{1}{6} w^3 &= \tfrac{1}{6} z^6 - \tfrac{1}{12} z^8 + \cdots, \\
\tfrac{1}{24} w^4 &= \tfrac{1}{24} z^8 + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Ferner wird in der elementaren Reihenlehre gezeigt, daß eine endliche Anzahl von Reihen gliedweise zusammenaddiert werden können. Es handelt sich hier aber um die gliedweise Addition einer unendlichen Anzahl solcher Reihen. Daß dieser Schritt unter gewissen Bedingungen, welche hier auch erfüllt sind, wirklich gestattet ist, besagt der sogleich zu besprechende, von Weierstraß herrührende Reihensatz. Darnach erhält man die in Aussicht genommene Entwicklung:

$$e^{z \sin z} = 1 + z^2 + \tfrac{1}{3}z^4 + \tfrac{1}{120}z^6 - \tfrac{11}{560}z^8 + \cdots.$$

Ein Reihensatz.[1]) *Es mögen unendlich viele Potenzreihen vorgelegt sein:*

$$\begin{aligned} u_1(z) &= c_0^{(1)} + c_1^{(1)}z + c_2^{(1)}z^2 + \cdots, \\ u_2(z) &= c_0^{(2)} + c_1^{(2)}z + c_2^{(2)}z^2 + \cdots, \\ u_3(z) &= c_0^{(3)} + c_1^{(3)}z + c_2^{(3)}z^2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

deren alle in ein und demselben Kreise $|z| < R$ *konvergieren. Außerdem soll die Reihe*

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots$$

in jedem kleineren Kreise $|z| \leqq R' < R$ *gleichmäßig konvergieren. Die hiermit erhaltene Funktion* $f(z)$, *welche sich ja im ersten Kreise analytisch verhält, möge nach dem Cauchy-Taylorschen Lehrsatze in eine Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

entwickelt werden. Dann konvergiert jede der obigen Vertikalreihen und zwar ist

$$a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_0^{(n)}, \qquad a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_1^{(n)}, \qquad a_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_2^{(n)}, \cdots.$$

Mit anderen Worten lassen sich die unendlich vielen Potenzreihen wie Polynome zusammenfassen, indem man alle Terme gleicher Dimension in z zu einem einzigen Gliede verbindet, wodurch dann die Cauchy-Taylorsche Reihenentwicklung für die Funktion $f(z)$ gerade zu Stande kommt.

Der Beweis ist äußerst einfach. Setzt man nämlich zunächst $z = 0$, so kommt:

$$f(0) = a_0 = u_1(0) + u_2(0) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_0^{(n)}.$$

1) Man vergleiche das in § 5 gegebene Zitat auf Weierstraß.

Differentiiert man dann die Reihe

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots$$

gliedweise, was hier nach dem 5. Satze von § 5 gestattet ist, und setzt man darauf $z = 0$, so wird

$$f'(0) = a_1 = u_1'(0) + u_2'(0) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_1^{(n)}.$$

Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens ergeben sich die weiteren Relationen, um welche es sich handelt. Hiermit ist der Beweis erbracht.

In diesem Theorem ist folgender Satz enthalten.

Zusatz. *Sei*

$$\varphi(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzkreise $|w| < S$, *und sei*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

eine zweite Potenzreihe mit dem Konvergenzkreise $|z| < R$. *Sei ferner* $|a_0| < S$. *Setzt man dann*

$$w = f(z),$$

so erhält man die Cauchy-Taylorsche Reihe für die zusammengesetzte Funktion $\varphi(f(z))$, *indem man die einzelnen Terme* $b_n w^n$ *der ersten Reihe als Potenzreihen nach* z *darstellt:*

$$b_n w^n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \cdots,$$

und darauf alle Glieder gleicher Dimension zusammenfaßt:

$$\varphi(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{(n)} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_1^{(n)}\right) z + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_2^{(n)}\right) z^2 + \cdots.$$

In der Tat sei W ein Wert von w, wofür die erste Reihe absolut konvergiert und überdies $|W| > |a_0|$ ist. Alsdann bestimme man h so, daß

$$|f(z)| \leqq |W|, \qquad |z| \leqq h.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$b_0 + b_1 f(z) + b_2 [f(z)]^2 + \cdots$$

gleichmäßig, sofern $|z| \leqq h$ bleibt (Kap. 3, § 4), und darum kann man den vorausgehenden Satz in Anwendung bringen.

Nach den vorhergehenden Entwicklungen ist man jetzt im Stande, alle diejenigen formalen Prozesse zu rechtfertigen, welche zur Herstellung solcher Entwicklungen nötig sind, wofür folgende Beispiele typisch sind. Tritt eine mehrdeutige Funktion auf, so handelt es sich selbstredend immer um eine besondere Bestimmung derselben.[1])

$$\log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = z - \frac{1}{2}\,\frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{z^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{z^7}{7} + \cdots,$$

$$\arcsin(k \sin z) = kz + \frac{k(k^2 - 1)}{6} z^3 + \frac{9k^5 - 10k^3 + k}{120} z^5 + \cdots,$$

$$(1 + z)^z = 1 + z^2 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{5}{6} z^4 - \frac{3}{4} z^5 + \cdots,$$

$$\log \sin z = \log z - \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{180} z^4 - \frac{1}{2835} z^6 + \cdots.$$

Eine große Anzahl derartiger Reihenentwicklungen findet sich bei B. O. Peirce, *A Short Table of Integrals,* 1899, Ginn & Co., Boston, U. S. A., pp. 88—94. Vgl. auch Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* 1888, § 40.

Aufgabe 1. Man entwickle die folgenden Funktionen nach aufsteigenden Potenzen von z bis zum Gliede 5ter Dimension hin und bestimme den Konvergenzkreis der jeweiligen Potenzreihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu z + z^2}}, \qquad \mu \text{ reell und } |\mu| < 1,$$

$$\log(1 + e^z), \qquad \sqrt{\cos z}, \qquad \frac{z^4 - 7z^3 - 2z^2 + z + 8}{z^3 - 2z^2 + z - 2}.$$

Aufgabe 2. Man zeige daß

$$\log\left(a + \sqrt{a^2 + z^2}\right) = \log 2a + \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{2a^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{z^4}{4a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{z^6}{6a^6} + \cdots,$$

sofern a reell und positiv ist und $\sqrt{a^2 + z^2}$ so bestimmt wird, daß $\sqrt{a^2 + z^2}_{z=0} = a$ wird.

Aufgabe 3. Man entwickle

$$\log\left(\sqrt{z^2 + 1} - z\right)$$

für große Werte von z.

1) Zur einwandfreien Begründung dieser Entwicklungen, sofern es sich um mehrdeutige Funktionen handelt, bedarf man noch des Satzes von Kap. 1, § 10, für Funktionen eines komplexen Arguments ausgesprochen; vgl. Kap. 8, § 9.

§ 15. Der Laurentsche Satz.

Sei S ein endlicher Bereich, dessen Begrenzung aus zwei einfachen regulären geschlossenen Kurven besteht, und sei $f(z)$ eine in S inklusive des Randes stetige, innerhalb S analytische Funktion. Stellt man $f(z)$ dann in S mittels der Cauchyschen Integralformel dar, so hat man:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

wobei sich C auf die äußere, Γ auf die innere Begrenzung von S bezieht. Nun betrachte man jedes dieser Integrale für sich. Nach dem Hauptsatz von § 1 stellt das erste eine im Innern der Kurve C analytische Funktion von z vor, während das zweite eine überall außerhalb der Kurve Γ, auch im Punkte $z = \infty$ analytische Funktion von z definiert. Darin liegt der Kern des Laurentschen Sates.

Laurentscher Satz.[1]) *Sei $f(z)$ eine innerhalb eines Kreisrings K analytische Funktion von z. Dann läßt sich $f(z)$ in zwei Funktionen spalten:*

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

wo $\varphi(z)$ überall innerhalb der äußeren, $\psi(z)$ überall außerhalb der inneren Begrenzung von K, inklusive des Punktes $z = \infty$, analytisch ist.

Sei S ein konzentrischer Kreisring, welcher mit Einschluß seines Randes innerhalb K liegt. Dann gilt der Satz nach dem Vorausgeschickten zunächst für diesen Bereich, also ist

$$f(z) = \overline{\varphi}(z) + \overline{\psi}(z),$$

wo

$$\overline{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \qquad \overline{\psi}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

ist. Jetzt lasse man die innere Begrenzung Γ von S an die Begrenzung von K heranrücken. Dadurch wird der Bereich, in welchem die Funktion $\overline{\psi}(z)$ definiert ist, erweitert, ohne daß sich der Wert dieser Funktion in einem einmal erreichten Punkte z dabei änderte. Denn die Funktionen $f(z)$, $\overline{\varphi}(z)$ hängen ja von Γ überhaupt nicht ab, und $\overline{\psi}(z) = f(z) - \overline{\varphi}(z)$. Auf diese Weise wird die Funktion $\overline{\psi}(z)$ ganz

1) Laurent, *Comptes Rendus*, Bd. 17, (1843) S. 938. Weierstraß war bereits im Jahre 1841 im Besitze dieses Satzes nebst einem Beweise; vergleiche eine s. Z. nicht veröffentlichte Abhandlung, *Werke*, Bd. 1, S. 51.

bis an die innere Begrenzung des Kreisringes K heran fortgesetzt und es entsteht also eine Funktion $\psi(z)$, wie der Satz sie verlangt. Verfährt man mit der Funktion $\bar{\varphi}(z)$ ebenso, indem man C an die äußere Begrenzung von K heranrücken läßt, so erhält man die in Aussicht gestellte Funktion $\varphi(z)$, und der Beweis ist hiermit fertig.

Von dem Umstande, daß der Radius der inneren Begrenzung von K positiv, derjenige der äußeren Begrenzung endlich ist, hat man beim Beweise des Satzes keinen Gebrauch gemacht; daher bleibt der Satz für diese beiden Grenzfälle noch bestehen. Auch brauchen die Begrenzungen des Ringes keine Kreise zu sein. Der Satz gilt mithin allgemein für einen beliebigen Bereich T, dessen Begrenzung nur im Sinne der in Kap. 5, § 7 getroffenen Definition aus zwei Stücken besteht; vgl. unten, Aufgabe 3.

Aufgabe 1. Sei $f(z)$ eine Funktion von z, die in der ganzen erweiterten Ebene mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ analytisch ist. Man zeige, daß sich $f(z)$ dann in die Summe von n Funktionen spalten läßt:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z),$$

wo $f_i(z)$ eine in der ganzen erweiterten Ebene mit Ausnahme des Punktes a_i analytische Funktion ist.

Aufgabe 2. In einem Bereich T der erweiterten Ebene, welcher von n einfachen regulären geschlossenen oder nicht geschlossenen Kurven $C_1, C_2, \ldots C_n$ der erweiterten Ebene begrenzt ist, sei $f(z)$ analytisch. Der Bereich T_i bestehe aus demjenigen Teil der erweiterten Ebene, welcher allein von der Kurve C_i begrenzt ist und, falls C_i geschlossen ist, zum Teil mit dem Bereich T zusammenfällt. Man zeige, daß sich $f(z)$ dann in die Summe von n Funktionen spalten läßt,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z),$$

wo $f_i(z)$ eine in T_i analytische Funktion von z ist.

Aufgabe 3. Sei T ein beliebiger Bereich der erweiterten Ebene, dessen Begrenzung aus mehr als einem Stück besteht; und sei L eine einfache reguläre geschlossene ganz in T verlaufende Kurve, die einen Teil der Begrenzung von T umfaßt. Die Bereiche T_1, T_2 mögen aus dem Innern von L, inkl. dieser Kurve selbst, nebst demjenigen Teil von T, welcher außerhalb L liegt, bzw. aus dem Äußern von L, inklusive dieser Kurve selbst, nebst demjenigen Teil von T, welcher innerhalb L

liegt, bestehen. Ist $f(z)$ eine in T analytische Funktion, so läßt sich $f(z)$ in die Summe von zwei Funktionen spalten:

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

wo $\varphi(z)$, $\psi(z)$ bzw. in T_1, T_2 eindeutige analytische Funktionen von z sind.

Die Laurentsche Reihe. Nach dem Cauchy-Taylorschen Lehrsatze kann man die Funktion $\varphi(z)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe entwickeln, wo a den Mittelpunkt des Kreisringes K bedeutet:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Diese Reihe konvergiert innerhalb der äußeren Begrenzung von K. Andererseits läßt sich $\psi(z)$ vermöge der Erweiterung des genannten Lehrsatzes ebenfalls in eine Potenzreihe, und zwar nach absteigenden Potenzen von $z-a$ entwickeln:

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Diese Reihe konvergiert außerhalb der innern Begrenzung von K. Daraus ergibt sich nun für $f(z)$ die Darstellung mittels der *Laurentschen Reihe:*

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Diese Reihe konvergiert im Kreisringe K und stellt die Funktion $f(z)$ dort dar.

Die Koeffizienten der Laurentschen Reihe werden durch dieselbe Integralformel gegeben, wie diejenigen der Cauchy-Taylorschen Reihe:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}},$$

wo C eine reguläre geschlossene, den Punkt $z = a$ enthaltende, in K verlaufende Kurve bedeutet; nur fällt die Beziehung zu den Ableitungen, $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ hier fort. In der Tat konvergiert die Reihe (1), sowie die daraus mittels Division durch $2\pi i(z-a)^{n+1}$ erhaltene Reihe

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^{m-n-1}$$

längs der Kurve C gleichmäßig und läßt sich daher über dieselbe gliedweise integrieren. Dabei verschwindet jedes Integral rechter Hand mit Ausnahme desjenigen, wofür $m = n$ ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{c_n}{z-a}\, dz = c_n,$$

und hiermit ist der Beweis geliefert.

Auch hier gilt die Relation

$$|c_n| \leqq M r^{-n}, \qquad n = \begin{cases} 0, & 1, & 2, \ldots \\ -1, & -2, & \ldots \end{cases}$$

wo $|z-a| = r$ einen beliebigen im Kreisringe K gelegenen Kreis und M den größten Wert von $|f(t)|$ längs desselben bedeuten.

Es gibt keine zweite Darstellung der Funktion $f(z)$ von der Form (1):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z-a)^n,$$

die mit der Laurentschen Reihe nicht identisch wäre. Die neue, sowie die daraus mittels Division durch $(z-a)^{n+1}$ erhaltene Reihe würde nämlich auch längs der Kurve C gleichmäßig konvergieren. Integriert man nun die Differenz der beiden Reihen, jede durch $(z-a)^{n+1}$ geteilt, über C, so kommt $c_n - c_n' = 0$.

§ 16. Der Goursatsche Satz.

Wir wollen jetzt über einen Satz berichten, welchen Herr Goursat gefunden hat und welcher die Grundlagen der Funktionentheorie in wünschenswerter Weise ergänzt. Bisher haben wir nämlich die Stetigkeit der Ableitung mit in die Definition der analytischen Funktion aufgenommen. Kraft der Goursatschen Untersuchung kann man diese Forderung fallen lassen, da es sich herausstellt, daß die Stetigkeit eine notwendige Folge der bloßen Existenz der Ableitung ist.

Goursat ging ursprünglich von dem Gedanken aus, den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes zu vereinfachen, indem er direkt mit dem komplexen Integral operierte, anstatt es erst in reelles und rein imaginäres zu spalten.[1]) Dabei ergab sich noch über das nächste Ziel

1) Goursat, *Acta Mathematica*, Bd. 4 (1884), S. 197.

seiner Forschung hinaus, daß man auf die Stetigkeit der Ableitung ganz verzichten kann.[1])

Der Goursatsche Satz. *Ist $f(z)$ in jedem Punkte eines Bereichs T mit einer Ableitung $f'(z)$ versehen, so wird $f'(z)$ dort stetig sein.*

Aus der Existenz einer Ableitung folgt bereits die Stetigkeit der Funktion. Zum Beweise des Satzes genügt also, unter Heranziehung des verallgemeinerten Moreraschen Satzes, zu zeigen, daß das Integral $\int f(z)\,dz$, erstreckt über den Rand Γ eines beliebigen Rechtecks R, verschwindet, wobei alle innern und Randpunkte von R in T liegen. Dies kann man in der Tat, wie folgt, dartun.[2])

Gesetzt, es wäre

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = g > 0.$$

Man zerlege R in vier kongruente Rechtecke und erstrecke das Integral über den Rand eines jeden derselben. Für mindestens eines dieser letzteren Rechtecke, r_1 werde es genannt, muß dann

$$\left|\int_{r_1} f(z)\,dz\right| > \frac{g}{4}$$

sein. Durch Wiederholung dieser Überlegung gelangt man so zu einer Reihe ineinander eingeschachtelter Rechtecke $r_1, r_2, \ldots$, wofür

$$\left|\int_{r_i} f(z)\,dz\right| > \frac{g}{4^i} \tag{1}$$

ist, und deren Seitenlängen im übrigen gegen 0 abnehmen. Hierdurch wird ein Punkt $\bar{z}$ bestimmt, welcher in jedem der genannten Rechtecke liegt.

Andererseits hat man nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe ε

$$\left|\frac{f(z)-f(\bar{z})}{z-\bar{z}} - f'(\bar{z})\right| < \varepsilon, \qquad 0 < |z-\bar{z}| < \delta.$$

Wir setzen

$$\zeta = \frac{f(z)-f(\bar{z})}{z-\bar{z}} - f'(\bar{z}), \qquad z \neq \bar{z};$$

$$\zeta = 0, \qquad z = \bar{z},$$

1) Goursat, *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 1 (1900), S. 14. In der ersten Auflage dieses Werkes, Kap. 7, §§ 16, 17 sind die Beweise dieser Sätze reproduziert, welche Goursat gegeben hat.

2) E. H. Moore, *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 1 (1900), S. 499. In dieser Arbeit gibt Moore einen neuen Beweis des verallgemeinerten Integralsatzes. Der Gebrauch des Moreraschen Satzes, um den analytischen Charakter der Funktion $f(z)$ direkt zu erweisen, kommt bei ihm nicht vor.

woraus dann folgt, daß

$$f(z) = f(\bar{z}) + (z - \bar{z}) f'(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \zeta$$

ist. Hieraus findet man:

$$\int_{\gamma_i} f(z)\, dz = \int_{\gamma_i} (z - \bar{z}) \zeta \, dz.$$

Denn die beiden ersten Terme rechter Hand lassen ja ein unbestimmtes Integral zu, welches für alle Werte von z eindeutig und stetig ist, und infolgedessen verschwindet nach § 1, (11), das bestimmte Integral dieser Terme, erstreckt über einen geschlossenen Weg.

Wir nehmen nun i so groß, daß das Rechteck r_i ganz innerhalb des Kreises $|z - \bar{z}| < \delta$ liegt. Bezeichnet man die Länge der längeren Seiten von R mit h, so wird die entsprechende Seitenlänge des Rechtecks r_i gleich $h/2^i$ sein, und die Länge des ganzen Randes von r_i wird jedenfalls nicht größer als $4h/2^i$ ausfallen. Ferner wird offenbar im Integranden des letzten Integrals

$$|z - \bar{z}| \leqq \frac{h}{2^i} \sqrt{2}$$

sein. Demgemäß erhalten wir nunmehr folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\gamma_i} (z - \bar{z}) \zeta \, dz \right| < \frac{h\sqrt{2}}{2^i} \cdot \varepsilon \cdot \frac{4h}{2^i} = \frac{4\sqrt{2}}{4^i} h^2 \varepsilon. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erkennt man, daß

$$\frac{g}{4^i} < \frac{4\sqrt{2}}{4^i} h^2 \varepsilon, \quad \text{also} \quad g < 4\sqrt{2} h^2 \varepsilon$$

ist. Nun ist aber g von der Wahl von ε unabhängig. Infolgedessen kann g nicht positiv sein, und der Beweis ist hiermit geliefert.

Dem soeben erlangten Resultat zufolge kann man den Cauchyschen Integralsatz jetzt, wie folgt, aussprechen.

Der verallgemeinerte Cauchysche Integralsatz. *Sei $f(z)$ in jedem innern Punkte eines Bereichs S mit einer Ableitung versehen, und sei $f(z)$ außerdem am Rande von S stetig. Dann verschwindet das über den ganzen Rand von S in positivem Sinne erstreckte Integral von $f(z)$:*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Denn nach dem soeben bewiesenen Satz von Goursat wird $f(z)$ im Innern von S analytisch, und hiermit erreicht man Anschluß an die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes in seiner früheren Formulierung, § 2.

Der in § 2 gegebene Beweis des Integralsatzes beruhte auf einer Trennung des Integrals in reelles und rein imaginäres, unter Heranziehung der Sätze bezüglich des Integrals $\int Pdx + Qdy$. Eine derartige Zerlegung wurde beim vorstehenden Beweise des Goursatschen Satzes nicht vorgenommen. Will man sie auch fernerhin beim Beweise des verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatzes vermeiden, so braucht man nur die Methoden von Kap. 4, § 3, direkt auf den komplexen Fall zu übertragen, indem man S nach Kap. 5, § 9 in Bereiche σ von normalem Typus zerlegt und eine Funktion

$$F(z) = \int_L f(z)\,dz$$

im Bereiche σ gerade so definiert, wie früher die Funktion $F(x, y)$ eingeführt wurde, vgl. Fig. 34. Diese Funktion $F(z)$ verhält sich zunächst im Innern von σ analytisch. In der Tat kann man hier denselben Beweis verwenden, wie bei der Begründung des Moreraschen Satzes, § 5, denn man weiß ja jetzt, daß $\int f(z)\,dz$, über den Rand eines innerhalb S gelegenen Rechtecks erstreckt, verschwindet. Daß sie auch am Rande von σ stetig ist, beweist man nun direkt. Hieraus folgt der Beweis des Integralsatzes für einen Bereich σ, indem man bloß nachweist, daß $\int f(z)\,dz$, über den oberen Rand Γ von σ hinerstreckt, den Wert $F(Z) - F(z_0)$ hat, wo z_0, Z die Endpunkte dieses Bogens bedeuten. Denn, daß das genannte Integral, über den übrigen Rand genommen, jenen Wert hat, folgt unmittelbar aus der Definition von $F(z)$.

Da der verallgemeinerte Cauchysche Integralsatz nunmehr für alle Bereiche σ feststeht, so folgt daraus seine Richtigkeit für einen allgemeinen Bereich S.

§ 17. Rückblick auf die Entwicklungen dieses Kapitels.

Der Begriff, auf welchem die Entwicklungen dieses Kapitels basieren, ist der des bestimmten Integrals:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)\,\Delta z_i = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\,.$$

Zur Einführung dieses Begriffs muß man vor allem nachweisen, daß die vorstehende Summe bei wachsendem n überhaupt gegen einen Grenzwert konvergiert. Alsdann leitet man den Hauptsatz von § 1 her und stellt den Cauchyschen Integralsatz auf, woraus sich dann die Cauchysche Integralformel unmittelbar ergibt. Hiermit ist aber auch die Grundlage für die ganze Theorie fertig, denn die Beweise der Reihensätze erfordern ja nichts spezifisches, sondern sie bedienen sich bloß der allgemeinen Methoden der modernen Analysis.

In der letzten Instanz sind es also drei spezifische Sätze, welche hier die Funktionen einer komplexen Veränderlichen der Behandlung mittels jener allgemeinen Methoden zugänglich machen, und zwar haben wir, um dieselben noch einmal explizite herzusetzen:

I) *den Konvergenzbeweis*, auf den sich die Definition des bestimmten Integrals gründet;

II) den eigentlichen Kern des Hauptsatzes von § 1, den wir jetzt, wie folgt, aussprechen wollen: *Sei Γ eine reguläre Kurve der t-Ebene und sei S ein regulärer Bereich der z-Ebene. Sei ferner $\varphi(t, z)$ eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Argumente t und z, wobei t auf Γ und z in S liegen soll. Dann stellt das Integral*

$$f(z) = \int_{\Gamma} \varphi(t, z)\, dt$$

eine in S stetige Funktion von z vor;

III) *den Cauchyschen Integralsatz.*

Diese Sätze haben wir in den früheren Paragraphen des Kapitels dadurch bewiesen, daß wir Reelles und Imaginäres jeweils trennten und die entsprechenden Sätze für reelle Funktionen heranzogen. Der Gedanke liegt jetzt nahe, *das alles ohne jene Trennung, also direkt an den komplexen Funktionen, als einheitliches Ganze aufgefaßt, zu entwickeln.* Hierbei müßte man vor allem die Summe

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)\, \Delta z_i$$

bilden und deren Konvergenz bei wachsendem n nachweisen. Zu dem Behufe wird man die betreffende Kurve am zweckmäßigsten in 2^n gleiche Bogen zerlegen und den Konvergenzbeweis zuerst für diese Teilung durchführen. Das geht aber auch ohne jegliche Schwierigkeit vermöge des auf komplexe Größen bezogenen 2. Theorems von Kap. 1, § 7.

Alsdann wird noch nachträglich durch eine leichte Untersuchung die Konvergenz für eine beliebige Zerlegung dargetan. Die in den Formeln (2) bis (8), § 1, ausgesprochenen Sätze erfolgen jetzt sofort.

Nachdem die Untersuchung nun soweit gediehen ist, sieht man leicht ein, wie der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einzuführen und mit deren Hilfe der unter II) ausgesprochene Satz zu beweisen ist. Setzt man nämlich

$$S_n = s(z, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_i, z) \Delta t_i,$$

so kommt es bloß darauf an zu zeigen, daß

$$| s(z, n') - s(z, n) | < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $n, n' \geqq m$ genommen sind, wobei m von z nicht abhängt.

Was zuletzt noch den Cauchyschen Satz III) anbetrifft, so muß man sich ja nach einem wesentlich neuen Beweise desselben umsehen. In der Tat ist auch ein solcher Beweis, wie man ihn hier braucht, im vorhergehenden Paragraphen angedeutet, und zwar geschah das im Anschluß an die von Goursat herrührenden Untersuchungen.

Hiermit ist die Begründung der Theorie nach dem neuen Gesichtspunkte bewerkstelligt. Die genaue Ausarbeitung der Einzelheiten möchten wir dem Leser als eine wertvolle Übung zur Stärkung und Verfestigung seiner Kenntnisse aufs wärmste empfehlen.

Achtes Kapitel.

Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen.

§ 1. Die Riemannsche Fläche für $w = \log z$.

Für die Veranschaulichung der Vieldeutigkeit einer reellen Funktion einer oder zweier reellen Variabelen hat man ein äußerst einfaches geometrisches Mittel, indem man die zugehörige Kurve oder Fläche konstruiert. Alsdann läßt sich diese in der Regel derart zerlegen, daß die zu untersuchende mehrdeutige Funktion in eine Reihe eindeutiger stetiger Bestandteile zerfällt, deren Zusammenhang miteinander leicht zu überschauen ist. Die entsprechende geometrische Deutung einer komplexen Funktion eines komplexen Arguments $w = f(z)$ führt dagegen auf einen vierdimensionalen Punktraum und ist deshalb weniger brauchbar.[1]) Darum verzichtet man auf eine vollständige geometrische Veranschaulichung des Wertepaares (w, z) durch ein einziges geometrisches Element und begnügt sich mit einer Vorstellung, wodurch wenigstens die verschiedenen Bestimmungen der Funktion w auseinander gehalten werden.

Fangen wir mit der Funktion

$$w = \log z = \log |z| + i \operatorname{arc} z$$

an. Aus dem ganzen Vorrat von Werten, welche diese Funktion annimmt, stellten wir uns in Kap. 6, § 15 eine eindeutige stetige Funktion her, indem wir als Bereich T die ganze z-Ebene exkl. der negativen reellen Achse nebst dem Punkte $z = 0$ wählten und dem Arcus den besonderen an die Relation:

$$-\pi < \operatorname{arc} z < \pi$$

verknüpften Wert zuwiesen. Durch diese Funktion, — den sogenannten

1) Es gibt freilich noch andere vierfach ausgedehnte Systeme geometrischer Elemente, welche man zu diesem Zwecke verwenden könnte, — beispielsweise die ∞^4 Geraden des dreidimensionalen Raumes.

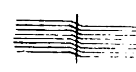
Hauptwert des Logarithmus, die sich ja in T analytisch verhält, wurde der durch die Geraden $v = \pi$, $v = -\pi$ begrenzte Streifen der $w = u + vi$-Ebene auf den Bereich T ein-eindeutig und konform abgebildet.

Auf Grund der Festsetzung:

$$(2k-1)\pi < \operatorname{arc} z < (2k+1)\pi,$$

wo k eine bestimmte positive oder negative ganze Zahl ist, entsteht nun wiederum eine in T eindeutige analytische Funktion, die T auf den durch die Geraden $v = (2k-1)\pi$, $v = (2k+1)\pi$ begrenzten Streifen, — wir wollen ihn den k^{ten} Streifen nennen, — konform abbildet. Den Punkten von T würden auf diese Weise je zwei Funktionswerte zugewiesen sein. Um dem vorzubeugen, denken wir uns noch eine zweite Ebene über der ersten ausgebreitet und, wie jene, längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten. Diese Ebene soll die Trägerin der neuen Funktionswerte sein und als $T^{[k]}$ bezeichnet werden.

Jetzt führe man für jeden positiven und negativen ganzzahligen Wert von k eine solche Ebene ein. Diese Ebenen sollen in beliebig kleinen Abständen[1]) voneinander verlaufen und nach der Größe von k geordnet werden, die den positiven Werten von k zugehörigen etwa nach oben. Hierbei stößt der Bereich $T^{[k]}$ an die negative reelle Achse von zwei Seiten her. Denjenigen Rand, welcher die positive (negative) Halbebene begrenzt, wollen wir mit C_k^+ (C_k^-) bezeichnen. Alsdann entsprechen der positive Rand C_k^+ von $T^{[k]}$ und der negative Rand C_{k+1}^- von $T^{[k+1]}$ beide der Geraden $v = (2k+1)\pi$. Demgemäß wollen wir uns diese Bereiche zu einem zusammenhängenden Ganzen dadurch verschmolzen denken, daß wir C_k^+ und C_{k+1}^- unter leichter Deformierung der Bereiche in der Nähe besagter Ränder nach oben bzw. nach unten hin zur Koinzidenz bringen. Geschieht dies für alle Werte von k: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, so entsteht hierdurch eine Fläche, welche sich nirgends durchsetzt und deren Blätter im allgemeinen aus Ebenen bestehen; nur in der Nähe der negativen reellen Achse weichen die Blätter ein wenig von Ebenen ab. Ein Querschnitt der Fläche, welcher durch eine auf der negativen reellen Achse senkrecht stehende Ebene entsteht, wird durch beigefügte Zeichnung veranschaulicht. Im übrigen entspricht dem Punkte $z = 0$ kein Punkt der Fläche, welche hier eben nicht definiert ist.


Fig. 77.

1) Man kann diese Abstände alle gleich nehmen oder sie auch so bestimmen, daß sämtliche Blätter in beliebiger Nähe der z-Ebene verlaufen, indem man die Entfernung zwischen dem k^{ten} und dem $(k+1)^{\text{ten}}$ Blatte etwa gleich $\varepsilon/(1+k^2)$ setzt und dabei $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählt.

Die hiermit konstruierte Fläche ist auf die ganze endliche w-Ebene ein-eindeutig und stetig bezogen. Sie veranschaulicht in gewisser Weise den Gesamtverlauf der Funktion $w = \log z$, indem ihre Punkte den Wertepaaren (w, z) ein-eindeutig zugeordnet sind. Läßt man den Punkt P einen beliebigen Weg auf der Fläche beschreiben und verfolgt man dabei die Änderung der Funktion w längs dieses Weges, so wird man zu einem bestimmten Endwert geführt, welcher nur dann mit dem Anfangswert übereinstimmen wird, wenn der Weg ein *auf der Fläche geschlossener* ist. Hierzu genügt nämlich nicht, daß seine Projektion auf die schlichte Ebene bloß geschlossen sei, vielmehr muß sein Endpunkt überdies in demselben Blatte liegen, wie sein Anfangspunkt. Denkt man sich jene Projektion als einen dehnbaren Faden, welcher frei in der Ebene hin- und hergeschoben werden kann, und sich auch kreuzen darf, so wird ihr stets dann und nur dann ein auf der Fläche geschlossener Weg entsprechen, wenn sie, ohne den Punkt $z = 0$ zu überschreiten, stetig auf einen Punkt $z_0 \neq 0$ zusammengezogen werden kann.

Die Abbildung der mehrblättrigen Fläche auf die w-Ebene ist zwar eine ein-eindeutige und stetige, in der Nähe der negativen reellen Achse hört sie aber auf, konform zu sein. Dieser Übelstand läßt sich auf zweierlei Weisen beseitigen. Erstens können wir den Abstand der Blätter voneinander gegen 0 abnehmen lassen, derart, daß die Abbildung immer noch mehr einer konformen zustrebt. In der Grenze fallen alle Blätter zusammen. Hierdurch wird man zur Vorstellung einer mehrfach zählenden Ebene geführt, deren Blätter nach obiger Vorschrift zusammenhängen.

Eine andere Weise, die ausnahmslose Konformität der Abbildung aufrecht zu erhalten, besteht darin, den Abstand der Blätter voneinander, der Anschaulichkeit halber, immer noch als klein, jedoch jetzt als unveränderlich zu nehmen, und dann eine Nicht-Euklidische Maßbestimmung auf der Fläche einzuführen, wobei die Länge einer Kurve als gleich der entsprechenden Länge ihrer Projektion auf die z-Ebene, und ebenso der Winkel, unter welchem sich zwei Kurven schneiden, als gleich dem Winkel, unter welchem sich ihre Projektionen auf die z-Ebene schneiden, erklärt werden. Welcher der beiden Vorstellungen man sich auch immer bedienen möge, man denkt sich doch die mehrblättrige Fläche selbst in der Nähe der Verzweigungsschnitte als konform auf die schlichte Ebene bezogen.

Die hiermit erklärte Fläche heißt die *Riemannsche Fläche*[1]) für

1) Riemann, *Inauguraldissertation*, Nr. 5, 1851, *Werke*, S. 7.

die Funktion $\log z$. Im Punkte $z = 0$ hängen unendlich viele Blätter zusammen, welche sich um diesen Punkt herumwinden und verschiedenen Bestimmungen oder *Zweigen* der Funktion entsprechen. Demgemäß heißt dieser Punkt nach Riemann ein *Windungs-* oder *Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung*. Er gehört nicht zur Fläche. Ähnliches gilt auch vom Punkte $z = \infty$. Die Fläche ist ausnahmslos ein-eindeutig und konform auf die endliche w-Ebene abgebildet. Ferner heißt die negative reelle Achse ein *Verzweigungsschnitt*. Er verbindet hier die beiden Punkte $z = 0$ und $z = \infty$. Seine genaue Lage ist belanglos, so lange er nur diese beiden Punkte miteinander verbindet und sich selbst nicht überschneidet. So hätte man ebenso gut die positive reelle Achse oder die Kurve $y = x \log x$ nehmen können. Die Begrenzungen der Streifen in der w-Ebene hätten sich dann auch in entsprechender Weise verschoben und wären insbesondere nicht stets

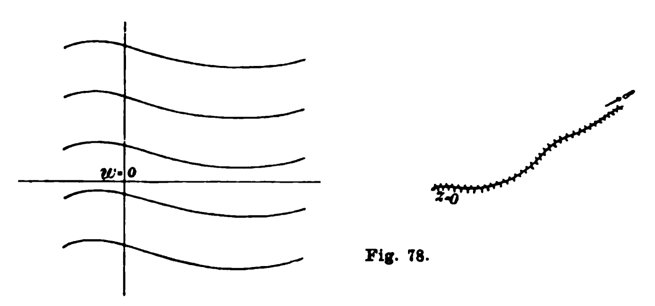


Fig. 78.

geradlinig geblieben. Dabei entstehen aber die Streifen nach wie vor alle aus einem einzigen derselben, indem dieser parallel der imaginären Achse um Vielfache von 2π verschoben wird.

Die ebene Riemannsche Fläche kann man in leicht ersichtlicher Weise auf die Kugel stereographisch projizieren. Im vorliegenden Falle entsteht dann eine mehrfach überdeckte Kugelfläche, deren Blätter sich unendlich oft um die beiden Pole herumwinden, sonst aber schlicht verlaufen. Auf der Kugel erscheinen übrigens die beiden Verzweigungspunkte als gleichberechtigt.[1])

Auch die stereographische Projektion der w-Ebene ist von Interesse. Dabei gehen die Streifen in Sicheln über, (wenn diese Bezeichnung für eine ähnlich gestaltete Figur auf der Kugel gestattet ist,) welche im Nordpol alle eine gemeinsame Tangente haben, und

1) Der Leser wird fernerhin auf die treffliche Auseinandersetzung des Begriffs der Riemannschen Fläche bei Burkhardt, *Analytische Funktionen*, 5. Abschnitt verwiesen.

deren jede ein volles Blatt der z-Fläche vertritt. Hierdurch springt auch die Tatsache in die Augen, daß die Funktion e^w in der Nähe des wesentlichen singulären Punktes $w = \infty$ jedem vorgegebenen Werte beliebig nahe kommt.

Dreht man die Kugel endlich durch einen Winkel von 180 Grad um denjenigen Durchmesser, dessen Endpunkte den Werten $w = 1, -1$

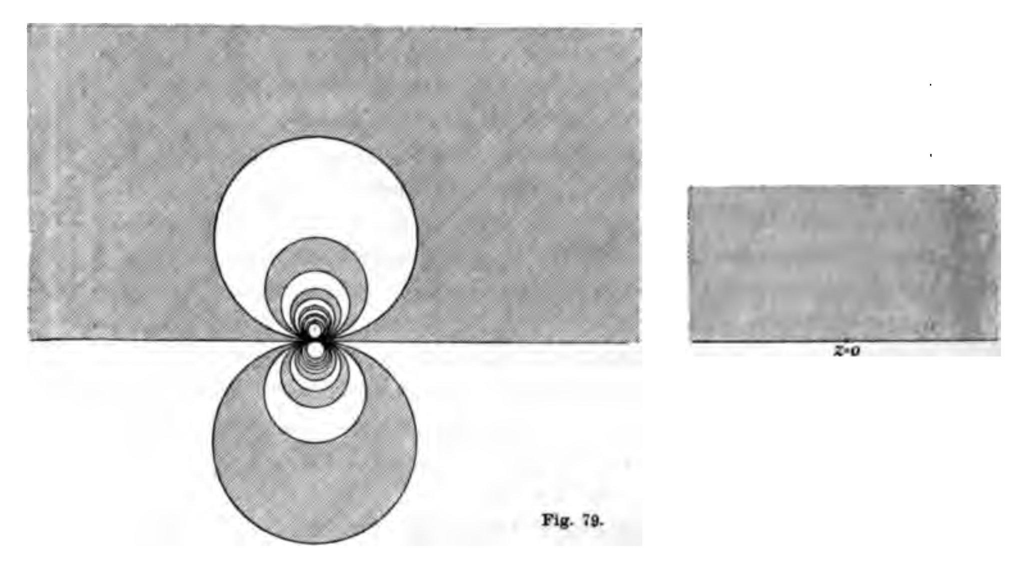


Fig. 79.

entsprechen, und projiziert man sie dann wieder auf die w-Ebene zurück, so erhält man die Abbildung, welche der Funktion

$$z = e^{1/w}$$

entspricht.

§ 2. Die Riemannsche Fläche für $w = z^m$.

Sei zunächst $m = 1/n$, wo n eine natürliche Zahl ist, und man setze:

$$w = z^{1/n}, \quad z = re^{\varphi i}, \quad w = Re^{\Phi i}.$$

Als Bereich T nehme man die ganze z-Ebene exklusive der positiven reellen Achse nebst dem Punkte $z = 0$. Durch passende Bestimmung des Funktionswertes in jedem Punkte von T (vgl. Kap. 6, § 12) entsteht dann eine in T eindeutige analytische Funktion von z, die T auf das Innere des Winkels

$$0 < \Phi < \frac{2\pi}{n}, \qquad 0 < R < \infty$$

in der w-Ebene ein-eindeutig und konform abbildet. Diesen ersten

Bereich bezeichne man mit $T^{[1]}$ und breite man $n-1$ weitere ähnliche Bereiche $T^{[2]}, \ldots T^{[n]}$ über der z-Ebene aus, wobei $T^{[k+1]}$ unter $T^{[k]}$ liegen möge. Dann kann man letztere durch zweckmäßige Bestimmung des Funktionswerts in jedem ihrer Punkte bzw. auf die weiteren Winkel

$$(k-1)\frac{2\pi}{n} < \Phi < k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 2, \ldots n,$$

konform abbilden. Jetzt wird man die n Blätter in gehöriger Weise miteinander verbinden und zwar so, daß man zuerst den negativen Rand des ersten mit dem positiven Rande des zweiten Blattes (vgl. § 1), sodann den negativen Rand des zweiten mit dem positiven Rande des dritten Blattes usw. zur Koinzidenz bringt. Schließlich bleiben nur noch zwei Ränder übrig, nämlich der positive Rand des ersten und der negative Rand des n-ten Blattes. Diese entsprechen einander gegenseitig und sollen deshalb auch zusammengefügt werden, was allerdings erfordert, daß die Fläche sich durchsetzt, wofern wir die Vorstellung eines vierdimensionalen Raumes nicht heranziehen wollen. Die Linien, längs deren ein Blatt ein anderes durchstößt, sind indessen für beide Blätter belanglos. Denkt man sich endlich den Abstand der Blätter voneinander als klein, so gelangt man, wie in § 1, zur Riemannschen Fläche für die Funktion $z^{1/n}$.

Im Punkte $z = 0$ hängen n Blätter im Zyklus zusammen, deshalb heißt der Punkt ein *Verzweigungspunkt* $(n-1)$-*ter Ordnung*. Ist insbesondere $n = 2$, so spricht man von einem *einfachen* Verzweigungspunkte. Wie wir später sehen werden, kann man sich einen Verzweigungspunkt $(n-1)$ter Ordnung als durch das Zusammenrücken von $n-1$ einfachen Verzweigungspunkten entstanden denken. Ähnliches gilt auch vom Punkte $z = \infty$. Durch stereographische Projektion der ebenen Fläche auf die Kugel werden die beiden Verzweigungspunkte unter einen einheitlichen Gesichtspunkt gebracht. Den Übergang von der z- zur w-Kugel kann man sich übrigens in ähnlicher Weise bewerkstelligt denken, wie in Kap. 6, § 12 bei der Überführung des Kugelzweiecks der z-Kugel in die volle w-Kugel des näheren auseinandergesetzt wurde.

Die n-blättrige Umgebung des Verzweigungspunktes $z = 0$ wird auf die schlichte Umgebung des Punktes $w = 0$ ein-eindeutig und stetig und, vom Punktepaare $w = 0$, $z = 0$ abgesehen, auch konform bezogen. Ein solcher Punkt wie $w = 0$, also ein Punkt, dessen schlichte Umgebung auf die Umgebung eines Verzweigungspunktes endlicher Ordnung abgebildet wird, heißt ein *ausgezeichneter* oder *merkwürdiger*

Punkt der w-Ebene oder Fläche, und zwar ein solcher *von der* $(n-1)$*-ten Ordnung*, wenn der entsprechende Verzweigungspunkt diese Ordnung hat. In einem ausgezeichneten Punkte verhält sich die Funktion analytisch, oder aber sie hat dort einen Pol.

Wir heben noch einmal hervor, daß es auf die besondere Form des Verzweigungsschnittes keineswegs ankommt. Nur die Verzweigungspunkte stehen fest. Statt der positiven reellen Achse hätte man als Verzweigungsschnitt jede andere Kurve nehmen können, die nur die beiden Verzweigungspunkte $z = 0, \infty$ miteinander verbindet und sich selbst nicht überschneidet.

Durch die Funktion $z^{1/n}$ wird also die n-blättrige Riemannsche Fläche ausnahmslos ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform, auf die schlichte Ebene abgebildet.[1]) Nur in den Verzweigungspunkten hört die Beziehung auf, konform zu sein. In der Tat wird dort ein Winkel α, unter welchem zwei Kurven der z-Ebene zusammenstoßen, auf den n-ten Teil desselben, α/n, verkleinert. Aber auch die Größe der Figuren wird unendlich verändert. Genauer gesagt: Sind Δz, Δw zwei entsprechende dem Punkte $z = 0$ bzw. $w = 0$ benachbarte Punke, so ist

$$|\Delta w| = |\Delta z|^{\frac{1}{n}},$$

wonach sich die Entfernungen dieser Punkte von den beiden festen Punkten $z = 0$ bzw. $w = 0$ als unendlich kleine Größen verschiedener Ordnungen erweisen:

$$\lim_{\Delta z = 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \infty, \qquad \lim_{\Delta z = 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|^{1/n}} = 1.$$

Einem beliebigen Werte von z entsprechen im allgemeinen n verschiedene Werte von w. Nähert sich z dem Verzweigungspunkte $z = 0$, so nähern sich zugleich die entsprechenden n Werte von w ein und demselben Grenzwerte, nämlich der 0, welchen sie denn auch in der Grenze wirklich erreichen, so daß also im Verzweigungspunkte $z = 0$ n Werte der Funktion zusammenfallen.

Sei jetzt $m = p/q$ eine beliebige rationale Zahl, wobei $q > 0$ und p teilerfremde ganze Zahlen sind. Durch Einführung einer dritten Variabelen t:

$$z = t^q, \qquad w = t^p$$

wird die schlichte t-Ebene nach dem Vorhergehenden einmal auf eine

1) Was die Konformität der Abbildung in der Nähe eines Verzweigungsschnittes anbetrifft, so denken wir uns eine ähnliche Festsetzung getroffen, wie in § 1.

q-blättrige z-Fläche, sodann auch auf eine p-blättrige w-Fläche[1]) abgebildet. Und nun sieht man, daß diese t-Ebene hiermit geradezu eine ein-eindeutige Beziehung zweier Riemannscher Flächen aufeinander vermittelt, wovon die eine über der z-Ebene ausgebreitet ist und zur Veranschaulichung der Funktion

$$w = z^{p/q}$$

dient, während die andere die w-Ebene mehrfach überdeckt und in der Vieldeutigkeit der inversen Funktion

$$z = w^{q/p}$$

Wandel schafft.

Ist endlich m eine irrationale oder eine komplexe Zahl, so hat man

$$w = z^m = e^{m \log z}, \qquad z = w^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \log w}.$$

Es stellt sich mithin in beiden Ebenen eine unendlich vielblättrige Fläche ein, gerade wie die z-Fläche für die Funktion $w = \log z$.

Satz. *Ist $f(z)$ im Punkte z_0 analytisch und nimmt $f(z)$ dort den Wert $w_0 = f(z_0)$ m-mal an, oder hat $f(z)$ in z_0 einen Pol m-ter Ordnung, so bildet die Funktion*

$$w = f(z)$$

die schlichte Umgebung von z_0 auf die Umgebung eines in w_0 resp. in $w = \infty$ befindlichen Verzweigungspunktes $(m-1)$-ter Ordnung ab.

Setzen wir w_0 als endlich voraus, so ist nach Kap. 7, § 8:

$$(1) \qquad w - w_0 = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

Sei b eine bestimmte m-te Wurzel von $\varphi(z_0)$. Dann läßt sich nach Kap. 6, § 7 eine Funktion $Z = \psi(z)$ bestimmen, welche im Punkte z_0 analytisch ist, dort den Wert b annimmt, und endlich in der Umgebung von z_0 der Gleichung

$$\varphi(z) = Z^m$$

genügt. Demgemäß kann man die Gleichung (1) durch die Gleichung

$$(2) \qquad w - w_0 = \{(z - z_0)\psi(z)\}^m$$

ersetzen, sofern es sich bloß um solche Lösungen (w, z) von (1) handelt, wofür z der betreffenden Umgebung von z_0 angehört.

1) Der Fall $p < 0$ wird vermöge der Transformationen $w = 1/w_1$, $w_1 = t^{-p}$ erledigt.

Wir wollen jetzt eine neue Variabele t durch die Relation:

$$t = (z - z_0)\,\psi(z) \tag{3}$$

einführen. Hierdurch wird die Umgebung von z_0 ein-eindeutig und konform auf diejenige von $t = 0$ bezogen, denn

$$\left.\frac{dt}{dz}\right|_{z=z_0} = \psi(z_0) \neq 0.$$

Andererseits wird w mit t wegen (2) und (3) durch die Beziehung verknüpft:

$$w - w_0 = t^m,$$

so daß also die schlichte Umgebung von $t = 0$ auf die Umgebung eines in w_0 befindlichen Verzweigungspunktes $(m-1)$-ter Ordnung abgebildet wird. Hieraus ergibt sich der zu beweisende Satz.

An die Entwicklungen dieses Paragraphen knüpfen wir noch einen zahlentheoretischen Satz:

Es ist

$$\omega_1^k + \omega_2^k + \cdots + \omega_n^k = 0,$$

wo $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die *n n-ten Einheitswurzeln sind und k eine beliebige, nicht durch n teilbare ganze Zahl bedeutet.*

Es genügt offenbar, den Beweis für den Fall zu führen, daß $0 < k < n$ ist. Sei

$$w^n = z, \tag{4}$$

und man bezeichne mit $w_1, \ldots w_n$ die den verschiedenen Blättern der Riemannschen Fläche entsprechenden Bestimmungen der Funktion w. Bildet man dann die Funktion

$$w_1^k + w_2^k + \cdots + w_n^k,$$

so hat man vor allem eine eindeutige Funktion von z vor sich, welche in jedem Punkte $z \neq 0$ analytisch und selbst für $z = 0$ stetig ist. Daher muß sie auch für $z = 0$ analytisch sein, sie erweist sich somit als eine ganze Funktion $g(z)$. Da nun endlich

$$\lim_{z=\infty} \frac{g(z)}{z} = 0$$

ist, so folgt:

$$g(z) = 0.$$

Jetzt bleibt nur noch übrig, den Wert $z = 1$ in (4) einzutragen, und der Beweis ist fertig.

Hierher gehört auch der **Argandsche Beweis**[1]) des **Fundamentalsatzes der Algebra.** *Sei*

$$G(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 \neq 0, \qquad n > 0,$$

ein beliebiges Polynom. Dann hat $G(z)$ eine Wurzel.

In der Tat ist $|G(z)|$ eine reelle positive stetige Funktion von x, y $(z = x + iy)$, welche beim Grenzübergang $z = \infty$ unendlich wird, und daher notwendig im Endlichen ein minimum minimorum erreicht. Sei z_0 ein Punkt, wofür dies eintritt. Es muß dann

$$|G(z_0)| = 0, \text{ und somit auch } G(z_0) = 0$$

sein. Wäre nämlich $|G(z_0)| > 0$, so ziehe man die durch die Funktion

$$w = G(z)$$

definierte konforme Abbildung in Betracht. Dabei geht die schlichte Umgebung von z_0 in eine schlichte Umgebung von $w_0 = G(z_0)$ resp. in eine Windungsfläche um letzteren Punkt über. In beiden Fällen gibt es aber Bildpunkte w, deren Abstand vom Punkte $w = 0$ weniger als $|w_0|$ beträgt, also dementsprechend Werte z, wofür $|G(z)| < |G(z_0)|$ ist, was der Voraussetzung bezüglich z_0 zuwiderläuft. Hiermit ist der Beweis erbracht.

Aufgabe. Man zeige, daß $z = \infty$ ein ausgezeichneter Punkt $(n-1)$-ter Ordnung für die Funktion $w = f(z)$ sein wird, falls $f(z)$ einen Pol n-ter Ordnung oder eine n-fache Wurzel dort hat, oder den Wert $b = f(\infty)$ n-mal annimmt.

§ 3. Die Riemannsche Fläche für eine gebrochene Potenz einer rationalen Funktion.

Wir wollen die Riemannsche Fläche für die Funktion

$$(1) \qquad w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

konstruieren, wo a, b, c drei beliebige getrennt liegende Punkte der z-Ebene sind. In diesen Punkten hat w nur den einen Wert 0, sonst nimmt w zwei verschiedene Werte an. Demgemäß breiten wir zwei Blätter über der z-Ebene aus, legen dann durch a, b, c eine Kurve $\mathfrak{C}$,

---

1) Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris, 1806; 2. Aufl., Paris, 1874, S. 118.

welche wir noch nach der einen Richtung hin ins Unendliche fortsetzen, und schneiden die beiden Blätter längs 𝔈 auf. Es kommt uns nun vor allem darauf an, zu zeigen, daß wir die beiden Bestimmungen von w den Punkten der zerschnittenen Blätter so zuordnen können, daß zwei daselbst eindeutige analytische Funktionen zu stande kommen.

Der Beweis gestaltet sich durchaus elementar, indem wir uns einer expliziten Darstellung der beiden w-Werte bedienen. Setzen wir nämlich

(2) $$z - a = r_1 e^{\theta_1 i}, \quad z - b = r_2 e^{\theta_2 i}, \quad z - c = r_3 e^{\theta_3 i},$$

so läßt jeder der Winkel θ_i eine Bestimmung zu, welche in besagtem Bereiche eindeutig und stetig verläuft. In der Tat sei z_0 ein beliebiger innerer Punkt des Bereiches und sei $\theta_1^{(0)}$ eine Bestimmung von θ_1 in z_0. Läßt man nun z, von z_0 ausgehend, einen beliebigen geschlossenen Weg durchlaufen, der 𝔈 auch überschreiten darf und nur nicht durch $z = a$ gehen soll, während sich θ_1 zugleich mit z stetig ändert, so kann θ_1 nach vollendeter Beschreibung besagten Weges offenbar einen von $\theta_1^{(0)}$ verschiedenen Wert erhalten, falls der Weg den Punkt $z = a$ umkreist hat. Verabreden wir uns indessen, daß er 𝔈 nicht passieren soll, so leuchtet schon ein, daß ein solches Vorkommnis hiermit ausgeschlossen ist. Hieraus erhellt ferner, daß, wenn wir z_0 mit einem zweiten Punkte z des bewußten Bereiches durch irgend zwei, 𝔈 nicht überschreitende Kurven verbinden und dann θ_1 längs beider Kurven stetig fortsetzen, θ_1 damit beidemal den nämlichen Endwert in z erhalten muß.

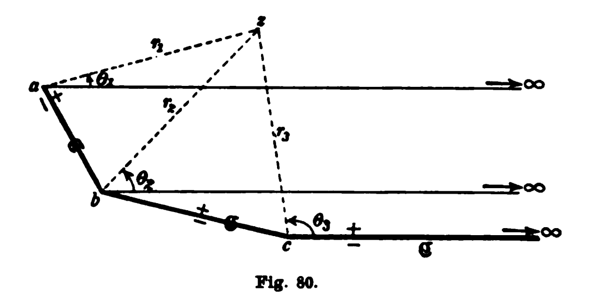


Fig. 80.

Um einen strengen Beweis für die Möglichkeit der gewünschten Bestimmungen von θ_i zu liefern, wählen wir die Bezeichnungen

$$a = a' + ia'', \quad b = b' + ib'', \quad c = c' + ic''$$

so, daß

$$a'' \geqq b'' \geqq c''$$

wird, und legen wir ferner durch jeden dieser Punkte einen Halbstrahl (a, ∞), (b, ∞), (c, ∞), der mit der positiven reellen Achse den Winkel 0 einschließt. Sei z ein beliebiger von a, b, c verschie-

dener Punkt der Ebene. Dann setzen wir

$$z - a = r_1 e^{\varphi_1 i}, \quad z - b = r_2 e^{\varphi_2 i}, \quad z - c = r_3 e^{\varphi_3 i},$$

wobei

$$0 \leqq \varphi_i < 2\pi, \qquad i = 1, 2, 3,$$

genommen werden soll. Im übrigen soll für den Fall, daß $a'' = b''$ sein sollte, $a' < b'$ genommen werden; und ebenso $b' < c'$, wenn $b'' = c''$ ist.

Als Kurve $\mathfrak{C}$ wollen wir jetzt die gebrochene Linie nehmen, die aus den geraden Strecken (a, b), (b, c) und dem Halbstrahl (c, ∞) besteht. In dem durch $\mathfrak{C}$ und den Halbstrahl (a, ∞) abgegrenzten, unterhalb (a, ∞) gelegenen Teil der Ebene sei

$$\theta_1 = \varphi_1 - 2\pi;$$

sonst sei $\theta_1 = \varphi_1$. Liegen insbesondere sowohl b als c auf (a, ∞), so soll ausnahmslos $\theta_1 = \varphi_1$ sein. Ebenso sei in dem durch (b, ∞), (b, c) und (c, ∞) abgegrenzten, unterhalb (b, ∞) gelegenen Teil der Ebene

$$\theta_2 = \varphi_2 - 2\pi;$$

sonst aber sei $\theta_2 = \varphi_2$. Sollte dagegen c auf (b, ∞) liegen, so sei stets $\theta_2 = \varphi_2$. Endlich sei $\theta_3 = \varphi_3$. Hiermit haben wir solche Bestimmungen von θ_i gewonnen, wie wir sie wünschten.

Um nunmehr die in Aussicht genommene Verteilung der w-Werte in zwei Klassen zu erzielen, genügt es,

$$(3) \qquad w_1 = \sqrt{r_1 r_2 r_3}\, e^{\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2} i}, \quad w_2 = -w_1,$$

zu setzen.

Untersuchen wir jetzt das Verhalten dieser Funktionen längs $\mathfrak{C}$. Am negativen Ufer der ersten Strecke (a, b) von $\mathfrak{C}$ nimmt θ_1 Werte an, welche um 2π größer als die entsprechenden Werte am positiven Ufer sind. Dagegen haben θ_2 und θ_3 an beiden Ufern gleiche Werte. Infolgedessen stimmt dort w_1^+ mit w_2^- und ebenso w_1^- mit w_2^+ überein. Dementsprechend wollen wir das positive Ufer des ersten Blattes mit dem negativen Ufer des zweiten, und gleichfalls das positive Ufer des zweiten mit dem negativen Ufer des ersten Blattes längs dieser Strecke verbinden.

Gehen wir weiter und ziehen jetzt die Strecke (b, c) in Betracht, so zeigt sich hier, daß sowohl θ_1 als θ_2 am negativen Ufer um 2π größer als am positiven Ufer sind, während θ_3 an beiden Ufern

gleiche Werte erhält. Daher bleibt der Exponentialfaktor eindeutig längs der Strecke (b, c), und jedes der beiden Blätter darf mithin dort wieder zu einem schlichten Blatte ergänzt werden.

Was endlich die letzte Strecke (c, ∞) von $\mathfrak{C}$ anbetrifft, so konstatiert man hier ein ähnliches Verhalten, wie längs der ersten Strecke (a, b), so daß also die beiden Blätter längs dieser Linie ineinander übergehen.

Hiermit ist die Riemannsche Fläche fertig. Sie hat vier Verzweigungspunkte: $z = a, b, c, \infty$. Heben wir wiederum an dieser hervor, daß die genaue Lage der Verzweigungsschnitte belanglos ist, nur die Verzweigungspunkte stehen fest. So könnten wir beispielsweise jeden anderen der Verzweigungspunkte mit dem Punkte $z = \infty$, und darauf die beiden anderen miteinander durch Verzweigungsschnitte verbinden. Das Resultat würde eine ebenso brauchbare Riemannsche Fläche für die vorgelegte Funktion sein.

Betrachten wir jetzt die Riemannsche Fläche für w, wo

$$(4) \qquad w^2 = (z - a)^2 (z - c)$$

ist. Hier legen wir vorab wieder eine Kurve $\mathfrak{C}$ durch die Punkte $z = a, c, \infty$, setzen ferner

$$z - a = r e^{\theta i}, \quad z - c = r' e^{\theta' i},$$

und erhalten so, wie vorhin, eindeutige stetige Bestimmungen von θ, θ', woraus wir dann zwei in der aufgeschnittenen Ebene eindeutige analytische Funktionen:

$$w_1 = r \sqrt{r'} e^{(\theta + \frac{1}{2}\theta')i}, \quad w_2 = -w_1$$

konstruieren. Wenn wir nun aber die Verbindung zwischen den beiden dazugehörigen Blättern herstellen, so zeigt sich, daß diese längs der Strecke (a, c) beide schlicht verlaufen, erst die Strecke (c, ∞) liefert einen Verzweigungsschnitt. Im Punkte $z = a$ fallen also hier zwei Werte der Funktion w zusammen, ohne jedoch zu einer Verzweigung Anlaß zu geben. Hierüber vgl. man ferner § 17.

Wir können dieses Vorkommnis in ein helles Licht setzen, indem wir von der früheren Funktion w der Gleichung (1) nebst der zugehörigen Riemannschen Fläche ausgehen, und dann den Verzweigungspunkt b als veränderlich ansehen. Lassen wir b an a heranrücken, so wird dabei der Verzweigungsschnitt (a, b), unter geeigneter Festlegung derselben, immer kürzer und schrumpft noch in der Grenze

zu einem Punkte zusammen. Hiermit hört aber auch die Verzweigung auf, denn in einem einzigen isolierten Punkte dürfen zwei Blätter einer Riemannschen Fläche niemals miteinander zusammenhängen, derart, daß ein beweglicher Punkt von dem einen Blatte ins andere an einer solchen Stelle übergehen könnte, — es ist dies eben eine Verabredung betreffend die Auffassung einer Riemannschen Fläche, welche wir hiermit ein für allemal getroffen haben wollen.

Die in diesem Paragraphen besprochenen Riemannschen Flächen sind dem Werke von Neumann, *Abelsche Integrale*, 2. Aufl., 1884, Kap. 4, § 4 entnommen.

Aufgabe. Man stelle die Riemannschen Flächen für folgende Funktionen her:

α) $$w = \sqrt{(z - c_1) \cdots (z - c_n)}.$$

Hier stellt sich eine Verzweigung im Punkte $z = \infty$ ein oder nicht, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

β) $$w = \sqrt[3]{\frac{z - a}{z - c}}.$$

Im Punkte $z = \infty$ findet hier keine Verzweigung statt

γ) $$w = \sqrt[3]{\frac{(z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_m)^{k_m}}{(z - b_1)^{l_1} \cdots (z - c_n)^{l_n}}}.$$

δ) $$w = \sqrt[3]{\frac{z - a}{(z - c)^2}} + \sqrt{z - b}.$$

ε) $$w^6 = (z - a)^2 (z - b)^3.$$

Die Funktion w hat hier zwei Verzweigungspunkte 2. Ordnung im Punkte $z = a$, drei einfache Verzweigungspunkte in $z = b$, und einen Verzweigungspunkt 5. Ordnung im Punkte $z = \infty$.

Der Leser kann sich leicht weitere derartige Beispiele bilden. Auch ist es nicht schwierig, den allgemeinen Fall einer beliebigen rationalen Funktion und einer beliebigen rationalen Potenz: $w^n = R(z)$ zu erledigen; man fange etwa mit $w^n = G(z)$ an, wo $G(z)$ ein Polynom und $n = 2, 3, \ldots$ ist.

§ 4. Die Riemannsche Fläche für die Funktion w, wo $w^3 - 3w = z$.

In den vorhergehenden Fällen sind wir von einer expliziten Darstellung der Funktion ausgegangen, der wir dann ohne weiteres entnahmen, welche Werte wir zusammenfassen mußten, um eine ein-

deutige, stetige Funktion herzustellen und somit die Riemannsche Fläche aufzubauen. Wir wollen jetzt eine Methode kennen lernen, wodurch wir die Riemannsche Fläche auch für eine durch eine nicht aufgelöste Gleichung gegebene Funktion konstruieren können. Zu dem Zwecke behandeln wir zuerst das Beispiel[1])

$$(1) \qquad w^3 - 3w = z.$$

Zunächst sieht man, daß z, als Funktion von w betrachtet, für alle endlichen Werte von w eindeutig und analytisch ist. Ist also (w_0, z_0) ein der Gleichung (1) genügendes Wertepaar, so läßt sich die Funktion $z = f(w)$ in der Nähe der Stelle $w = w_0$, $z = z_0$ nach Kap. 6, § 7 umkehren, sofern nur

$$\left[\frac{dz}{dw}\right]_{w = w_0} = 3w_0^2 - 3 \neq 0$$

ist, also sicher für alle Wertepaare (w_0, z_0) mit Ausnahme der beiden:

$$\left.\begin{matrix} w' = -1 \\ z' = 2 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} w'' = 1 \\ z'' = -2 \end{matrix}\right\}.$$

Nun sind das aber gerade diejenigen w-Werte, wofür die Gleichung (1), als eine algebraische Gleichung zur Bestimmung von w betrachtet, gleiche Wurzeln erhält, nämlich die Werte, wofür

$$\frac{\partial}{\partial w}(w^3 - 3w - z) = 3w^2 - 3 = 0$$

ist. Aus dem Grunde wird man schon vermuten, daß sich die entsprechenden Punkte $z = 2, -2$ als Verzweigungspunkte für gewisse Bestimmungen der Funktion erweisen werden.

Jedem Werte von $z \neq 2, -2$ entsprechen also drei verschiedene Werte von w. In der Nähe eines solchen Punktes z_0 lassen sich ferner diese Werte nach dem soeben angeführten Satze so zusammenfassen, daß die drei Systeme je eine im Punkte z_0 analytische Funktion bilden, wodurch denn auch die Umgebung von z_0 auf die Umgebungen der drei zugehörigen Punkte der w-Ebene konform bezogen wird, Kap. 6, § 8. Dementsprechend wollen wir drei Blätter über der

1) Klein, *Leipziger Vorlesung* 1881/82, wo die Riemannsche Fläche konstruiert wird. Die Funktion war bereits von Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, 2. Aufl., Bd. 1, ch. 3 vermöge der Methode der Schleifenwege (vgl. Ende des gegenwärtigen Paragraphen) untersucht worden. Sie kommt im wesentlichen bereits bei Puiseux, *Journ. de Math.*, Bd. 15 (1850), S. 371 vor.

z-Ebene ausbreiten und dann zusehen, ob sich daraus eine Riemannsche Fläche für die Funktion herstellen läßt.

Abbildung der Halbebenen. Zu dem Behufe schneiden wir die drei Blätter längs der reellen Achse auf und suchen die Abbildung einer jeden der sechs Halbebenen auf die w-Ebene zu bestimmen. Vor allem stellen wir die Bildpunkte der Berandung der Halbebenen fest, indem wir in (1) Reelles und Imaginäres trennen:

$$(u + vi)^3 - 3(u + vi) = x + yi,$$

(2)
$$u^3 - 3uv^2 - 3u = x, \quad 3u^2v - v^3 - 3v = y,$$

und darauf $y = 0$ setzen:

$$v(3u^2 - v^2 - 3) = 0.$$

Hiernach bestehen die Bildkurven jener Berandung aus der reellen Achse der w-Ebene nebst der Hyperbel

(3)
$$u^2 - \frac{v^2}{3} = 1.$$

Durch diese Kurven wird nun die w-Ebene, wie man ja auch erwarten sollte, in sechs Gebiete zerlegt, wovon jedes die Abbildung einer der sechs Halbebenen ausmacht, was wir sogleich noch mit aller Strenge beweisen werden (vgl. Fig. 82). Diese Gebiete, sowohl als die Halbebenen wird man als abgeschlossene Bereiche der erweiterten Ebene auffassen; projiziert man sie auf die Kugel, so erscheinen ihre Abbildungen auch in gewöhnlichem Sinne als abgeschlossen.

Um uns über die Abbildung der Gebiete, in die die w-Ebene hiermit zerlegt ist, auf die Halbebenen näher zu orientieren, lassen wir einen Punkt Q den Rand dieser Gebiete der Reihe nach beschreiben und beobachten wir, wie sich der Bildpunkt P der z-Ebene dabei bewegt. Wir wollen Q zunächst vom Punkte $w = \infty$ ausgehen und längs der positiven reellen Achse hereinrücken lassen. Nach (2) hat x dann den Wert

$$x = u^3 - 3u$$

und nimmt daher zugleich mit u beständig ab, so lange nur

$$\frac{dx}{du} = 3u^2 - 3 > 0, \quad \text{also} \quad u > 1, \ x > -2$$

ist. Im Punkte $w = 1$ angelangt, setze der Punkt Q seinen Weg

längs der Hyperbel (3) stetig fort, derart, daß $v > 0$ wird. Verfolgen wir weiter den immer noch auf der reellen Achse $y = 0$ verharrenden Bildpunkt P, so hat die Abszisse desselben jetzt den Wert

$$x = u^3 - 3uv^2 - 3u$$
$$= -8u^3 + 6u.$$

Ferner ist

$$\frac{dx}{du} = -6(4u^2 - 1) < 0.$$

Hiernach bewegt sich der Punkt P beständig nach links, wenn Q diesen Ast beschreibt, und zwar rückt P zugleich mit Q ins Unendliche. Beide Punkte, P und Q, haben nunmehr eine geschlossene Kurve ihrer erweiterten Ebenen beschrieben, und diese Kurven entsprechen sich in ein-eindeutiger stetiger Weise.

Des weiteren sei $w_0 > 1$ ein Punkt der reellen Achse, z_0 dessen Bildpunkt, der also ebenfalls auf der reellen Achse liegt; im übrigen ist $z_0 > -2$. Die Abbildung der Umgebung dieser beiden Punkte

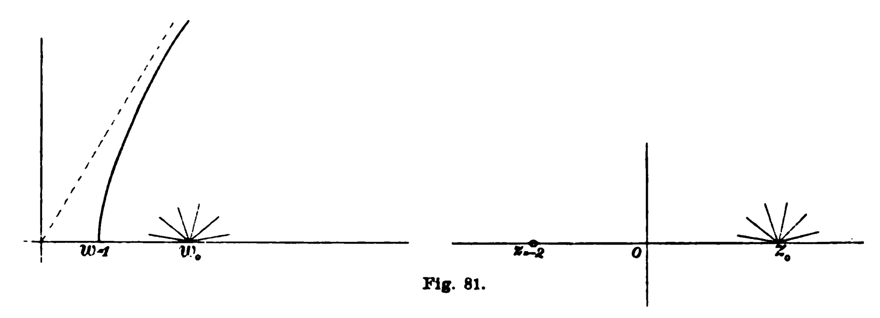


Fig. 81.

aufeinander wollen wir jetzt ins Auge fassen, vgl. Fig. 81. Da $(dz/dw)_{w=w_0} = 3w_0^2 - 3$ reell und positiv ist, so schließen ein von w_0 ausgehender Halbstrahl und seine von z_0 ausgehende Bildkurve gleiche Winkel mit ihren bezüglichen reellen Achsen ein. Rückt also ein Punkt w, von w_0 ausgehend, in die obere Halbebene hinein, so betritt dessen Bildpunkt z auch zunächst seine obere Halbebene, und zwar wird letzterer stets in der positiven Halbebene bleiben, solange w nur innerhalb des vom Hyperbelaste und der positiven reellen Achse begrenzten Gebiets $I^+: u \geqq 1,\ 0 \leqq v \leqq \sqrt{3u^2 - 3}$ bleibt, denn sonst müßte es ja einen innern Punkt w von I^+ geben, dem ein reeller Wert von z entspräche. Daraus geht hervor, daß das Abbild des ganzen Gebiets I^+ sicher oberhalb der reellen Achse der z-Ebene liegt. Füllt es aber diese Halbebene gerade einmal aus? Gegen diese Annahme sprechen allerdings folgende Zweifel. a) Wird z auch in

jeden Bereich der Halbebene dringen, oder wird es nicht am Ende Inseln geben, denen z stets ausweicht? b) Kann nicht eventuell ein Bereich besagter Halbebene schon mehr als einmal erreicht werden, so daß er als vielblättrig aufzufassen sein wird und also verschiedenen getrennten Gebieten von I^+ entspricht? — Beiden Einwänden kann man zwar direkt begegnen, doch erfordert eine strenge Behandlung der Sache von dieser Seite her etwas umständliche Überlegungen, jedenfalls führt der Satz vom folgenden Paragraphen rascher zum Ziele. Deshalb wollen wir die Erledigung dieses Punktes bis dahin aufschieben.

Hiermit ist nunmehr die Abbildung der positiven Hälfte i^+ des

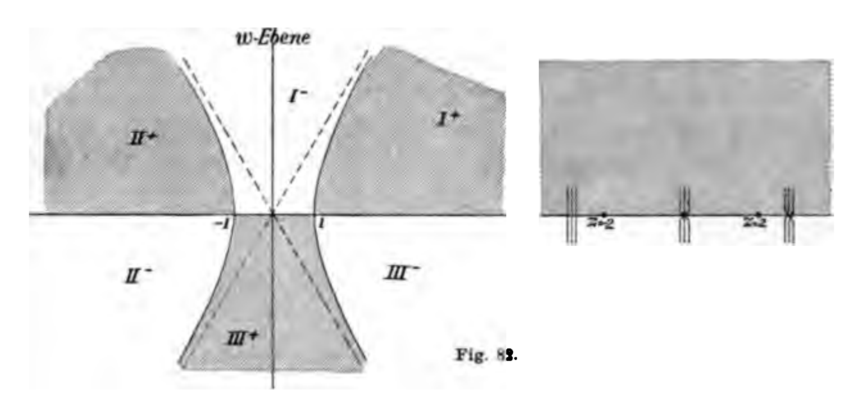


Fig. 82.

ersten Blattes der z-Fläche auf einen Teil I^+ der w-Ebene bewerkstelligt. In ähnlicher Weise fährt man jetzt fort, indem man Q wieder vom Punkte $w = \infty$ ausgehen und diesmal längs des soeben benutzten Hyperbelastes hereinrücken läßt. Dabei kehrt P längs der negativen reellen Achse aus dem Unendlichen wieder und langt schließlich im Punkte $z = -2$ an, wenn Q die reelle Achse erreicht. Indem Q jetzt längs der reellen Achse von $w = 1$ bis $w = -1$ weitergeht, legt P die Strecke der reellen Achse von $z = -2$ bis $z = 2$ hin zurück, wie man an der Hand der expliziten Formeln (2) direkt beweist. Endlich soll Q längs des im zweiten Quadranten belegenen Hyperbelastes wieder ins Unendliche ziehen, wobei dann P den Rest der reellen Achse durchläuft. Der abgeschlossene, von Q soeben umlaufene, an I^+ angrenzende Bereich der erweiterten w-Ebene soll I^- heißen. Ihm entspricht ein negatives Halbblatt der z-Fläche, welches wir die negative Hälfte des ersten Blattes nennen und mit i^- bezeichnen wollen.

Fährt man so fort, so stellt sich heraus, daß auch die weiteren

Gebiete der w-Ebene beziehungsweise den positiven und negativen Halbebenen der Reihe nach so zugeordnet werden können, wie in Figur 82 angezeigt ist.

Zusammenfügung der Halbebenen. Jetzt bleibt nur noch übrig, den Nachweis zu führen, daß obige Halbebenen sich wirklich zu einer Riemannschen Fläche, auf welcher die Funktion w eindeutig ist und im allgemeinen stetig verläuft, vereinigen lassen. Dies geschieht, wie folgt. Jedes der sechs Gebiete $I^+, \ldots, III^-$ stößt an andere derselben, und nun sollen die zugehörigen Halbebenen längs der Bildkurven jener gemeinschaftlichen Begrenzungen zusammengefügt werden. In der Tat wird durch die Gleichung (1) die Umgebung eines beliebigen Punktes w_0 einer jener Begrenzungskurven auf die schlichte Umgebung von seinem Bildpunkte z_0 konform abgebildet, sofern nur $w_0 \neq 1, -1$ ist. Hiernach werden also i^+ und i^- längs der Bildkurve des im ersten Quadranten belegenen Hyperbelastes, also längs des links vom Punkte $z = -2$ belegenen Teils der reellen Achse zusammenhängen. Die positiven Halbebenen, sowie deren Abbildungen in der w-Ebene wollen wir schraffieren.

Gehen wir weiter. Längs der Strecke $(-1, 1)$ der w-Ebene hängen I^- und III^+ zusammen. Demgemäß fügen wir den zwischen $z = -2$ und $z = 2$ belegenen Teil des Randes von i^- mit dem entsprechenden Teil des Randes von iii^+ zusammen. Der übrige Teil des Randes von i^- hängt dann mit dem gegenüberliegenden Teil des Randes von ii^+ zusammen.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens entsteht als Endresultat eine dreiblättrige, in der erweiterten Ebene resp. auf der Kugel geschlossene Riemannsche Fläche, deren Blätter in den Verzweigungspunkten $z = -2, 2, \infty$ zusammenhängen und längs Verzweigungsschnitte, welche über der reellen Achse liegen, ineinander übergehen, wie? — darauf gehen wir jetzt näher ein.

Zunächst sieht man, daß die drei Blätter sich längs des zwischen $z = -2$ und $z = \infty$ gelegenen Teils der negativen reellen Achse nicht kreuzen. Dagegen geht längs der Strecke $-2 \leq z \leq 2$ die Halbebene i^+ in iii^-, i^- in iii^+ über, während das Blatt ii hier vereinzelt verläuft. Endlich hängen längs des übrigen Teils der reellen Achse die drei Blätter zusammen, wie in Figur 82 angedeutet ist.

Hiernach, — oder auch an der Abbildung, — kann man den Zusammenhang der Blätter in den Verzweigungspunkten leicht feststellen. Im Punkte $z = -2$ hängen nämlich das erste und das dritte

Blatt, der Umgebung des Punktes $w = 1$ entsprechend, im Zyklus zusammen, während das zweite Blatt, der Umgebung des Punktes $w = -2$ entsprechend, hier schlicht verläuft, der Punkt $w = 1$ erweist sich somit als ein ausgezeichneter Punkt erster Ordnung (§ 2).

In ähnlicher Weise hängen im Punkte $z = 2$, der Umgebung des ausgezeichneten Punktes $w = -1$ entsprechend, die Halbebenen ii^+, ii^-, iii^+, i^- im zweiblättrigen Zyklus zusammen, während die übrigen Halbebenen i^+ und iii^- hier, wie sonst im Intervalle $-2 < x < +\infty$, aneinanderstoßen und ein schlichtes Blatt bilden. Endlich hängen im Punkte $z = \infty$ alle drei Blätter zusammen, der Punkt $w = \infty$ ist wieder ein ausgezeichneter Punkt, diesmal von der zweiten Ordnung.

Die Riemannsche Fläche ist nunmehr fertig. Dem Leser wird empfohlen, sich ein Modell derselben aus Papier zusammenzukleben. Wo die Blätter sich durchsetzen sollen, kann die Verbindung durch schmale Streifen Papier hergestellt werden, welche aufeinanderfolgend aufgeklebt werden. Im übrigen braucht das volle Blatt von vornherein nicht längs der ganzen x-Achse aufgeschnitten zu werden.

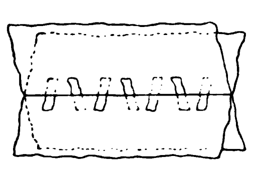


Fig. 83.

Erörterung der Fläche. Machen wir uns noch klar, was an der Riemannschen Fläche wesentlich und was nur zufällig ist. Wesentlich ist, a) daß über der Umgebung eines jeden der Punkte $z_0 \neq -2, 2, \infty$ drei Blätter schlicht verlaufen, welche als Träger dreier in dieser Umgebung eindeutiger, sich analytisch verhaltender Funktionen dienen; b) daß in der Umgebung der Punkte $z = -2, 2$ ein Blatt schlicht verläuft, während zwei andere dort im Zyklus zusammenhängen; sowie daß im Punkte $z = \infty$ alle drei Blätter zusammenhängen. So viel im Kleinen; dazu kommt noch, c) daß die Blätter so miteinander verbunden werden, wie es der Verlauf der verschiedenen Bestimmungen der Funktion im Großen verlangt.

Um die Bedingung c) deutlicher hervortreten zu lassen, machen wir darauf aufmerksam, daß man eine positive Halbebene mit einer beliebigen negativen Halbebene zu einem Blatte zusammenfassen darf, sofern nur die entsprechenden Bereiche der w-Ebene längs einer Kurve aneinanderstoßen. So könnte man beispielsweise als zweites Blatt die beiden Halbebenen nehmen, welche dem an der konvexen Seite der Hyperbel gelegenen Bereiche der w-Ebene entsprechen. Das erste Blatt würde dann dem an der konkaven Seite des einen Hyperbelastes gelegenen Gebiete zugeordnet werden, wodurch denn das dritte

Blatt vollständig bestimmt ist. Diese Wahl der den Blättern zuzuweisenden Nummern ist sogar eine symmetrischere als die vorhergehende. Insbesondere wird sich dadurch der Verlauf der Blätter in der Umgebung des Punktes $z = 2$ ebenso gestalten, wie im Punkte $z = -2$. Dem Leser wird empfohlen, sich auch ein Modell dieser Form der Riemannschen Fläche zu machen.

Man achte wohl auf den Umstand, daß die Hyperbel in der vorliegenden Geometrie, die ja im wesentlichen die Geometrie der reziproken Radien ist, die Ebene in drei Teile zerlegt, während sie dieselbe in der projektiven Geometrie nur in zwei Teile trennt. Auch wird die Ebene hier durch eine Gerade in zwei Teile zerlegt, während die projektive Ebene durch den Schnitt einer Geraden nicht zerfällt; der Zusammenhang der beiden Ebenen ist bekanntlich verschieden, wozu noch kommt, daß die projektive Ebene eine Doppelfläche ist.

Schleifen. Aus der Gestalt der Riemannschen Fläche kann man die Vertauschung der verschiedenen Bestimmungen der Funktion w ersehen, wenn z einen beliebigen geschlossenen Weg beschreibt. Nehmen wir beispielsweise die drei Werte von w im Punkte $z = -i$ und bezeichnen dieselben, ihren zugehörigen Blättern entsprechend, mit w_1, w_2, w_3. Läßt man nun z den in der Figur angedeuteten geschlossenen Weg l_1 durchlaufen, der den Punkt $z = 2$ in positivem Sinne umkreist, aber keinen weiteren Verzweigungspunkt umfaßt, so sieht man aus Fig. 82, daß

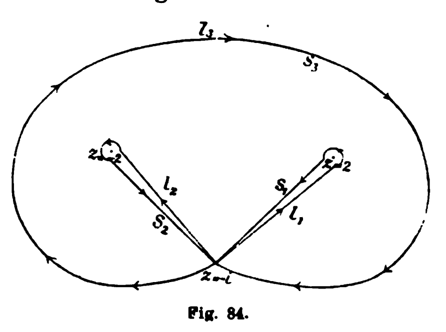


Fig. 84.

$$w_1 \text{ in } w_2, \quad w_2 \text{ in } w_1, \quad w_3 \text{ in } w_3$$

übergeht. Diese Vertauschung s_1 wird in der Gruppentheorie durch das Symbol (12) ausgedrückt:

$$s_1 = (12).$$

Ebenso entspricht dem anderen geschlossenen, den Punkt $z = -2$, aber keinen weiteren Verzweigungspunkt umfassenden Weg l_2 die Substitution

$$s_2 = (13).$$

Endlich wird der Punkt $z = \infty$ in positivem Sinne umkreist, wenn z einen alle im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte umfassenden

Weg durchläuft und zwar im entgegengesetzten Sinne wie bisher, man vgl. wieder Fig. 82. Dadurch entsteht die Substitution

$$s_3 = (132).$$

Die zu einer gegebenen Substitution s_i inverse Substitution s_i^{-1} wird erhalten, indem z die bezügliche Schleife in entgegengesetztem Sinne durchläuft.

Denkt man sich diese Wege als dehnbare Fäden und schlägt man in jeden Verzweigungspunkt ein Stiftchen ein, über welches der Faden nicht hinweggeschoben werden darf, so kann der dritte Weg in den ersten und zweiten stetig deformiert werden, nur wird er in entgegengesetztem Sinne beschrieben. Läßt man z also die drei Wege der Reihe nach durchlaufen, so werden alle drei Werte von w zu den Anfangswerten wieder zurückkehren, d. h. sie werden die identische Substitution erfahren. Daher herrscht zwischen s_1, s_2, s_3 die Relation:

$$s_1 s_2 s_3 = 1,$$

wobei s_1 zuerst ausgeführt wird.

Solche Wege, wie die drei soeben betrachteten, heißen *Schleifen (lacet)*. Es ist klar, daß jeder geschlossene Weg, der durch den Punkt $z = -i$, aber durch keinen Verzweigungspunkt geht, auf eine Reihe von solchen Schleifen, die ja auch zum Teil in negativem Sinne durchlaufen werden müssen, zurückgeführt werden kann. Da man nun einmal die jeder einzelnen Schleife entsprechende Substitution von w_1, w_2, w_3 kennt, so kann man daraus die dem vorgelegten Wege zugehörige Substitution bestimmen.

Das soeben betrachtete Schleifensystem ist aber nicht das einzige,

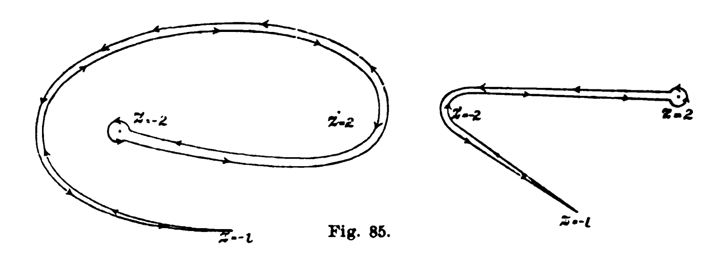


Fig. 85.

das vom Punkte $z = -i$ aus angelegt werden kann. So hätte man z. B. die beiden ersten Schleifen, wie in beistehender Figur, annehmen können.

Aufgabe 1. Man stelle die dem zweiten Schleifensystem, Fig. 85, zugehörigen Substitutionen von w_1, w_2, w_3 auf und bestimme die Relation, welche sie verknüpft.

Aufgabe 2. Man konstruiere die Riemannschen Flächen für die folgenden Funktionen w und veranschauliche sie durch ein Modell.

a) $$w^3 - 3w^2 = z;$$

b) $$w + \frac{1}{w} = z;$$

c) $$w^4 - 2w^2 - z + 1 = 0.$$

§ 5. Ein Satz, betreffend die konforme Abbildung im Großen.

Bisher haben wir uns im allgemeinen Falle bloß mit der konformen Abbildung im Kleinen beschäftigt, indem wir zeigten, daß unter gewissen Bedingungen die Umgebung eines Punktes z_0, deren Ausdehnung also von vornherein nicht feststand, ein-eindeutig und konform auf eine Umgebung eines Punktes w_0 bezogen wird. Jetzt wollen wir ein Kriterium kennen lernen, wonach ein vorgelegter Bereich inkl. der Berandung ein-eindeutig und stetig, und im Innern konform auf einen zweiten vorgegebenen Bereich abgebildet werden kann. Dieses Kriterium sprechen wir in der folgenden Form aus.

Lehrsatz.[1]) *Sei S ein abgeschlossener durch eine beliebige einfache geschlossene Kurve berandeter Bereich der z-Ebene, und sei $f(z)$ eine Funktion von z, die im Innern und am Rande von S stetig, und im Innern von S analytisch ist. Ferner möge $f(z)$ denselben Wert in zwei verschiedenen Randpunkten von S niemals annehmen, so daß also der Rand von S auf eine einfache geschlossene Kurve der w-Ebene ein-eindeutig und stetig bezogen wird. Der endliche durch letztere Kurve begrenzte Bereich heiße Σ. Dann wird durch die Gleichung*

$$w = f(z) \tag{1}$$

eine ein-eindeutige stetige Abbildung des abgeschlossenen Bereiches S auf den abgeschlossenen Bereich Σ definiert, welche außerdem im Innern dieser Bereiche ausnahmslos konform ist.

In dieser allgemeinen Form läßt sich das Kriterium am bequemsten aussprechen und im Gedächtnisse behalten. Den Beweis wollen wir

1) Der Satz findet sich bei Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Bd. 1, 1887, S. 173.

jedoch nur so allgemein durchführen, wie es in der Folge die Anwendungen erfordern.

Was zunächst den Rand von S anbetrifft, so genügt es vorauszusetzen, daß er regulär sei. Ferner wird stets in der Folge die Abbildung dieses Randes ebenfalls regulär sein. Daß aber eine solche Kurve einen endlichen einfach zusammenhängenden Bereich Σ abgrenzt, ist im 5. Kapitel ausführlich bewiesen worden. Damit haben wir uns also zunächst den Bereich Σ geschaffen.

Sei nun W ein innerer Punkt von Σ, und man bilde die Funktion

$$f(z) - W. \tag{2}$$

Dieselbe ist im abgeschlossenen Bereich S stetig, im Innern von S analytisch, und am Rande von 0 verschieden. Infolgedessen hat sie nur eine endliche Anzahl von Nullstellen in S. Die Zahl n letzterer wird ferner dadurch erhalten, indem man z den Rand von S in positivem Sinne durchlaufen läßt; dann nimmt

$$\operatorname{arc}(f(z) - W)$$

nach Kap. 7, § 11 gerade um $2n\pi$ zu.

Vermöge (1) geht die Funktion (2) in

$$w - W \tag{3}$$

über. Wenn z, wie vorhin geschah, den Rand von S durchläuft, findet genau das entsprechende in der w-Ebene statt: w durchläuft den Rand von Σ einmal. Dabei nimmt

$$\operatorname{arc}(w - W)$$

um $\pm 2\pi$ zu. Aus beiden Ergebnissen schließt man nun, daß $n = 1$ ist, (sowie auch, daß der Umlaufssinn von w der positive ist). Demnach hat die Funktion (2) eine einzige Nullstelle erster Ordnung in S.

Zieht man dagegen einen äußeren Punkt W von Σ in Betracht und läßt man z den Rand von S wiederum durchlaufen, so hat n jetzt den Wert 0, da $\operatorname{arc}(w - W)$ zum Anfangswert wieder zurückkehrt. In diesem Falle hat die Funktion (2) keine Nullstelle in S.

Hiermit haben wir gezeigt, a) daß jedem inneren Punkte von Σ ein innerer Punkt von S, b) daß einem äußeren Punkte von Σ kein innerer Punkt von S, m. a. W. b') daß jedem inneren Punkte von S ein innerer oder Randpunkt von Σ entspricht. Es bleibt daher noch übrig, diese letzte Möglichkeit zu beseitigen. Dies geschieht, wie

folgt. Gesetzt, der Bildpunkt w_0 eines inneren Punktes z_0 von S läge auf dem Rande von Σ. Da $f(z)$ im Punkte z_0 analytisch ist, ohne sich auf eine Konstante zu reduzieren, so wird die Umgebung von z_0 nach § 2 auf die möglicherweise mehrfach überdeckte Umgebung von w_0 bezogen. Darnach wird aber ein letzterer Umgebung angehöriger äußerer Punkt von Σ einem inneren Punkte von S zugeordnet, was eben gegen die bereits erhaltenen Ergebnisse verstößt.

Die umkehrbare Eindeutigkeit der Abbildung von S auf Σ vermöge (1) steht nunmehr fest. Daß die Beziehung außerdem im Inneren konform ist, ergibt sich direkt aus jenem Satze von § 2. Wäre nämlich $f'(z) = 0$ in einem inneren Punkte von S, so müßte das eben ein ausgezeichneter Punkt sein, womit aber der umkehrbaren Eindeutigkeit der Abbildung Abbruch getan wäre. Es muß also nur noch der stetige Anschluß an den Rand festgestellt werden.

Sei W ein beliebiger Randpunkt von Σ, und sei Z dessen Abbild. Sei ferner $w_1, w_2, \ldots$ eine beliebige Reihe dem Bereich Σ zugehöriger Punkte mit $\lim w_n = W$, und sei $z_1, z_2, \ldots$ die Bildmenge derselben. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} z_n = Z.$$

Hätte nämlich die letzte Menge eine von Z verschiedene Häufungsstelle Z', so könnte man aus dieser Menge eine Teilmenge $z_1', z_2', \ldots$ herausheben, derart daß

$$\lim_{n=\infty} z_n' = Z'$$

ist. Dann wäre aber

$$\lim_{n=\infty} w_n' = \lim_{n=\infty} f(z_n') = f(Z') = W' \neq W,$$

und dies ist eben nicht möglich.

Erweiterungen des Satzes. Anstatt einen einfachen Rand von S vorauszusetzen, genügt die Annahme, daß S ein endlicher, einfach zusammenhängender Bereich sei, dessen Begrenzung sich in eine endliche Anzahl regulärer Kurven zerlegen läßt, wie durch beistehende Figur näher angegeben sei. Dann kommen gewissen Randpunkten mehrere Randwerte zu, vgl. Kap. 2, § 2; und diese Randwerte müssen, wie vorhin, alle voneinander verschieden sein. Der vorstehende Beweis paßt auch für diesen Fall, da man einen derartigen Bereich auf einen von einer

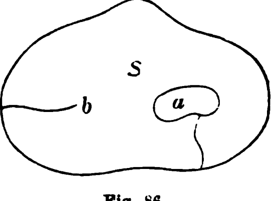


Fig. 86.

einfachen regulären Kurve umschlossenen Bereich im Innern ein-eindeutig und konform und am Rande stetig abbilden kann. Liegen nämlich äußere Punkte von S innerhalb der äußeren Umgrenzung von S, so sei a ein solcher Punkt. Durch die Transformation

$$(4) \qquad z' = \sqrt{z - a}$$

geht dann S in einen Bereich S' über, wofür die Anzahl der doppelt zu zählenden Randstücke weniger geworden ist.

Im Falle eines Einschnitts sei b ein solcher Endpunkt desselben, welcher bei Fortlassung der übrigen Punkte des Einschnittes im Innern von S liegen würde. Durch die Transformation

$$z' = \sqrt{z - b}$$

wird dann der Einschnitt aufgehoben.

Im übrigen darf sich S ins Unendliche erstrecken. Wesentlich ist dabei nur, daß sich S in einen solchen Bereich überführen läßt, wie er bei der Formulierung des ursprünglichen Satzes vorausgesetzt wurde. So könnte das Innere von S z. B. aus den Punkten der erweiterten Ebene mit Ausnahme der Punkte der Strecke (a, b) bestehen, wobei a, b zwei komplexe Zahlen sind. Durch die Transformation

$$(5) \qquad z' = \sqrt{(z - a)(z - b)}$$

entsteht daraus ein Bereich mit äußeren Punkten und einer einfachen Begrenzung. Dieser läßt sich dann durch eine lineare Transformation in einen endlichen, von einer einfachen regulären geschlossenen Kurve berandeten Bereich verwandeln.

Analoge Erweiterungen gelten auch gewissermaßen für das Abbild des Randes von S in der w-Ebene. Eine für die Praxis brauchbare Formulierung des erweiterten Satzes ist folgende.

Der erweiterte Satz. *Sei S ein endlicher oder unendlicher Bereich, welcher auf einen endlichen, von einer einfachen Kurve umschlossenen Bereich S' ein-eindeutig und konform im Innern, und am Rande stetig, abgebildet werden kann.*

Sei $f(z)$ eine im Innern von S bis auf Pole analytische Funktion, welche in jedem Randpunkte von S einen Randwert annimmt[1]) *oder höchstens in einem einzigen Randpunkte unendlich wird. Ferner sollen keine zwei Randwerte einander gleich sein.*

---

1) Nach Kap. 2, § 2 bilden diese Randwerte dann von selbst eine stetige Folge.

Endlich soll es einen Punkt $w = A$ der erweiterten w-Ebene geben, dem kein Punkt von S entspricht. Von den beiden Bereichen, in welche die w-Ebene durch das Abbild des Randes von S zerlegt wird, möge derjenige, in welchem A nicht liegt, Σ heißen.

Dann wird das Innere von S ein-eindeutig und konform auf das Innere von Σ bezogen, und außerdem herrscht stetiger Anschluß am Rande.

Man bilde nämlich eine Funktion $F(z)$, welche in den Punkten, wo $f(z)$ unendlich wird, den Wert 0 hat und sonst durch die folgende Formel erklärt wird:

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

Wird nun S auf S' abgebildet, so geht $F(z)$ dabei in eine Funktion im Bereiche S' über, welche allen Bedingungen des ursprünglichen Satzes genügt.

Anwendung auf die Abbildung von § 4. Aus dem letzten Satze erkennt man sofort, daß der Bereich I^+ von § 4 ein-eindeutig und konform auf i^+ bezogen wird. In der Tat entsprechen sich schon die Ränder beider Bereiche, wie es der Satz verlangt. Außerdem ist z, als Funktion von w betrachtet, $z = f(w)$, analytisch in I^+, während die zugehörigen Punkte der z-Ebene, wie damals auch ausdrücklich hervorgehoben wurde, in der oberen Halbebene i^+ liegen. Setzt man also etwa $A = -i$, so sind hiermit alle Bedingungen des Satzes erfüllt, und der Beweis ist fertig.

In derselben Weise läßt sich zeigen, daß auch die übrigen Gebiete $\mathrm{I}^-, \mathrm{II}^+$, usw. auf die betreffenden Halbebenen ein-eindeutig bezogen werden.

§ 6. Die Riemannsche Fläche für die Funktion w, wo $w^4 - 4w = z$.

Bisher lagen die Verzweigungspunkte stets auf der reellen Achse, so daß es sich also empfahl, den Verzweigungsschnitt in diese Achse zu legen. Betrachten wir jetzt ein Beispiel, wo dies nicht mehr zutrifft:

$$w^4 - 4w = z. \tag{1}$$

Stellt man hier eine ähnliche Überlegung bezüglich der zu z inversen Funktion w an, wie in § 4, so erhält man vor allem zur Bestimmung der Ausnahmepaare die Gleichung:

$$4w^3 - 4 = 0.$$

Dies gibt:

$$\left.\begin{array}{l} w = 1 \\ z = -3 \end{array}\right|, \quad \left.\begin{array}{l} w = \omega \\ z = -3\omega \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} w = \omega^2 \\ z = -3\omega^2 \end{array}\right\}, \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Über der z-Ebene wird man nun vier Blätter ausbreiten. Diese werden zunächst längs der reellen Achse aufgeschnitten. Da

$$x = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 - 4u, \quad y = 4u^3v - 4uv^3 - 4v$$

ist, so entsprechen jener Achse $y = 0$ die Kurven:

$$\text{a) } v = 0, \qquad \text{b) } u^3 - uv^2 - 1 = 0.$$

Der Einfachheit der Formeln halber empfiehlt es sich, diese Achse so weit wie möglich zu Verzweigungsschnitten in den verschiedenen Blättern zu verwenden. Es fragt sich noch, wie man die Verzweigungsschnitte in ihrem weiteren Verlauf am einfachsten anlegt. Bemerken wir vorab, daß den Geraden

$$w = \omega t \quad \text{und} \quad w = \omega^2 t,$$

wo t alle reellen Werte durchläuft, die Gerade

$$z = \omega(t^4 - 4t) \quad \text{bzw.} \quad z = \omega^2(t^4 - 4t)$$

entspricht, so liegt es nahe, in der w-Ebene so viel von diesen Geraden aufzuzeichnen, wie zwischen dem Punkte $w = 0$ und der Kurve b) enthalten ist, und zugleich in der z-Ebene jedes Blatt längs der Bildstrecken aufzuschneiden. Auf diese Weise wird die w-Ebene in acht

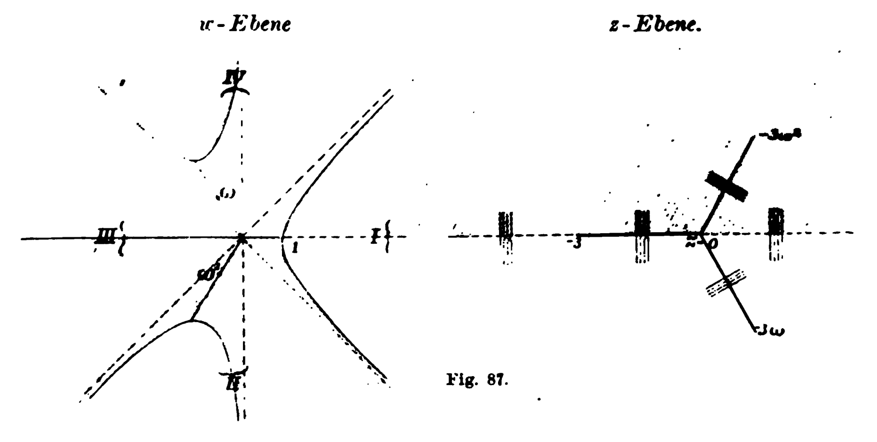


Fig. 87.

Gebiete eingeteilt, welche den acht Halbblättern der z-Fläche entsprechen. Im Punkte $w = \infty$ stoßen alle diese Gebiete zusammen,

und zwar weist ein jeder derselben den Winkel $\pi/4$ dort auf. Die Halbblätter lassen sich ihrerseits zu einer Riemannschen Fläche zusammenfassen, deren Blätter so zusammenhängen, wie in Fig. 87 des näheren angegeben ist. Dabei fällt indessen dem Punkte $z = 0$ eine Ausnahmerolle zu, die im Wesen der Sache gar nicht begründet ist, denn es tritt ja keine Verzweigung in diesem Punkte ein. Das liegt nämlich an der besonderen Wahl der Verzweigungsschnitte, welche deshalb so angelegt wurden, damit sich ihre Abbildung leicht verfolgen ließe. Da wir aber nunmehr im Besitze der fertigen Fläche sind, so können wir die Verzweigungsschnitte verschieben und insbesondere die hier vorkommende Spaltung des Verzweigungsschnittes dadurch beseitigen, daß wir den Knotenpunkt längs der Geraden $(0, -3\omega)$ stetig in den Punkt $z = -3\omega$ rücken lassen. Das Ergebnis veranschaulicht Fig. 88.

Legt man ein von einem beliebigen Punkte z_0 auslaufendes Schleifensystem an, so kann man die zugehörigen Substitutionen von $w_1, \dots w_4$ direkt an der Riemannschen Fläche ablesen. Für das besondere in der Figur angedeutete Schleifensystem fallen diese, wie folgt, aus:

$$s_1 = (34),$$
$$s_2 = (24),$$
$$s_3 = (14),$$
$$s_4 = (1234),$$
$$s_1 s_2 s_3 s_4 = 1.$$

Fig. 88.

Der Leser wolle sich auch von dieser Fläche ein Modell aus Papier anfertigen.

Aufgabe 1. Man stelle die der Gleichung

$$w^3 + 3w = z$$

zugehörige Riemannsche Fläche her.

Da diese Gleichung aus Gleichung (1), § 4 mittels der Transformation $w' = iw$, $z' = -iz$ hervorgeht, so erhält man schon eine Riemannsche Fläche dafür, indem man die vorhin konstruierte Fläche bloß um 90 Grad dreht. Im vorliegenden Falle möchte man jedoch der Übung halber den Verzweigungsschnitt von vornherein anders anlegen, indem man hierzu die reelle nebst so viel von der imaginären Achse nimmt, wie zwischen den beiden Verzweigungspunkten liegt. Hinterher weise man dann noch die Identität der beiden Flächen durch Verschiebung des Verzweigungsschnittes nach.

Aufgabe 2. An Aufgabe 2, b) von § 4 anknüpfend, stelle man jetzt die Riemannschen Flächen für die Funktionen w her, wo

$$w^n + \frac{1}{w^n} = z, \qquad n = 2, 3, \cdots,$$

ist. Dabei entsprechen der reellen Achse der z-Ebene n durch den Punkt $w = 0$ gehende Gerade, welche gleiche Winkel miteinander bilden und woran sich übrigens die reelle Achse beteiligt, nebst dem Einheitskreise $|w| = 1$. So entspringt eine Zerlegung der w-Ebene in $4n$ Kreisbogendreiecke, welche, in geeigneter Weise auf die Kugel projiziert, zu einer besonders einfachen Gebietseinteilung dieser führen. Beschreibt man ihr nämlich eine Doppelpyramide ein, deren beide Spitzen im Nord- und Südpol liegen, während sich ihre übrigen Ecken im Äquator befinden, und richtet man es ferner so ein, daß der Äquator dem Einheitskreise entspricht, so braucht man nur ihre Flächen (bei gehöriger Orientierung der Pyramide) vom Mittelpunkte der Kugel aus auf die Kugelfläche zu projizieren, um die in Rede stehende Gebietseinteilung zu erzielen. Vgl. Klein, *Ikosaeder*, diejenigen Paragraphen, wo vom „Dieder" die Rede ist.

Aufgabe 3. Man konstruiere die Riemannsche Fläche für die Funktion w, wo

$$z = w - e \sin w$$

ist. Dabei soll e eine reelle positive Zahl sein.

§ 7. Die sechs Doppelverhältnisse.

In der projektiven Geometrie wird gezeigt, daß die sechs Doppelverhältnisse von vier Punkten einer Geraden folgende Werte haben:

$$(1) \qquad \lambda, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad 1 - \frac{1}{\lambda},$$

wobei λ den Wert irgend eines derselben bedeutet.[1]) Wenn man in jedem Ausdruck dieser Reihe λ durch irgend einen anderen der sechs Ausdrücke, etwa durch $1/\lambda$, ersetzt, so geht die Reihe, von der Aufeinanderfolge der Terme abgesehen, in sich über.

Eine absolute Invariante von vier Punkten einer Geraden wird erhalten, wenn man eine Funktion von λ bildet, welche obige sechs

1) Man vergleiche Klein-Fricke, *Modulfunktionen*, Bd. 1, Kap. 1.

Transformationen:

(2) $$\lambda = 1 - \lambda', \quad \lambda = \frac{1}{\lambda'}, \quad \text{usw.}$$

sämtlich zuläßt, ohne ihren Wert zu ändern. Eine der einfachsten derartigen Funktionen ist die Invariante J, wo

(3) $$J : J - 1 : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : [(\lambda + 1)(2\lambda - 1)(\lambda - 2)]^2 : 27\lambda^2(1 - \lambda)^2$$

ist. Indem wir jetzt z, w anstatt J, λ schreiben, wird w durch (4) als eine sechs-wertige Funktion von z definiert:

(4) $$z = \frac{4(w^2 - w + 1)^3}{27 w^2 (1 - w)^2}.$$

Die Riemannsche Fläche dieser Funktion wollen wir jetzt konstruieren.

Zu dem Zwecke suchen wir zunächst diejenigen Punkte der w-Ebene zusammen, welche der reellen Achse der z-Ebene entsprechen. Dazu gehören vor allem die Punkte der reellen Achse der w-Ebene; ferner die Punkte der Geraden $u = \frac{1}{2}$, wie die Rechnung zeigt. Durch die Transformation

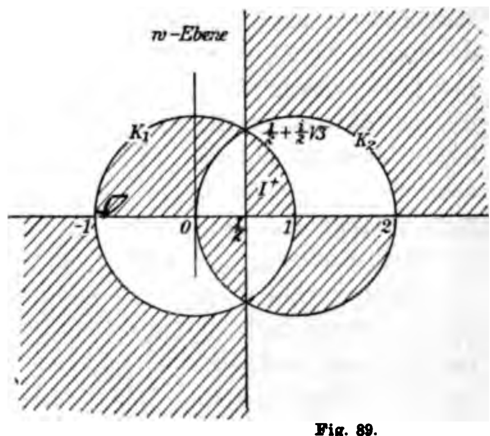


Fig. 89.

$$w = \frac{1}{w'}$$

geht letztere Gerade in den Kreis K_1, und durch die Transformation

$$w = 1 - w'$$

geht dieser wieder in K_2 über. Beiden Transformationen gegenüber bleibt aber z invariant, also reell.

Hiermit haben wir also zwei Kreise und zwei Gerade erhalten, die Bildpunkte jener reellen Achse abgeben. Andererseits sieht man aber der Gleichung (4) direkt an, daß sämtliche Bildpunkte reeller z nur eine algebraische Kurve sechster Ordnung in der w-Ebene ausmachen. Infolgedessen haben wir die gesuchten Punkte bereits alle erhalten.

Durch diese Kurven wird die w-Ebene in zwölf Kreisdreiecke zerlegt, deren Ecken ausgezeichnete Punkte sind und den Werten $z = 0, 1, \infty$ entsprechen. Im übrigen sind die ausgezeichneten Punkte hiermit erschöpft, so daß also dz/dw insbesondere in allen anderen Punkten der genannten Kurven einen endlichen, von Null verschiedenen Wert hat.

Hiermit sind wir im Besitze alles Materials, um nachzuweisen, daß jedes der zwölf Kreisdreiecke ein-eindeutig und konform auf die z-Halbebenen, unter stetigem Anschluß am Rande, abbilden läßt. Fangen wir etwa mit dem Dreiecke I^+ an. Nach (3) ist

$$z - 1 = \frac{[(w+1)(2w-1)(w-2)]^2}{27\, w^2 (1-w)^2}.$$

Beschreibt w also, vom Punkte $w = \frac{1}{2}$ ausgehend, die Strecke $(\frac{1}{2}, 1)$ der reellen Achse, so wird $z - 1 > 0$, und daher rückt z, vom Punkte $z = 1$ ausgehend, sicher zunächst nach rechts. Da aber dz/dw in diesem Intervalle reell, stetig, und von Null verschieden ist, so muß dz/dw dort ausnahmslos positiv sein. Daher bewegt sich z monoton nach rechts, wenn w gegen den Punkt $w = 1$ fortrückt, woraus man denn erkennt, daß die Strecke $\frac{1}{2} \leqq u < 1$ ein-eindeutig und stetig auf den Halbstrahl $1 \leqq x < \infty$ abgebildet wird.

Da fernerhin $w = 1$ ein einfacher ausgezeichneter Punkt ist, so wird derjenige Teil der Umgebung von $w = 1$, welcher oberhalb der reellen Achse und zugleich innerhalb des Kreises K_1 gelegen ist, auf ein Stück einer oberen z-Halbebene abgebildet, welches in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ liegt. Hieraus erkennt man zunächst, daß ein kleiner Bogen von K_1, welcher in der oberen Halbebene liegt und an $w = 1$ heranreicht, ein-eindeutig und stetig auf ein ins Unendliche sich erstreckendes Stück der negativen reellen Achse der z-Ebene abgebildet wird. Dazu tritt noch der Umstand, daß dz/dw längs der ganzen Dreiecksseite stetig und von Null verschieden ist. Infolgedessen rückt z fortwährend auf der negativen reellen Achse der z-Ebene nach rechts, wenn w jene Dreiecksseite nach oben hin beschreibt, um schließlich im Punkte $z = 0$ anzulangen, wenn w den Punkt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}$ erreicht.

Jetzt stellt man eine ähnliche Überlegung, wie vorhin, bzgl. des ausgezeichneten Punktes $w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}$ an, und gelangt so zum Ergebnisse, daß, wenn w, von diesem Punkte ausgehend, die Gerade $u = \frac{1}{2}$ nach unten hin bis zur reellen Achse beschreibt, z dann, vom Punkte $z = 0$ ausgehend, die Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ monoton durchläuft.

Fügt man zum Vorhergehenden noch hinzu, daß z zunächst in die obere Halbebene hineinrückt, wenn w das Innere des Dreiecks I^+ betritt, so ist klar, daß die Bildpunkte des ganzen Innern dieses Dreiecks in jener Halbebene liegen.

Hiermit sind nun alle Bedingungen des letzten Satzes von § 5 erfüllt, und daher wird das Kreisdreieck I^+ auf die obere Halbebene ein-eindeutig und konform bezogen.

Das soeben besprochene Beispiel ist typisch für eine wichtige Funktionsklasse, die sogenannten *Dreiecksfunktionen*, welche zuerst von Schwarz und Klein untersucht sind. Diese subsumieren sich wieder unter die allgemeinere Klasse *automorpher Funktionen*, wovon später die Rede sein wird. Man vergleiche insbesondere wegen weiterer Einteilungen der Ebene in eine endliche Anzahl von Kreisbogendreiecken Klein, *Ikosaeder*, Kap. 2, 3; sowie Forsyth, *Theory of Functions*, Kap. 20.

Die in §§ 4, 6, 7 dargelegte Methode zur Konstruktion der Riemannschen Fläche einer Funktion w von z, wo

$$z = f(w)$$

und $f(w)$ eine eindeutige Funktion ist, rührt von Klein her, welcher sie zuerst bei der Behandlung der regulären Körper im Anschluß an Schwarz angewandt hat und sie später in der Leipziger Vorlesung vom Jahre 1881/2 noch an anderen Beispielen erläuterte. Im übrigen sei auf eine hierher gehörige Arbeit von C. L. Bouton, *Annals of Mathematics*, Bd. 12 (1898) S. 1 verwiesen, wo sich auch eine große Anzahl von Beispielen findet.

§ 8. Über die Abbildung eines Zweiges der Funktion $w = \int\limits_0^z \frac{z\,dz}{z^3 - 1}$.

Wir wollen doch noch kurz andeuten, wie man zuweilen in komplizierteren Fällen, wo die fertige Riemannsche Fläche in ihrer Gesamtheit nicht leicht zu überblicken ist, zu Werke gehen kann, um sich über den Verlauf eines Zweiges der Funktion Rechenschaft zu geben und somit sich wenigstens einige Einsicht in die Zusammensetzung der Fläche zu verschaffen.

Betrachten wir vorab allgemein das Integral einer rationalen Funktion:

$$\int R(z)\,dz,$$

und setzen dabei

$$B(z) = G(z) + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - a_i} + \Phi(z),$$

wo $G(z)$ ein Polynom und $\Phi(z)$ nur verschwindende Residuen hat, so liefern das erste und das letzte Glied rechter Hand eindeutige Beiträge zum Integral, während das zweite Glied Unendlich-Vieldeutigkeit hervorruft. Wir wollen ein derartiges Beispiel näher behandeln, und zwar sei[1]

$$w = \int_0^z \frac{z\,dz}{z^3 - 1}.$$

Hier ist

$$\frac{z}{z^3 - 1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{\omega^2}{z-\omega} + \frac{\omega}{z-\omega^2}\right], \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Andererseits hat die Funktion w, wegen der Gleichung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z}{z^3 - 1}$$

einen merkwürdigen Punkt erster Ordnung in $z = 0$. Endlich verhält sich jeder Zweig von w im Punkte $z = \infty$ eindeutig und analytisch, vgl. Kap. 7, § 9, Aufgabe 6. Demnach liegen die Verzweigungspunkte von w in $z = 1$, ω, ω^2. Diese Punkte wollen wir nun mit $z = 0$ durch Gerade verbinden und die Ebene dann längs letzterer Linien aufschneiden. In dem hiermit erhaltenen Bereiche gruppieren sich die verschiedenen Bestimmungen von w zu eindeutigen analytischen Funktionen. Untersuchen wir die Abbildung desselben auf die w-Ebene, welche einem Zweige von w entspricht.

Indem wir z vom Punkte $z = 0$ ausgehen und längs der positiven reellen Achse gegen 1 hin rücken lassen, bewegt sich w auf der negativen reellen Achse auf den Punkt $w = \infty$ zu. Beschreibt z nun einen kleinen Kreis um $z = 1$ in positivem Sinne, so rückt w längs einer Parallelen zur imaginären Achse in die positive Halbebene und legt dabei eine Strecke von der Länge $2\pi/3$ zurück. Wenn z jetzt seinen Weg weiter fortsetzt und also längs der vorhin beschriebenen Strecke nach dem Punkte $z = 0$ wieder zurückkehrt, so rückt w längs einer Parallelen zur ursprünglichen Bahn und gelangt somit wieder an die imaginäre Achse.

1) Klein, *Leipziger Vorlesung*, 1881/82.

Der Leser wird jetzt ohne Mühe die Abbildung der weiteren w-Werte verfolgen können. Das Endresultat deutet beistehende Figur an. Durch die Funktion w wird daher nach den Entwicklungen von § 5 der in Rede stehende Bereich der z-Ebene ein-eindeutig und konform auf das aus den drei unendlichen Streifen der w-Ebene bestehende Gebiet bezogen.

Die anderen Zweige der Funktion hängen in einfacher Weise mit

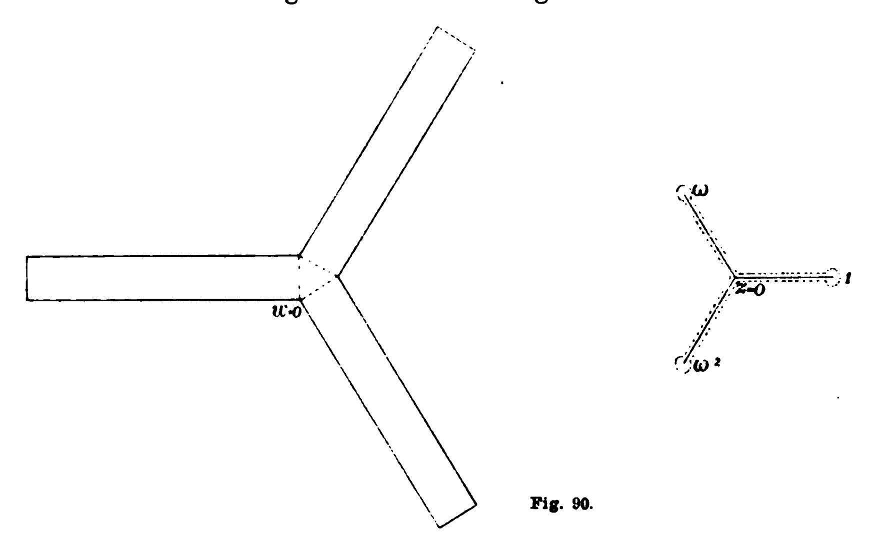


Fig. 90.

diesem zusammen. Wenn nämlich z einen Verzweigungsschnitt überschreitet, so wächst dabei w um

$$\pm \tfrac{1}{3}\omega^k 2\pi i, \qquad k = 1,\ 2,\ 3.$$

Hieraus erkennt man, wie sich die Riemannsche Fläche zusammensetzt. Den Leser bitten wir darum, ein Modell des in der w-Ebene erhaltenen Gebiets in drei Exemplaren aus Papier zu schneiden und diese Stücke dann so zusammenzufügen (vgl. § 4, Fig. 83), wie insbesondere durch die Abbildung der schlichten Umgebung des merkwürdigen Punktes $z = 0$ auf die zweiblättrige Umgebung von $w = 0$ verlangt wird. Hierdurch entsteht ein Teil einer Riemannschen Fläche, welcher einen Verzweigungspunkt erster Ordnung im Punkte $w = 0$ birgt, an weitere, in den Ecken des Randes befindliche derartige Verzweigungspunkte heranreicht, und übrigens besonders geeignet ist, das erste Glied der im Entstehen begriffenen Riemannschen Fläche für z, als Funktion von w betrachtet, zu bilden. Denkt man sich nämlich diese Teilfläche in beliebig vielen Exemplaren hergestellt und

gliedert man diese dann sukzessive an die freien Ränder eines hierdurch fortwährend wachsenden Kerns, so bekommt man damit, wenn nicht eine deutliche Vorstellung der vollständigen Fläche, so doch einen klaren Einblick in die Art und Weise, wie sich diese Fläche zusammensetzt. In diesem Falle bildet die Projektion der Verzweigungspunkte der Fläche auf die schlichte Ebene zwar eine unendliche, aber keine überall dichte Punktmenge.

Aufgabe. Man untersuche auf ähnliche Weise die Abbildung eines Zweiges der Funktion

$$w = \int_0^z \frac{dz}{z^3 - 1}.$$

§ 9. Lineare Transformationen einer Riemannschen Fläche.

Aus einer gegebenen Riemannschen Fläche kann man durch lineare Transformation neue Flächen erhalten. So könnte man beispielsweise die positiven Halbebenen der Fläche von § 4 auf das Innere des mehrfach überdeckten Kreises $|z| = 2$ abbilden, indem man etwa

$$\frac{z' - 2}{z' + 2} = i \frac{z - 2}{z + 2}$$

d. h.

$$z' = 2i \frac{z - 2i}{z + 2i}, \qquad z = 2i \frac{2i + z'}{2i - z'}$$

Fig. 91.

setzt. Hierdurch kommen die Verzweigungspunkte in den Punkten $z' = -2, 2, 2i$ zu liegen. In den beiden ersten hängen je zwei, im dritten aber alle drei Blätter zusammen. Der Punkt ∞ ist jetzt ein gewöhnlicher Punkt für jedes Blatt.

Andererseits kann man auch die w-Ebene einer linearen Transformation unterwerfen. Sei z. B.

$$w' = \frac{2}{w},$$

so entspringt die in der Figur angegebene Gebietseinteilung der w'-Ebene.

Vermöge einer linearen Transformation einer Riemannschen Fläche kann man zuweilen eine zu konstruierende Fläche auf eine bereits bekannte zurückführen. Nehmen wir etwa:

$$aw^2 + bw + c = z, \qquad a \neq 0.$$

Diese Gleichung läßt sich auf die Form bringen:

$$a(w - \alpha)^2 = z - \beta,$$

wo

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ist. Setzt man noch

$$w' = \sqrt{a}(w - \alpha), \quad z' = z - \beta,$$

so erhält man die Gleichung

$$w'^2 = z',$$

deren Riemannsche Fläche bereits in § 2 untersucht ist. Das Resultat

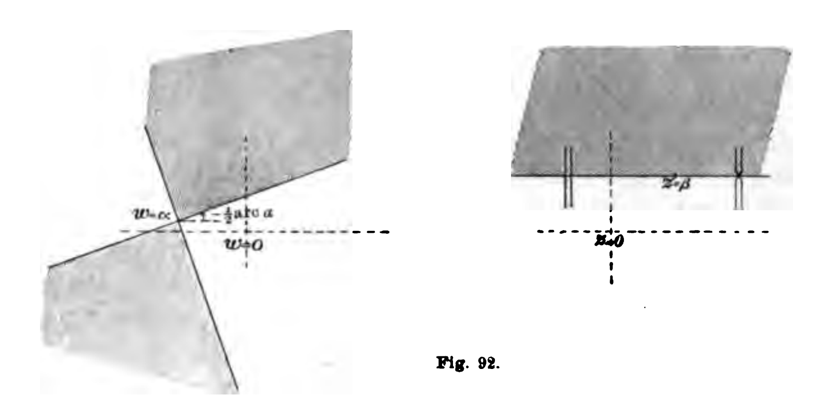


Fig. 92.

ist in Figur 92 angedeutet. Dabei hängen die beiden Blätter der z-Fläche in den Verzweigungspunkten $z = \beta, \infty$ zusammen. Den Verzweigungsschnitt haben wir in die der reellen Achse parallele Gerade gelegt.

In ähnlicher Weise kann man die Riemannsche Fläche für die Funktion arc tan z aus derjenigen für log z ableiten. Da nämlich

$$w = \operatorname{arc\,tan} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}$$

ist, so braucht man nur in der Gleichung

$$w' = \log z'$$

$$w' = \frac{2w}{i}, \qquad z' = \frac{i+z}{i-z}$$

zu setzen und die hierdurch bewirkte Transformation der w'-Ebene sowie der z'-Fläche zu verfolgen.

Aufgabe. Man zeige, daß die Gleichung

$$aw^3 + bw^2 + cw + d = z, \qquad a \neq 0,$$

mittels ganzer linearer Transformationen von w und z auf die in § 4 behandelte Form:

$$w^3 - 3w = z$$

gebracht werden kann.

Neue Entstehungsweise für die Logarithmusfläche.[1]) Eine mögliche Definition der Funktion e^w resp. ein unendlicher Prozeß, wodurch diese Funktion geliefert wird, ist, wie folgt:

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{w}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Daß diese Variabele

$$s_n(w) = \left(1 + \frac{w}{n}\right)^n$$

in einem beliebigen endlichen Bereiche S der w-Ebene gleichmäßig konvergiert, ist nicht schwer zu erkennen.[2]) Erforschen wir die durch die Gleichung

$$s_n(w) = z$$

definierte Abbildung von S. Durch Einführung einer neuen Variabeln

$$w' = 1 + \frac{w}{n}$$

---

1) Klein, *Leipziger Vorlesung* 1881/82.

2) Man könnte etwa $s_n(w)$ in der Form anschreiben:

$$s_n(w) = 1 + w + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{w^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{w^3}{3!} + \cdots$$

und dann zeigen, daß sich diese Funktion dem Grenzwerte

$$1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots$$

gleichmäßig nähert.

geht diese Gleichung in

$$w'^n = z$$

über, wofür die Abbildung bereits in § 2 untersucht ist. Wenn wir also jetzt zur ursprünglichen Variabelen w zurückkehren, so erhalten wir die in Fig. 93 angedeutete Abbildung. Die in Anwendung gebrachte lineare Transformation bewirkt nämlich zunächst eine Dehnung der w'-Ebene: $w_1 = nw'$, worauf dann eine Parallelverschiebung: $w = w_1 - n$ folgt. In der transformierten Figur trifft der obere Rand des an die reelle Achse stoßenden schraffierten Bereiches die imaginäre Achse im Punkte

$$in \tan \frac{\pi}{n}.$$

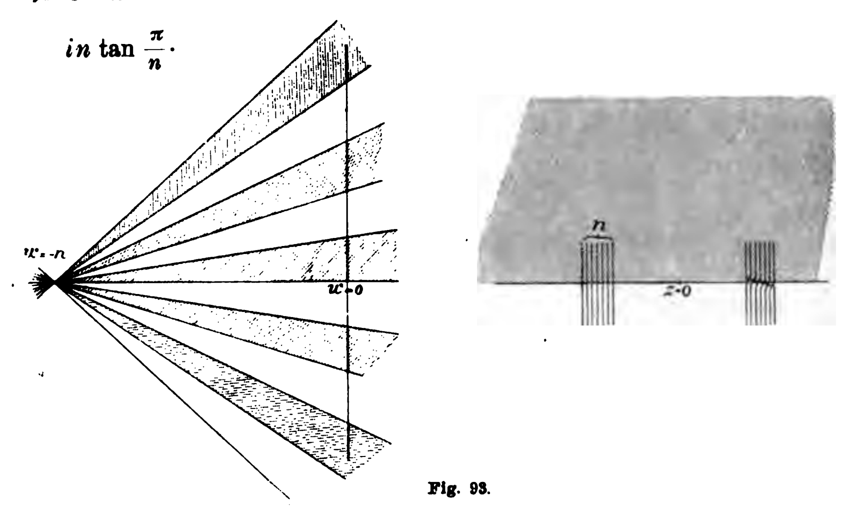


Fig. 93.

Bei wachsendem n strebt dieser Punkt dem Punkte πi zu. Hieraus erkennt man, daß die schraffierten und die nicht schraffierten Gebiete, welche den Bereich S durchsetzen, Parallelstreifen von der Breite π immer noch mehr zustreben. Andererseits vermehrt sich dabei unbegrenzt die Anzahl der Blätter der z-Fläche, welche alle in den Punkten $z = 0, \infty$ im Zyklus zusammenhängen. Das Abbild von S erweist sich hiermit als ein Bereich Σ dieser Fläche, welcher sich bei wachsendem n einem Grenzbereiche $\bar{\Sigma}$ gleichmäßig nähert. Da nun S von vornherein beliebig groß genommen werden durfte, vorausgesetzt nur, daß es sich nicht ins Unendliche erstreckt, so erhält man in der Grenze die Abbildung der Parallelstreifen der w-Ebene auf die unendlich vielblättrige z-Fläche, wie sie uns schon von § 1 her bekannt ist. Wie man sieht, liegen in der Annäherungsabbildung $s_n(w) = z$ die Punkte der w-Ebene, welche alle zum selben Werte z führen, auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte $w = -n$ und zwar bilden sie die

Ecken eines regulären n-Ecks. In der Grenzfigur gehen dann diese Punkte in Punkte über, welche um ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ auseinander liegen.

Analoges für arc cos z und arc sin z. Anknüpfend an die Gebietseinteilung für Funktionen des Doppelpyramidentypus, § 6, Aufgabe 2:

$$w'^n + \frac{1}{w'^n} = z',$$

wollen wir die w'-Ebene zunächst einer Parallelverschiebung unterwerfen, wodurch der Punkt $w' = 1$ in den Nullpunkt übergeführt wird, um die Ebene alsdann um den Nullpunkt durch den Winkel $-\pi/2$ zu drehen und zugleich eine Dehnung von diesem Punkte aus mit dem Ähnlichkeitsverhältnisse n vorzunehmen. Das drückt sich alles durch die Formeln aus:

$$w = -ni(w' - 1), \quad w' = 1 + \frac{iw}{n}.$$

Hierdurch erhält man einerseits vermöge des Grenzübergangs $n = \infty$:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(1 + \frac{iw}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{iw}{n}\right)^{-n}\right] = e^{wi} + e^{-wi} = 2 \cos w = 2z,$$

wobei noch $z = z'/2$ eingeführt ist. Andererseits stellt sich in der

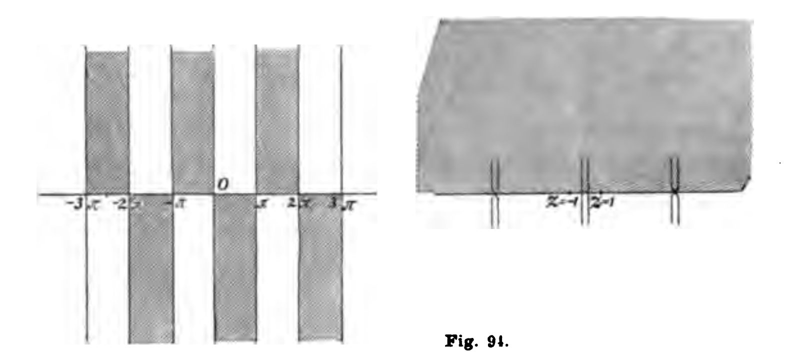


Fig. 94.

Grenze eine Einteilung der w-Ebene in Parallelstreifen ein, wie in beistehender Figur angezeigt ist, während die Blätter der z-Fläche in den Punkten $z = 1, -1$ zu zweien, im Punkte $z = \infty$ allesamt zusammenhängen.

Da endlich $\sin w' = \cos\left(w' - \frac{\pi}{2}\right)$ ist, so erhält man die konforme Abbildung für diese Funktion vermöge einer Parallelverschiebung der

w-Ebene:

$$w = w' - \frac{\pi}{2}, \qquad w' = w + \frac{\pi}{2},$$

wodurch der Punkt $w = -\pi/2$ nach dem Anfang gebracht wird.

Aufgabe. Man transformiere die Doppelpyramidengebietseinteilung der w-Ebene so, daß die beiden Pole bzw. in den Punkten $w = 2ni, \ -2ni$ zu liegen kommen, und verfüge alsdann über eine weitere Ecke so, daß beim Grenzübergange $n = \infty$ einmal $\cos w$, zweitens $\sin w$ herauskommt.

Direkte Behandlung von sin w. Wir können die durch die Funktion

$$\sin w = z$$

definierte Abbildung auch auf rechnerischem Wege sofort bestimmen. Aus

$$\sin(u + vi) = \sin u \cos vi + \cos u \sin vi$$

$$= \sin u \frac{e^{-v} + e^{v}}{2} + \cos u \frac{e^{-v} - e^{v}}{2i} = x + yi$$

folgt:

$$x = \sin u \operatorname{ch} v, \qquad y = \cos u \operatorname{sh} v,$$

und hieraus ferner:

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1, \qquad \frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1.$$

An der Hand dieser Formeln ist es leicht, die Abbildung des Halbstreifens

$$-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqq v$$

zu verfolgen. Die Gerade $v = v_0 > 0$ wird hierdurch in eine Halbellipse der oberen Halbebene mit den Brennpunkten $z = 1, \ -1$ verwandelt, während die Gerade $u = u_0$ in die obere Hälfte eines Hyperbelastes mit den gleichen Brennpunkten übergeht. Durch diese beiden Scharen konfokaler Ellipsen und Hyperbeln wird somit die positive Hälfte der z-Ebene ein-eindeutig und konform auf jenen Halbstreifen bezogen.

In ähnlicher Weise wird auch die negative Hälfte der Ebene auf die negative Hälfte des Streifens abgebildet. Und nun entspricht jedem anstoßenden Halbstreifen ein oberes oder ein unteres Halbblatt, welches der im Entstehen begriffenen Riemannschen Fläche längs des gehörigen Teils der reellen Achse anzugliedern ist. Die Punkte

$w = (n + \frac{1}{2})\pi$ erweisen sich dabei als ausgezeichnete Punkte (§ 2), denen die Punkte $z = 1, -1$ als Verzweigungspunkte erster Ordnung zugeordnet sind.

Die hyperbolischen Funktionen. Aus den Definitionen der hyperbolischen Funktionen:

$$\operatorname{sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} = -i \sin iw,$$

$$\operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \cos iw, \quad \text{usw.},$$

erhellt sofort, daß man die zugehörigen konformen Abbildungen aus denjenigen für $\sin w$, $\cos w$, usw. mittels Drehung der resp. Ebenen um den Punkt $w = 0$ durch einen rechten Winkel gewinnt.

Aufgabe. Man konstruiere die Riemannschen Flächen für die Funktionen:

a) $w = z^i$;

b) $w = z^{a+bi}$.

§ 10. Ein Satz, betreffend eine ausgedehnte Klasse mehrdeutiger Funktionen.

Im Anschlusse an die Entwicklungen von Kap. 5, § 10, Ende kann man folgenden Satz aussprechen.

Satz. *Jedem inneren Punkte eines einfach zusammenhängenden Bereichs T der erweiterten Ebene mögen mehrere Werte $f(z)$ zugeordnet werden. Im Falle die Anzahl der Werte nicht endlich ist, soll sie jedoch abzählbar sein. Diese Werte sollen ferner so beschaffen sein, daß jedem inneren Punkte von T eine bestimmte Umgebung entspricht, in welcher sich der ganze Vorrat der Funktionswerte zu einer Reihe eindeutiger analytischer Funktionen zusammenfassen läßt. Dann können besagte Werte auch im Großen, also im ganzen Bereiche T, zu eindeutigen Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots$ zusammengefaßt werden, deren jede sich in T analytisch verhält und deren Gesamtheit die Werte $f(z)$ gerade erschöpft.*

Enthält der Bereich T den Punkt ∞ im Innern, ohne aus der ganzen Ebene zu bestehen, so wird man vor allem durch eine lineare Transformation bewirken, daß der Punkt ∞ zu einem äußern oder höchstens zu einem Randpunkt wird.

Sei T' ein endlicher einfach zusammenhängender, von einer einfachen regulären Kurve begrenzter Bereich, welcher nebst seinem Rande ganz innerhalb T liegt. Dann zeigt man nach dem gewöhnlichen Verfahren, daß es eine feste positive Zahl h gibt, derart daß, in der Umgebung $|z - z_0| < h$ eines beliebigen Punktes z_0 von T', sich der ganze Vorrat der Funktionswerte zu einer Reihe eindeutiger analytischer Funktionen zusammenfassen läßt.

Im Bereiche T' wollen wir jetzt nach dem Satze vom Kap. 5, § 10 die Kette von Bereichen $S_1, S_2, \ldots, S_N = T'$ konstruieren, wobei der größte Durchmesser des jeweils hinzutretenden Bereichs σ kleiner als h ausfallen möge. Dann gilt der Satz, um dessen Beweis es sich handelt, sicher für S_1. Gilt er ferner für S_k, so gilt er auch für S_{k+1}. In der Tat sei z_0 ein Punkt der gemeinsamen Begrenzung von S_k und dem den Übergang von S_k zu S_{k+1} vermittelnden Bereich σ. Dann lassen sich die Werte von $f(z)$ im Bereiche $|z - z_0| < h$ nach dem Vorhergehenden zu daselbst eindeutigen analytischen Funktionen zusammenfassen, welche nun einerseits resp. mit den bereits in S_k vorhandenen Funktionen in den gemeinsamen Punkten ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, wie sogleich nachgewiesen werden soll, andererseits aber diese über besagten Bereich σ hin analytisch fortsetzen.

Hiermit ist der Satz zunächst für den Bereich T' dargetan. Nach dem Zusatze von Kap. 5, § 10 kann aber T in eine Reihe von Teilbereichen $T_1, T_2, \ldots$ je von der Beschaffenheit des Bereiches T' entwickelt werden, woraus denn die nötige Ergänzung des Beweises sich sofort ergibt. Der Fall der erweiterten Ebene wird ähnlich behandelt, indem man die Umgebung $|z| > G$ des Punktes ∞ vorwegnimmt und dann als Bereich T' das Gebiet $|z| > G' > G$ wählt.

Es erübrigt nur noch, den folgenden Satz zu begründen. *Sind*

$$f_1(z),\ f_2(z),\ldots, \qquad \varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ldots,$$

zwei endliche resp. abzählbare Mengen im Innern und auf der Begrenzung eines regulären Bereichs $\mathfrak{K}$ *analytischer Funktionen, und liefert die erste Menge genau denselben Wertvorrat in* $\mathfrak{K}$ *wie die zweite, so ist jede Funktion* $f_i(z)$ *mit einer Funktion* $\varphi_j(z)$ *identisch, und umgekehrt.*

Zum Beweise genügt es offenbar zu zeigen, daß $f_1(z)$ in der Reihe der φ wirklich vorkommt. Wäre dies nicht der Fall, so könnte $f_1(z)$ im Bereiche $\mathfrak{K}$ nach S. 319, 320 mit $\varphi_i(z)$ nur in einer endlichen, von i abhängigen Anzahl von Punkten übereinstimmen. Demnach gäbe es im Ganzen nur eine abzählbare Menge von Punkten des

Bereichs $\mathfrak{R}$, in denen $f_1(z)$ mit Werten aus der Reihe der φ übereinstimmte. Da nun aber das Kontinuum nach Kap. 5, § 11 nicht-abzählbar ist, so muß ein Punkt von $\mathfrak{R}$, vorhanden sein, der nicht zur letzteren Menge gehört, und hiermit sind wir zu einem Widerspruch geführt. — Als Bereich $\mathfrak{R}$ nehme man einen gemeinsamen Teil von S_k und dem Kreise $|z - z_0| \leqq h' < h$.

§ 11. Die Riemannsche Fläche für die Umkehrung einer allgemeinen rationalen Funktion.

Wir haben eine Reihe von Riemannschen Flächen konstruiert, wobei es sich meist um die Umkehrung einer eindeutigen Funktion gehandelt hat. Betrachten wir nun noch den allgemeinen Fall einer rationalen Funktion. Sei

$$R(w) = \frac{\varphi(w)}{\psi(w)} = z, \tag{1}$$

wo $\varphi(w)$ und $\psi(w)$ teilerfremde Polynome sind. Vorläufig möge der Grad m von $\varphi(w)$ größer als derjenige n von $\psi(w)$ sein. Einem beliebigen Werte von z werden dann im allgemeinen m verschiedene Werte von w entsprechen, welche durch die algebraische Gleichung

$$\varphi(w) - z\psi(w) = 0 \tag{2}$$

bestimmt werden. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn gleichzeitig auch der zweiten Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial w}[\varphi(w) - z\psi(w)] = \varphi'(w) - z\psi'(w) = 0,$$

Genüge geleistet wird. Dazu ist notwendig, daß

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix} = \varphi\psi' - \varphi'\psi = 0 \tag{3}$$

sei. Diese Bedingung reicht aber auch hin, sofern der betreffende Wert von w die Funktion $\psi(w)$ nicht zum Verschwinden bringt, um einen Wert von z zu bestimmen, wofür die Gleichung (2) eine mehrfache Wurzel hat. Nun decken sich die zulässigen Werte von w andererseits gerade mit denjenigen Werten, wofür

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\psi\varphi' - \psi'\varphi}{\psi^2}$$

verschwindet, darum geben sie ausgezeichnete Punkte der w-Ebene ab. Die zugehörigen Punkte der z-Ebene, $\xi_1, \ldots, \xi_k$, zeichnen wir

deshalb auf und verbinden sie durch eine einfache Kurve $\mathfrak{C}$, welche wir noch nach dem Punkte $z = \infty$ fortsetzen. Jedem Punkte z, welcher nur mit keinem Punkte ξ_i zusammenfällt, werden dann m verschiedene Werte von w entsprechen, welche sich in der Umgebung eines beliebigen Punktes $z_0 + \xi_i$ zu m in z_0 analytischen Funktionen vereinigen lassen, derart, daß die den Punkten dieser Umgebung durch (1) zugeordneten Werte gerade erschöpft werden.

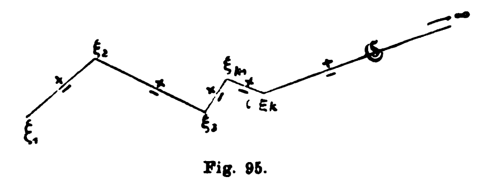


Fig. 95.

Über der z-Ebene sollen jetzt m Blätter ausgebreitet und je längs der Kurve $\mathfrak{C}$ aufgeschnitten werden. Dann werden wir zeigen, daß diese Blätter längs der verschiedenen Bogen von $\mathfrak{C}$ so zusammengefügt werden können, daß eine Riemannsche Fläche zustande kommt, auf welcher die der Funktion $z = R(w)$ entsprechende Umkehrfunktion $w = f(z)$ eindeutig und stetig verläuft. In der Tat sei T der Bereich, welcher entsteht, wenn man die einfache z-Ebene längs $\mathfrak{C}$ aufschneidet. Dann lassen sich die den Punkten von T durch (1) zugeordneten m Werte nach dem Satze von § 10 zu m in T eindeutigen analytischen Funktionen zusammenfassen und somit auf jenen m aufgeschnittenen Blättern eindeutig und stetig ausbreiten.

Es bleibt nur noch übrig, die m Blätter längs der verschiedenen Strecken von $\mathfrak{C}$ zusammenzufügen. Behufs dessen wollen wir diese Blätter numerieren: i, ii, ..., und zugleich auch die beiden Ufer des Schnittes $\mathfrak{C}$ als das positive und das negative unterscheiden. Fassen wir dann den ersten Bogen von $\mathfrak{C}$: (ξ_1, ξ_2) ins Auge und betrachten wir die dem positiven Ufer von i entsprechenden Funktionswerte. Diese stimmen mit den dem negativen Ufer desselben resp. eines zweiten Blattes entsprechenden Funktionswerten überein. Man kann nämlich den genannten Bogen mit einem einfach zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{T}$ umgeben[1]), welcher keine weiteren Punkte von $\mathfrak{C}$ umfaßt, und dann die den Punkten von $\mathfrak{T}$ gehörigen Werte w nach dem Satze des vorhergehenden Paragraphen zu m in $\mathfrak{T}$ analytischen Funktionen zusammenfassen. Eine dieser Funktionen wird in dem gemeinsamen, am positiven Ufer gelegenen Teile von $\mathfrak{T}$ und dem Blatte i mit der jenem Blatte zugeordneten Funktion übereinstimmen, während sie im übrigen Teile von $\mathfrak{T}$ mit der demselben bzw. einem anderen Blatte

1) Die hierzu nötige Arithmetisierung findet sich in Kap. 5, § 6.

entsprechenden Funktion zusammenfällt. Auf diese Weise wird die Verbindung zwischen allen Blättern für diesen Bogen von $\mathfrak{C}$ hergestellt. Wiederholt man den Prozeß an jedem weiteren Bogen von $\mathfrak{C}$, so erhält man schließlich die in Aussicht genommene Riemannsche Fläche. Was die Punkte eines Verzweigungsschnitts anbetrifft, so zählt man sie gewöhnlich alle zu ein und demselben der beiden zusammenstoßenden Blätter, — zu welchem ist ja gleichgültig.

Wir haben vorausgesetzt, daß $m > n$ sei. Der Fall $m \leqq n$ läßt sich durch eine lineare Transformation sowohl von w als von z auf den soeben besprochenen zurückführen.

Aufgabe. Man zeige, daß der Punkt $w = \infty$ ein ausgezeichneter Punkt ist, wenn $n < m - 1$ oder $n > m + 1$ ist.

Wie lautet die Bedingung, wenn $n = m$ ist?

§ 12. Die Riemannsche Fläche für eine allgemeine algebraische Funktion.

Die spezielle Klasse algebraischer Funktionen, die wir im vorhergehenden Paragraphen behandelt haben, zeichnet sich dadurch aus, daß die Existenz und analytische Eigenschaft der mehrdeutigen Funktion, deren Riemannsche Fläche konstruiert werden sollte, mittels des Theorems von Kap. 6, § 7 in einfachster Weise erschlossen werden konnte. Hat man einmal die entsprechenden Sätze für die allgemeine algebraische Funktion erworben, so kann man auch hier dieselben Methoden zur Herstellung der Fläche benutzen.

Sei

$$(1)\qquad G(w, z) = A_0(z)\,w^m + A_1(z)\,w^{m-1} + \cdots + A_m(z) = 0,$$
$$m > 0, \qquad A_0(z) \neq 0,$$

eine beliebige irreduzibele algebraische Gleichung, d. h. das Polynom G soll sich nicht in das Produkt zweier anderer Polynome spalten lassen. Einem beliebigen Werte von z entsprechen dann im allgemeinen m verschiedene Werte von w. Eine Ausnahme tritt nur für eine endliche Anzahl von Punkten ein, die wir in der z-Ebene aufzeichnen und fürs erste von der Betrachtung ausschließen wollen. Das sind nämlich:

a) die Punkte $z = \xi_1, \ldots, \xi_k$, wofür die Gleichung $G(w, \xi_i) = 0$ eine mehrfache Wurzel hat. Diese Werte finden sich unter denen,

wofür die Diskriminante der Gleichung (1) verschwindet. Die Punkte ξ sind dadurch charakterisiert, daß gleichzeitig den beiden Gleichungen:

$$G(w, \xi_i) = 0, \qquad G_w(w, \xi_i) = 0,$$

wo $G_w(w, z) = \partial G(w, z)/\partial w$ ist, genügt werden kann;

b) die Punkte $z = \eta_1, \ldots, \eta_l$, wofür $A_0(z)$ verschwindet.

Jedem Punkt z_0, welcher nur mit keinem Punkte von a), b) zusammenfällt, werden nun m getrennte Werte von w entsprechen. Wir wollen zeigen, daß jedem dieser Werte eine bestimmte Umgebung des Punkte z_0 und eine in dieser Umgebung eindeutige analytische Funktion derart zugeordnet werden können, daß die Funktion im Punkte z_0 den betreffenden Wert von w annimmt und, gleich w gesetzt, das Polynom $G(w, z)$ in jedem Punkte der Umgebung zum Verschwinden bringt. Die m Funktionen zusammengenommen werden dann offenbar das den Punkten der betreffenden Umgebung durch (1) zugeordnete Wertesystem gerade erschöpfen.

In der Tat sei

$$G(w, z) = P(u, v, x, y) + i\, Q(u, v, x, y),$$

wo also P, Q reelle Polynome in u, v, x, y sind; und sei ferner w_0 ein beliebiger der dem Punkte z_0 durch (1) zugeordneten Werte. Dann ist

$$G(w_0, z_0) = P(u_0, v_0, x_0, y_0) + i\, Q(u_0, v_0, x_0, y_0) = 0;$$

dagegen ist

$$G_w(w_0, z_0) = P_u(u_0, v_0, x_0, y_0) + i\, Q_u(u_0, v_0, x_0, y_0) \neq 0.$$

Nach Kap. 2, § 5 werden sich nun die beiden Gleichungen

$$(2) \qquad P(u, v, x, y) = 0, \qquad Q(u, v, x, y) = 0$$

in der Nähe des Punktes (u_0, v_0, x_0, y_0) in eindeutiger Weise nach u, v auflösen lassen:

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y),$$

wenn nur die Jacobische Determinante

$$J = \begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Wegen der Cauchy-Riemannschen Differential-

gleichungen ist aber

$$P_u = Q_v, \qquad P_v = -Q_u,$$

folglich ist

$$J = P_u^2 + Q_u^2 = |G_w(w, z)|^2 \neq 0,$$

und da ist also alles in Ordnung.

Durch die hiermit erhaltene eindeutige stetige Funktion

$$u + vi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

werden daher alle Werte von w, die in der Nähe des Punktes w_0 liegen und der Gleichung (1) genügen, gerade erschöpft. Es bleibt nur noch übrig, den analytischen Charakter dieser Funktion zu konstatieren. Das geschieht nun, indem man durch Differentiation der Gleichungen (2) direkt nachweist, daß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ist.

Von hier ab gilt das Raisonnement des vorhergehenden Paragraphen, nur muß die Kurve $\mathfrak{C}$ jetzt durch alle $k + l$ Punkte beider Klassen a), b) gehen. Diese Punkte, nebst dem Punkte $z = \infty$, umfassen alle Verzweigungspunkte und Pole der Funktion w. Im allgemeinen werden aber nur ein Teil der Blätter in einem bestimmten dieser Punkte verzweigt sein oder einen Pol der Funktion aufweisen; ja, es kann sogar vorkommen, daß in einigen der Punkte weder Verzweigungen noch Pole auftreten; vgl. § 17.

Aufgabe. Sei $(b, a_1, \ldots, a_m)$ ein Punkt des durch die algebraische Gleichung

$$G(w, z_1, \ldots z_m) = 0$$

bestimmten Ortes, wofür

$$G_w(b, a_1, \ldots, a_m) \neq 0$$

ist. Man zeige, daß diejenigen Punkte der Nachbarschaft von $(b, a_1, \ldots, a_m)$, wofür G verschwindet, zu einer in der Nähe von $(a_1, \ldots, a_m)$ eindeutigen stetigen Funktion

$$w = \varphi(z_1, \ldots, z_m)$$

Anlaß geben, und daß außerdem

$$\frac{\partial w}{\partial x_l} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y_l}$$

ist, wo $z_l = x_l + iy_l$ und $l = 1, \ldots, m$.

---

§ 13. Von dem Verhalten einer mehrdeutigen Funktion in einem Verzweigungspunkte.

In der Umgebung T eines Punktes $z = a$ sei eine mehrdeutige Funktion $f(z)$ gegeben. Hebt man den Punkt a aus T fort und bezeichnet man den hierdurch entstandenen Bereich mit T^-, so möge $f(z)$ in T^- die Bedingungen des Satzes von § 10 erfüllen. Jetzt breite man n bzw. unendlich viele Blätter über T^- aus und schneide diese alle längs einer den Punkt a mit dem Rande von T verbindenden Kurve L auf. Dann lassen sich die verschiedenen Bestimmungen von $f(z)$ zu in den letztgenannten Bereichen eindeutigen analytischen Funktionen zusammenfassen. Und nun kann man wieder gerade so, wie in den bereits besprochenen Fällen die an L stoßenden Ränder dieser Bereiche zusammenfügen, derart, daß ein oder mehrere Stücke Riemannscher Flächen zu stande kommen, auf denen die bezügliche Bestimmung von $f(z)$ eindeutig und stetig verläuft. Wie man sieht, stellt sich ein oder mehrere Verzweigungspunkte ein. Dabei sind die beiden extremen Fälle die, a) daß jeder Verzweigungspunkt von der 0-ten Ordnung ist, d. h. die Blätter verlaufen alle schlicht; b) daß alle Blätter in einem einzigen Zyklus zusammenhängen.

Wir wollen jetzt bloß diejenigen Bestimmungen $f_1(z)$ von $f(z)$ herausgreifen, welche den n Blättern eines einzigen Zyklus endlicher Ordnung entsprechen. Durch die Transformation

$$(1) \qquad z - a = t^n$$

wird dann die Umgebung des Verzweigungspunktes auf die schlichte Umgebung der Stelle $t = 0$ ein-eindeutig und stetig und, vom Punkte $z = a$ selbst abgesehen, auch konform abgebildet. Dabei wird $f_1(z)$ in eine Funktion $\varphi(t)$ übergeführt, welche in der Umgebung der Stelle $t = 0$, höchstens mit Ausnahme dieses Punktes selbst, eindeutig und analytisch ist. Auf das Verhalten von $\varphi(t)$ im Punkte $t = 0$ lassen sich mithin die Sätze von Kap. 7, § 6 in Anwendung bringen. Demnach hat man drei Fälle zu unterscheiden.

a) Es ist
$$f_1(a) = \infty.$$
Die Funktion $f_1(z)$ hat also jetzt einen *Pol* im Verzweigungspunkte $z = a$. Dann wird auch $\varphi(t)$ einen Pol im Punkte $t = 0$ haben.

b) $f_1(z)$ bleibt endlich im bewußten Bereiche. Dann bleibt auch $\varphi(t)$ endlich, und letztere Funktion nähert sich einem Grenzwerte b,

wenn t gegen 0 konvergiert. Infolgedessen nähert sich $f_1(z)$ dem Grenzwerte[1]) b:

$$\lim_{z=a} f_1(z) = b.$$

Läßt $f(z)$ die Bestimmung b im Punkte $z = a$ zu und verabredet man überdies, daß gerade diese Bestimmung den Bestimmungen $f_1(z)$ zugesellt werden soll, so heißt $f_1(z)$ im Punkte $z = a$ *stetig.*

c) In jedem anderen Falle hat $f_1(z)$ eine *wesentliche singuläre Stelle* im Punkte $z = a$. Dementsprechend kommt auch $f_1(z)$ jedem vorgegebenen Werte in jeder Umgebung des Verzweigungspunktes $z = a$ beliebig nahe. Die Funktion $\varphi(t)$ hat jetzt ebenfalls eine wesentliche singuläre Stelle in diesem Punkte.

Der Entwicklung der Funktion $\varphi(t)$ in eine Laurentsche Reihe entsprechend erhält man nun für $f_1(z)$ in jedem der drei Fälle eine Darstellung von der Gestalt:

(2) $$f_1(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k/n}.$$

Hierbei ist im Falle b) $m \geqq 0$. Ist $m > 0$, $c_m \neq 0$, so hat $f_1(z)$ im Verzweigungspunkte eine *Wurzel m-ter Ordnung.* Allgemein nimmt $f_1(z)$ den Wert $f_1(a)$ m-mal an, wenn $f_1(z) - f_1(a)$ im Punkte a m-mal verschwindet.

In ähnlicher Weise definiert man die Ordnung eines Poles. Sei $m = -\mu$, $\mu > 0$, $c_m \neq 0$. Dann gilt der Verzweigungspunkt a als ein *Pol μ-ter Ordnung.* — Im Falle einer wesentlichen singulären Stelle gibt es endlich eine unbegrenzte Anzahl nicht verschwindender Koeffizienten mit negativem Index. Dabei ist $m = -\infty$ zu setzen.

Die Entwicklungen dieses Paragraphen bleiben alle noch bestehen, wenn der Verzweigungspunkt im Punkte $z = \infty$ liegt, sofern man an Stelle von (1) die Transformation

(3) $$z = t^{-n}$$

treten läßt und dementsprechend durchweg $z - a$ durch $1/z$ ersetzt.[2])

1) Genau genommen handelt es sich hier um eine Erweiterung des Begriffs eines Grenzwertes, bzw. im Falle a) des Unendlichwerdens. Diese liegt jedoch so klar zu Tage, daß wir uns wohl dabei nicht weiter aufzuhalten brauchen.

2) Vorbildlich für die Form der Entwicklung (2) war schon das Newtonsche Verfahren zur Trennung der Zweige einer algebraischen Kurve, vgl. Clebsch-Lindemann, *Geometrie,* Bd. 1, 4. Abt. II. Erst durch die Arbeiten von Puiseux und Riemann ist die Gültigkeit der genannten Entwicklung in Sicherheit

Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. Integrale. Das Residuum. In den bisherigen Entwicklungen sind wir von einer mehrdeutigen Funktion ausgegangen und haben dann eine Riemannsche Fläche für sie konstruiert. Sehen wir dagegen die Riemannsche Fläche als gegeben an und erteilen wir ihren Punkten je einen bestimmten Wert[1]), so entsteht eine Funktion $F(z)$ auf der Fläche. Wir wollen voraussetzen, daß $F(z)$ sich in den gewöhnlichen Punkten der Fläche im allgemeinen analytisch verhält. Insbesondere sei $z = a$ ein Verzweigungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung, in dessen Umgebung $F(z)$ sonst ausnahmslos analytisch ist. Dann überträgt sich die vorhergehende Untersuchung betreffend das Verhalten der Funktion $f_1(z)$ im Verzweigungspunkte $z = a$ ohne weiteres auf den vorliegenden Fall. Nur in einer Hinsicht ist ein Unterschied zu verzeichnen. Die Funktion $F(z)$ kann nämlich, da die Riemannsche Fläche nicht für sie konstruiert wurde, in verschiedenen Blättern identisch gleiche Werte haben. Sei bespielsweise die Fläche für

$$w = z^{\frac{1}{12}}, \qquad a = 0,$$

gegeben. Dann kann $F(z)$ insbesondere eine der Funktionen sein:

$$\frac{i}{z^{1/12}}, \qquad e^{z^{-\frac{1}{3}}}, \qquad \frac{3z}{2-\sqrt{z}}, \qquad z, \qquad 0.$$

Definition. Ist $f_1(z)$ eindeutig auf der Fläche in der Umgebung des Verzweigungspunktes $z = a$, — höchstens mit Ausnahme dieses Punktes selbst, wofür sie nicht definiert zu sein braucht, — und nimmt $f_1(z)$ überdies in verschiedenen Blättern niemals identisch gleiche Werte an, so heißt $f_1(z)$ im Verzweigungspunkte a *mit der Fläche gleichverzweigt*. Zwei Funktionen heißen in einem Verzweigungspunkte *miteinander gleichverzweigt*, wenn jede derselben auf der für die andere konstruierte Riemannsche Fläche in der Umgebung besagten Punktes eindeutig ist.

Das *Residuum* läßt sich in einem Verzweigungspunkte genau so definieren, wie früher im Falle eines gewöhnlichen Punktes, indem

---

gestellt: Puiseux, *Journ. de math.*, Bd. 15 (1850) S. 365, und Jordan, *Cours d'analyse*, Bd. 1, 2. Aufl., welche den Beweis für die algebraischen Funktionen durchführten; Riemann, *Inauguraldissertation*, 1851, *Werke*, S. 3, dessen Methoden allgemeine Gültigkeit besitzen. Die Entwicklungen des Textes sind im Sinne Riemanns gehalten.

1) Es empfiehlt sich zuweilen, auch mehrdeutige Funktionen $F(z)$ auf der Fläche in Betracht zu ziehen.

man eine einfache reguläre, auf der Riemannschen Fläche geschlossene, keine weitere Singularität enthaltende Kurve C um a legt und dann das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz$$

in positiver Richtung über dieselbe hinerstreckt. Der Reihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{\frac{k}{n}}$$

entsprechend hat das Residuum den Wert

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,dz = n c_{-n},$$

falls $m \leqq -n$ bzw. $m = -\infty$ ist, sonst hat es den Wert 0. Im Punkte $z = \infty$ tritt an Stelle dieser Formeln:

$$F(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k:n}}, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,dz = -n c_n.$$

Das Residuum von $F(z)$ im Verzweigungspunkte $z = a$ und dasjenige der durch die Transformation (1) bzw. (3) aus $F(z)$ entstandenen Funktion $\varphi(t)$ im Punkte $t = 0$ haben den gleichen Wert. Endlich sei noch bemerkt, daß die Ordnung einer Wurzel resp. eines Poles von $F(z)$ in $z = a$ auch im gegenwärtigen Falle durch das Residuum von $F'(z) : F(z)$, also durch das logarithmische Residuum von $F(z)$, gegeben wird. Im Falle eines Poles erhält man so den negativen Wert der Ordnung.

Erstreckt man das Integral

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} F(z)\,dz$$

über einen beliebigen Integrationsweg hin, so erhält man eine Funktion, welche sowohl ein- als auch mehrdeutig auf der Fläche sein kann. Im Kleinen verhält sich jedoch $\Phi(z)$ analytisch in jedem Punkte, in welchem $F(z)$ analytisch ist. Hat $F(z)$ in einem gewöhnlichen endlichen Punkte der Fläche einen Pol m-ter Ordnung ($m > 1$), so hat $\Phi(z)$ dort einen Pol ($m-1$)-ter Ordnung nebst einer logarithmischen Singularität; letztere fällt nur dann fort, wenn das Residuum von $F(z)$ im betreffenden Punkte verschwindet. Dagegen weist $\Phi(z)$ in einem endlichen Verzweigungspunkte, welcher ein Pol m-ter

Ordnung ($m > n$) für den Integranden ist, nur einen Pol $(m-n)$-ter Ordnung auf, wozu sich noch eine logarithmische Singularität gesellt, sofern das Residuum in diesem Punkte nicht verschwindet. Im übrigen bleibt $\Phi(z)$ endlich in einem endlichen Verzweigungspunkte, wenn $F(z)$ dort einen Pol von niedriger als der n-ten Ordnung hat.

Im Punkte $z = \infty$ entspricht ferner einem Pole m-ter Ordnung des Integranden ein Pol $(m+n)$-ter Ordnung des Integrals, wozu noch im allgemeinen eine logarithmische Singularität hinzutritt. Soll das Integral hier weder einen Pol noch eine logarithmische Singularität aufweisen, so muß der Integrand mindestens eine Wurzel $(n+1)$-ter Ordnung haben. Das Verschwinden des Residuums ist wieder notwendig und hinreichend dafür, daß $\Phi(z)$ in der Umgebung des Verzweigungspunktes eindeutig auf der Fläche bleibe.

Insbesondere hat sich folgendes Resultat ergeben. Sei $z = a$ ein gewöhnlicher Punkt oder ein Verzweigungspunkt endlicher Ordnung; dabei darf auch $a = \infty$ sein. Damit das Integral $\Phi(z)$ in der Umgebung von a eindeutig bleibe, ist notwendig und hinreichend, daß das Residuum von $F(z)$ im Punkte $z = a$ verschwindet.

Aufgabe 1. Man zeige, daß das elliptische Integral

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad 0 < |k| < 1,$$

überall endlich und stetig auf der Riemannschen Fläche für die Funktion

$$w = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

nicht aber eindeutig auf dieser Fläche ist.

Aufgabe 2. Man zeige, daß eine logarithmische Singularität und ein Pol sich niemals gegenseitig derart aufwiegen können, daß die Funktion endlich bleibt.

§ 14. Fortsetzung: Parameterdarstellung in einem Verzweigungspunkte. Abbildung.

Den Transformationen (1), (3) des vorhergehenden Paragraphen entsprechend läßt eine Funktion $w = f(z)$ von der vorhin angenommenen Beschaffenheit, — sei es die Funktion, wofür die Fläche konstruiert wurde, sei es bloß eine Funktion auf einer vorgegebenen

Fläche — in einem Verzweigungspunkte ($n-1$)-ter Ordnung die Parameterdarstellung zu:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} z-a&=t^n,\\ w&=\varphi(t),\end{aligned}\right\}$$

wo $\varphi(t)$ in der Umgebung des Punktes $t=0$, höchstens von diesem Punkte selbst abgesehen, eindeutig und analytisch ist. Hierbei muß, im Falle $a=\infty$ ist, $1/z$ an Stelle von $z-a$ treten. Bleibt $f(z)$ im Verzweigungspunkte endlich, so ergibt sich:

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} z-a&=t^n\\ w-b&=t^p\psi(t),\end{aligned}\right\}$$

wobei $\psi(t)$ im Punkte $t=0$ analytisch und, sofern $f(z)\not\equiv b$, von Null verschieden ist, während die natürliche Zahl p angibt, wie oft $f(z)$ den Wert b im Verzweigungspunkte annimmt. Im Falle eines Poles p-ter Ordnung tritt hier $1/w$ an Stelle von $w-b$. So läßt sich die Darstellung wohl am leichtesten im Kopfe behalten. Will man aber damit rechnen, so empfiehlt es sich der zweiten Gleichung die Form zu geben:

$$w=t^{-p}\psi(t).$$

Jeder Wert von t in der Umgebung von $t=0$ führt zu einem einzigen Wertepaare (w, z), welches der Funktion $w=f(z)$ angehört. Die Umkehrung gilt nur unter folgenden Einschränkungen.

Satz. *Vorgelegt sei eine Riemannsche Fläche, welche im Punkte $z=a$ einen Verzweigungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung hat. Man führe eine neue Veränderliche t mittels der Relation*

$$z-a=t^n,\qquad \textit{resp., falls } a=\infty,\qquad 1/z=t^n$$

ein. Sei ferner $w=f(z)$ eine Funktion auf der Fläche, welche in der Nähe des Verzweigungspunktes mit der Fläche gleichverzweigt ist und dort stetig bleibt oder höchstens in $z=a$ einen Pol hat. Dann wird jedem Wertepaar (w, z), welches einer bestimmten Umgebung des Verzweigungspunktes angehört, nur ein einziger Wert von t entsprechen.

Der Beweis verläuft so. Wäre der Satz falsch, so könnte man eine unendliche Menge von Punkten $t_1, t_2, \ldots$ mit $\lim\limits_{i=\infty} t_i = 0$ finden, wofür gleichzeitig die Relationen, — wir beschränken uns ja auf den Fall, daß der Punkt a im Endlichen liegt:

$$\left.\begin{aligned} z_i-a&=t_i^n\\ w_i-b&=t_i^p\psi(t_i)\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} z_i-a&=(\omega_i t_i)^n\\ w_i-b&=(\omega_i t_i)^p\,\psi(\omega_i t_i)\end{aligned}\right\},$$

bestehen. Hierbei bedeutet ω_i eine von 1 verschiedene n-te Einheitswurzel. Nun überzeugt man sich leicht, daß es eine unendliche Teilmenge dieser Menge geben muß, wofür alle ω_i ein und denselben Wert ω haben. Wenn man also die Funktion

$$t^p \psi(t) - (\omega t)^p \psi(\omega t)$$

bildet, so ist klar, daß diese identisch verschwinden muß. Denn sie verhält sich ja analytisch im Punkte $t = 0$ und verschwindet unendlich oft in der Nähe dieses Punktes. Hieraus folgt aber, daß die Funktion $f(z)$ in den beiden Blättern, welche t und ωt entsprechen, identisch gleiche Werte hat, was gegen die Voraussetzung verstößt, daß $f(z)$ mit der Fläche gleichverzweigt sei.

Definition. Unter den Bedingungen des letzten Satzes heißt die Parameterdarstellung *zur Funktion gehörig.*

Satz. *Die Funktion $f(z)$ läßt fernerhin im allgemeinen Falle die Darstellung zu:*

$$w - b = (z-a)^{\frac{p}{n}} \psi\left((z-a)^{\frac{1}{n}}\right) \tag{3}$$

resp.

$$w = (z-a)^{-\frac{p}{n}} \psi\left((z-a)^{\frac{1}{n}}\right),$$

wo $\psi(t)$ sich im Punkte $t = 0$ analytisch verhält und, sofern $f(z) \not\equiv b$, dort nicht verschwindet. Dabei brauchen die Zahlen p und n nicht teilerfremd zu sein. Im Punkte $z = \infty$ wird $z - a$ durch $1/z$ ersetzt.

Wir werfen noch die Frage auf: Welches ist die allgemeinste zur Funktion $w = f(z)$ gehörige Parameterdarstellung

$$z - a = \chi(\tau), \qquad w - b = \omega(\tau)? \tag{4}$$

Dabei sollen die Funktionen $\chi(\tau)$, $\omega(\tau)$ im Punkte $\tau = \tau_0$ analytisch sein. Wie man sofort erkennt, wird hierdurch die Umgebung des Punktes $t = 0$ auf die Umgebung von $\tau = \tau_0$ ein-eindeutig und, höchstens mit Ausnahme des Punktepaares $t = 0$, $\tau = \tau_0$, konform abgebildet. Da die Beziehung aber selbst hier stetig ist, so muß sie auch konform sein. Hieraus ergibt sich, daß τ eine im Punkte $t = 0$ analytische Funktion von t ist, und umgekehrt. Insbesondere ist

$$\left.\frac{d\tau}{dt}\right|_{t=0} \neq 0.$$

Diese Bedingungen sind sowohl notwendig als hinreichend.[1])

1) Von der hier besprochenen Parameterdarstellung durch die Variabele t macht Weierstraß prinzipiellen Gebrauch in seinen Vorlesungen über algebraische und Abelsche Funktionen, *Werke*, Bd. 3.

Hiermit sind wir zu einer symmetrischen Form der Gleichungen (2) geführt:

$$\text{(A)} \qquad z - a = t^n \varphi(t), \qquad w - b = t^p \psi(t),$$

wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sich im Punkte $t = 0$ analytisch verhalten, $\varphi(0) \neq 0$, und, sofern $f(z) \not\equiv b$, auch $\psi(0) \neq 0$ ist.

Abbildung in einem Verzweigungspunkte. In einem Verzweigungspunkte $(n-1)$-ter Ordnung, $z = a$, einer vorgelegten Riemannschen Fläche sei $f(z)$ mit der Fläche gleichverzweigt. Ist $f(z)$ dort stetig und nimmt $f(z)$ den Wert $f(a)$ p-mal an, oder hat $f(z)$ dort einen Pol p-ter Ordnung, so ergibt sich aus den vorhergehenden Entwicklungen, daß die n-blättrige Nachbarschaft von $z = a$ vermöge der Gleichung

$$\text{(5)} \qquad w = f(z)$$

auf die Umgebung eines Verzweigungspunktes $(p-1)$-ter Ordnung in der w-Ebene: $w = b = f(a)$ resp. $w = \infty$ ein-eindeutig und, vom Punktepaare (b, a) allein abgesehen, konform abgebildet wird. In der Tat ist hier der Punkt $t = 0$ ein ausgezeichneter Punkt für beide Funktionen (2), sofern $p > 1$ ist. Durch die zweite derselben wird also die schlichte Umgebung dieses Punktes auf die Umgebung eines Verzweigungspunktes $(p-1)$-ter Ordnung in $w = b$ bezogen, vgl. § 2, woraus denn die Richtigkeit des Satzes unmittelbar erhellt. Wir können das Ergebnis auch in folgender Form aussprechen. *Die Gleichung* (5) *läßt sich nach z auflösen, und zwar ist*

$$z - a = (w - b)^{\frac{n}{p}} \, \Psi \left[(w - b)^{\frac{1}{p}} \right],$$

wo $\Psi(t)$ sich im Punkte $t = 0$ analytisch verhält und dort nicht verschwindet. Ist $a = \infty$ oder $b = \infty$, so wird $z - a$ durch $1/z$ resp. $w - b$ durch $1/w$ ersetzt.

Im übrigen entspringt aus der Darstellung (3), daß, im Falle a und b beide im Endlichen liegen, einem unendlich kleinen von $z = a$ ausgehenden Vektor Δz ein ebensolcher von $w = b$ ausgehender Vektor Δw entspricht, wofür

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{(\Delta w)^n}{(\Delta z)^p}$$

endlich und von Null verschieden ist. Hierin liegt die Begründung folgenden Satzes: *Stoßen zwei Kurven C_1, C_2 im Verzweigungspunkte $z = a$ unter dem Winkel α zusammen, so schließen ihre Bildkurven im*

Punkte $w = b$ *einen Winkel* $\beta = (p/n)\alpha$ *miteinander ein.* Dabei wird sowohl β als α in der Riemannschen Fläche gemessen und darf daher den Wert 2π überschreiten. In der Tat unterscheiden sich die als verschieden aufzufassenden Bestimmungen von α um ganzzahlige Vielfache, nicht von 2π, sondern vielmehr von $2n\pi$. — *Bezeichnet man ferner mit* Δs, ΔS *die Längen zweier einander entsprechender von* $z = a$ *resp.* $w = b$ *ausgehender unendlich kleiner Bogen und sieht man* Δs *als unendlich klein von der ersten Ordnung an, so wird* ΔS *unendlich klein von der* p/n*-ten Ordnung.* Meist empfiehlt es sich indessen, im Anschluß an die Parameterdarstellung (2) den Bogen $\Delta\sigma$ der entsprechenden Kurve in der t-Ebene als unendlich klein von der ersten Ordnung zu nehmen. Dann haben Δs und ΔS beide ganzzahlige Ordnungen, nämlich n resp. p.[1])

§ 15. Über algebraische Funktionen.

In Kap. 7 haben wir die Merkmale einer rationalen Funktion kennen lernen, wonach sich nämlich eine Funktion als rational erweist, wenn sie eindeutig ist und keine anderen Singularitäten in der erweiterten Ebene als nur Pole hat. Wir wollen jetzt ein entsprechendes Merkmal für eine algebraische Funktion aufsuchen. Ein solches wird durch folgenden Satz geliefert.

1. Satz.[2]) *Eine endlich vieldeutige Funktion*

$$w = f(z),$$

welche keine anderen Singularitäten in der erweiterten Ebene als nur Pole und Verzweigungspunkte hat, genügt einer algebraischen Gleichung:

$$G(w, z) = 0, \tag{1}$$

wo G *ein Polynom in* w *und* z *bedeutet.*

Den Voraussetzungen des Satzes gemäß soll einem beliebigen Punkte $z = z_0$ der erweiterten Ebene eine gewisse Umgebung entsprechen, in welcher die verschiedenen Bestimmungen von $f(z)$ sich zu einer endlichen Reihe von Funktionen zusammenfassen lassen, deren jede sich in z_0 analytisch verhält oder dort höchstens einen Pol oder einen Verzweigungspunkt endlicher Ordnung aufweist. Im letzteren

1) Riemann, *Inauguraldissertation*, § 15, *Werke*, S. 29.
2) Riemann, ibid. § 20.

Falle genügen außerdem diejenigen Bestimmungen von $f(z)$, welche dort im Zyklus zusammenhängen, den am Eingange des § 13 ausgesprochenen Forderungen und können daher durch die Formel:

$$(z - z_0)^{\frac{p}{n}} \psi\left((z - z_0)^{\frac{1}{n}}\right), \qquad \psi(0) \neq 0,$$

resp., falls $z_0 = \infty$ ist:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{p}{n}} \psi\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \qquad \psi(0) \neq 0,$$

wo p eine ganze Zahl und $\psi(t)$ sich im Punkte $t = 0$ analytisch verhält, ausgedrückt werden; das Auftreten einer wesentlichen Singularität in einem Verzweigungspunkte ist nämlich nach Voraussetzung ausgeschlossen. Wie man sieht, sind die Ausnahmestellen, welche hier in Betracht kommen, nur isolierte Punkte der erweiterten Ebene, und da diese doch als eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit aufzufassen ist, — ihr Abbild auf der Kugel ist ja im gewöhnlichen Sinne abgeschlossen, — so können jene Stellen nur in endlicher Anzahl vorhanden sein; sie mögen mit $\xi_1, \ldots \xi_\mu$ bezeichnet werden. Hieraus folgt aber auch, daß die Anzahl der Funktionswerte in allen übrigen Punkten durchweg die nämliche sein muß. Um dies einzusehen, lege man um einen jeden der Ausnahmepunkte einen kleinen Kreis und entferne das Innere desselben von der Ebene. Hierauf werde der dadurch entstandene Bereich durch Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden verwandelt. Und nun erfüllt $f(z)$ im letzteren Bereiche die Bedingungen des Satzes von § 10. Wir bemerken noch, daß die Forderung der Endlichvieldeutigkeit nicht entbehrlich ist, wie das Beispiel des elliptischen Integrals (§ 13, Ende):

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \qquad 0 < |k| < 1,$$

zeigt. In der Tat wird diese Funktion allen anderen Forderungen des Satzes gerecht, nur ist sie unendlich vieldeutig.

Wenden wir uns jetzt zum Beweise des Satzes hin. Die n Bestimmungen von $f(z)$ in einem gewöhnlichen Punkte z mögen mit

$$w_1 = f_1(z), \cdots, w_n = f_n(z)$$

bezeichnet werden. Hieraus wollen wir folgende n symmetrische Funktionen zusammensetzen:

$$\varphi_1(z) = w_1 + \cdots + w_n,$$
$$\varphi_2(z) = w_1 w_2 + \cdots + w_{n-1} w_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(z) = w_1 \cdots w_n.$$

Dieselben sind zunächst in jedem Punkte $z \neq \xi_i$ eindeutig erklärt und verhalten sich dort überdies analytisch. Man darf sich nämlich die n Bestimmungen von $f(z)$ in der Umgebung eines solchen Punktes so umnumeriert denken, daß die mit gleichem Index behafteten Bestimmungen je eine in dem in Rede stehenden Bereiche analytische Funktion ausmachen. Wenn wir nun außerdem noch den Nachweis erbringen, daß $\varphi_k(z)$ in den Punkten $z = \xi_i$ höchstens Pole hat, so ist damit dargetan, daß $\varphi_k(z)$ eine rationale Funktion von z ist.

Zu dem Behufe fasse man die Ordnungen $(n_1 - 1), \cdots, (n_q - 1)$ der in $\xi_i = a$ befindlichen Verzweigungspunkte ins Auge und bezeichne man mit ν das kleinste gemeinsame Vielfache von $n_1, \ldots, n_q$. Führt man jetzt eine neue Variabele t mittels der Gleichung

$$z - a = t^\nu$$

ein, — im Falle $a = \infty$ soll $1/z = t^\nu$ gesetzt werden, — so läßt sich eine jede der Funktionen $w_j = f_j(z)$ in der Form:

$$w_j - f_j(a) = t^{p_j} \chi_j(t) \quad \text{resp.} \quad w_j = t^{-p_j} \chi_j(t)$$

darstellen, wo p_j eine natürliche Zahl und $\chi_j(t)$ eine im Punkte $t = 0$ analytische, sofern $w_j - f_j(a) \not\equiv 0$, dort nicht verschwindende Funktion von t ist. Dabei denken wir uns folgende Festsetzung bezüglich der Verteilung der Indizes getroffen. Wir schneiden eine geeignet beschränkte Kreisscheibe $|z - a| < h$ längs des Radius

$$z - a = \lambda h, \qquad 0 \leqq \lambda < 1,$$

auf und fassen die den Punkten des also entstandenen Bereichs T entsprechenden Bestimmungen von $f(z)$ zu n in T analytischen Funktionen zusammen, denen wir dann unter Umnumerierung derselben die Indizes $1, \ldots, n$ zuweisen. Im übrigen sollen den Punkten des Schnittes solche Werte erteilt werden, daß $f_j(z)$ am oberen Rande desselben stetig bleibt. Dementsprechend geht die Funktion $\varphi_k(z)$ in eine Funktion von t über, welche ebenfalls die Gestalt annimmt:

$$\varphi_k(z) - b_k = t^p \chi(t) \quad \text{resp.} \quad \varphi_k(z) = t^{-p} \chi(t).$$

Dabei darf t auf den Bereich[1])

1) Es läßt sich ja leicht zeigen, daß die in Rede stehende Funktion von t allein von t^ν abhängt, doch hat man diese Tatsache zum Beweise nicht nötig.

$$0 \leqq |t| < h^{1/\nu}, \quad 0 \leqq \operatorname{arc} t < 2\pi/\nu$$

beschränkt werden.

Wenn wir nunmehr den Punkt z dem Grenzwerte $z = a$ zustreben lassen, so wird t, im soeben genannten Bereiche bleibend, zugleich an den Punkt $t = 0$ heranrücken. Infolgedessen wird $\varphi_k(z)$ entweder endlich bleiben oder aber unendlich werden. Hiermit ist nach Kap. 7, § 6 die Richtigkeit der obigen Behauptung dargetan.

Jetzt bleibt nur noch übrig, das Produkt

$$(w - f_1(z))(w - f_2(z)) \cdots (w - f_n(z))$$

zu bilden und in die Gestalt

$$\frac{G(w, z)}{\psi(z)}$$

umzusetzen, wo $\psi(z)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von $\varphi_k(z)$, und $G(w, z)$ ein Polynom in w, z bedeuten. Alsdann erkennt man, daß sich die Bestimmungen der vorgelegten Funktion $f(z)$ mit den Wurzeln dieses Polynoms gerade decken. Hiermit ist der Satz bewiesen.

2. Satz.[1]) *Wird $w = f(z)$ durch eine algebraische Gleichung:*

$$G(w, z) = 0$$

definiert, so besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Irreduzibilität von G darin, daß die Riemannsche Fläche für $f(z)$ nicht zerfällt. Dabei wird vom trivialen Falle abgesehen, daß G eine Potenz eines irreduziblen Polynoms ist.

Daß die Bedingung hinreicht, überzeugt man sich sofort. Denn wenn $G(w, z) = G_1(w, z) \cdot G_2(w, z)$ wäre, wobei G_1, G_2 verschiedene Polynome sind, so würde sich ja die Gesamtfläche aus denjenigen Flächen zusammensetzen, welche zu den einzelnen Faktoren G_1 und G_2 gehören.

Sie ist aber auch notwendig. Zerfällt nämlich die Riemannsche Fläche, so fasse man irgend einen zusammenhängenden Teil $\mathfrak{S}_1$ derselben ins Auge und bezeichne man die dazu gehörigen Bestimmungen der Funktion $f(z)$ mit $w_1, \ldots, w_l$. Nach dem 1. Satze genügen dann diese Bestimmungen für sich einer algebraischen Gleichung

$$\Gamma(w, z) = 0,$$

---

1) Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, *Journ. f. Math.*, Bd. 54 (1857) § 5, S. 122 = *Werke*, VI. Abhandlung.

welche überdies nur vom Grade l in w ist. Hiernach verschwindet das irreduzibele Polynom $G(w, z)$ für alle Werte von w und z, welche in der Umgebung einer nicht speziellisierten Stelle (w_0, z_0) liegen und zugleich das nach dem ersten Teile des 2. Satzes irreduzibele Polynom $\Gamma(w, z)$ zum Verschwinden bringen. Das geht aber nicht an.[1])

3. Satz.[2]) *Seien*

$$G(w, z) = 0$$

eine irreduzibele algebraische Gleichung von positivem Grade in w, $w = f(z)$ die hierdurch definierte Funktion, und $\mathfrak{S}$ die zugehörige Riemannsche Fläche. Sei ferner

$$W = \varphi(z)$$

eine Funktion von z, welche auf $\mathfrak{S}$ eindeutig ist und keine anderen Singularitäten als Pole dort hat. Dann läßt sich W als rationale Funktion von w und z darstellen:

$$W = R(w, z).$$

Zunächst ist klar, daß die Funktion $\varphi(z)$ nur eine endliche Anzahl von Polen auf $\mathfrak{S}$ haben kann. Denn $\mathfrak{S}$ ist ja im wesentlichen eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit, während andererseits Pole isoliert auftreten. Wenn man also von einer endlichen Anzahl von Punkten der Ebene absieht, so nimmt $f(z)$ in jedem anderen Punkte n getrennte Werte $w_1, \ldots, w_n$ an, während sich zugleich die verschiedenen Bestimmungen von $\varphi(z)$: $W_1, \ldots, W_n$ alle dort analytisch verhalten. Dabei können insbesondere die Größen $W_1, \ldots W_n$ teilweise oder ganz zusammenfallen.

An die Lagrangesche Interpolationsformel anknüpfend bilden wir jetzt die Funktionen:

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - w_1) \cdots (\lambda - w_n),$$
$$\Phi(\lambda)\left[\frac{W_1}{\lambda - w_1} + \cdots + \frac{W_n}{\lambda - w_n}\right] = \Omega(\lambda),$$

wo $\Omega(\lambda)$ das Polynom bedeutet, worauf sich die linke Seite letzterer

1) Der hier angewandte Satz der Algebra lautet, wie folgt: „Verschwindet ein Polynom $G(w, z)$ für alle in der Umgebung $|w - w_0| < h$, $|z - z_0| < h$ einer Stelle (w_0, z_0) gelegenen Punkte (w, z), wofür ein irreduzibeles Polynom $\Phi(w, z)$ verschwindet, so ist $G(w, z)$ durch $\Phi(w, z)$ teilbar." Man vgl. das Kapitel über Funktionen mehrerer Variabelen im zweiten Bande dieses Werkes. sowie Bôcher, *Einführung in die höhere Algebra*, S. 228.

2) Riemann, ibid. § 8.

Gleichung bis auf hebbare Unstetigkeiten reduziert. Dann zeigt eine ähnliche Überlegung, wie die vorhin beim Beweise des ersten Satzes angestellte, daß die Koeffizienten von λ in $\Omega(\lambda)$, sowie in $\Phi(\lambda)$ rationale Funktionen von z sind. Setzt man nunmehr $\lambda = w_i$, so kommt:

$$\Phi'(w_i)\, W_i = \Omega(w_i),$$

wo Φ' die Ableitung von Φ bedeutet. Hiermit ist der Satz bewiesen.

1. Zusatz. *Hat die obige Funktion $W = \varphi(z)$ im allgemeinen verschiedene Werte in den n Blättern, — dazu genügt ja offenbar, daß $\varphi(z)$ auch nur für einen einzigen Punkt $z = z_0$ getrennte Werte hat, — so kann man umgekehrt w als rationale Funktion von W und z darstellen:*

$$w = \Re(W, z).$$

2. Zusatz. *Ist $\varphi(z)$ mit der Fläche $\mathfrak{S}$ gleichverzweigt, so gilt derselbe Schluß; und umgekehrt.*

3. Zusatz.[1]) *Die Funktion $W = \varphi(z)$ genügt einer irreduzibelen algebraischen Gleichung:*

$$F(W, z) = 0.$$

vom Grade m, wo m ein Teiler von n ist.

§ 16. Abbildung eines Rechtecks auf einen Kreis und auf einen Torus.

Zum Schluß wollen wir noch die konforme Abbildung eines Rechtecks auf eine Halbebene und somit auf einen Kreis behandeln.[2]) Erstere Abbildung wird vermöge des elliptischen Integrals:

$$(1) \qquad w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad 0 < k < 1,$$

bewerkstelligt, wie wir jetzt des näheren ausführen wollen. Nach dem Satze von § 10 kann man nämlich den Punkten der positiven Halbebene eine solche Bestimmung der Funktion

$$(2) \qquad \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

zuordnen, daß eine in diesem Bereiche eindeutige analytische Funktion

1) Riemann, ibid. § 11.
2) Schwarz, *Journ. f. Math.*, Bd. 70 (1869), S. 113 = *Werke*, Bd. 2, S. 75.

entsteht. Infolgedessen wird durch die Formel (1) eine daselbst eindeutige analytische Funktion w von z definiert, welche sich überdies am Rande einer stetigen Folge von Randwerten stetig anschließt. Untersuchen wir vorab, wie diese Randwerte verteilt sind.

Im Randpunkte $z = 0$ soll der Integrand den Wert 1 haben. Wir lassen z nun von diesem Punkte ausgehen und die positive reelle Achse beschreiben. Während z von 0 bis 1 geht, bleibt der Integrand reell und positiv, daher wächst w beständig und erlangt im Punkte $z = 1$ den Wert

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Von hier ab wird der Integrand rein imaginär, der Randwert W wird durch die Formel gegeben:

$$W = K \pm i \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}, \tag{3}$$

wobei es sich nur noch um die Bestimmung des Vorzeichens handelt. Zu dem Behufe fassen wir zuvörderst das Integral (1) als eine Funktion auf der zu (2) gehörigen Riemannschen Fläche auf und betrachten insbesondere diejenige Bestimmung desselben, welche sich den soeben erhaltenen Randwerten anschließt. Diese verhält sich eindeutig und analytisch auf der Fläche in der Nähe des Verzweigungspunktes $z = 1$, nimmt dort den Wert K einmal an, und gehört im übrigen zur Fläche in dieser Nachbarschaft. Sie bildet mithin diesen Bereich auf die schlichte Umgebung der Stelle $w = K$ konform ab. Infolgedessen wird diejenige Halbebene, welche der Gegenstand dieser Untersuchung ist, in der Nähe von $z = 1$ auf einen rechtwinkligen, in der oberen Halbebene belegenen Teil der Umgebung von $w = K$ abgebildet, wie in beistehender Figur angedeutet ist. Demgemäß rückt W in die obere Halbebene, wenn z die Strecke $1 < x < 1/k$ betritt, womit sich denn ergibt, daß das obere Vorzeichen in (3) gilt:

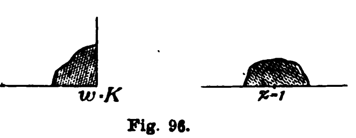


Fig. 96.

$$W = K + i \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}, \qquad 1 \leqq x \leqq 1/k.$$

Hieraus entspringt, daß besagte Strecke der z-Ebene ein-eindeutig und

stetig auf eine geradlinige, den Punkt $w = K$ mit $w = K + K'i$ verbindende Strecke der w-Ebene bezogen wird, wo

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Wir lassen z nun, immer noch auf der reellen Achse bleibend, weiter rücken. Dabei wird der Integrand wieder reell, der Randwert W wird jetzt durch die Formel:

$$W = K + iK' \pm \int_{1/k}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}}$$

gegeben. Einer der vorhin angestellten völlig analogen Überlegung zufolge gilt hier das untere Vorzeichen. Demgemäß rückt der Punkt w beständig nach links, wenn x unendlich wird, und nähert sich dabei dem Grenzwerte

$$K + K'i - \int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = K'i,$$

denn durch Einführung der neuen Integrationsvariabelen

$$t = \frac{1}{kx}$$

kommt:

$$\int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(k^2x^2-1)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K.$$

Des weiteren lassen wir z zum zweiten Male vom Randpunkte $z = 0$ ausgehen und diesmal die negative reelle Achse durchlaufen. Alsdann beschreibt w einen Weg, welcher das symmetrische Bild des soeben erhaltenen Weges inbezug auf die rein imaginäre Achse der w-Ebene ist. Als Endresultat erhält man somit ein Rechteck der w-Ebene, dessen Punkte den Punkten der reellen Achse der erweiterten z-Ebene ein-eindeutig zugeordnet sind. Bildet man nun die obere z-Halbebene auf das Innere eines Kreises der z'-Ebene ab und betrachtet man w als Funktion von z', so sind alle Bedingungen des engeren Satzes von § 5 (Anfang) für letztere Funktion erfüllt. Demgemäß wird durch das Integral der ge-

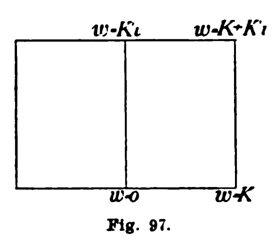


Fig. 97.

nannte Kreis resp. die obere z-Halbebene konform auf das Rechteck bezogen.[1])

Wir werfen noch die Frage auf, ob wir durch geeignete Wahl des Parameters k auch jedes beliebige Rechteck erhalten können. Dabei kommt es offenbar bloß auf die Gestalt des Rechtecks, also auf das Verhältnis der Seitenlängen, $2K/K'$, an, denn über seine Größe kann man ja zu jeder Zeit mittels einer Ähnlichkeitstransformation verfügen. In der Tat ist ohne weiteres klar, daß K stetig von k abhängt, und zwar nimmt K zugleich mit k zu, während

$$\lim_{k=0+} K = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k=1-} K = \infty$$

ist. Andererseits ist

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

wo

$$k^2 + k'^2 = 1$$

ist, wie sich aus der Transformation:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2t^2}}$$

unmittelbar ergibt. Darum hängt auch K' stetig von k ab, ändert sich fernerhin monoton abnehmend mit k, und weist schließlich in den Endpunkten des Intervalls $0 < k < 1$ das Verhalten auf:

$$\lim_{k=0+} K' = \infty, \quad \lim_{k=1-} K' = \frac{\pi}{2}.$$

Aus dieser Überlegung geht hervor, daß das in Rede stehende Verhältnis $2K/K'$ eine positive stetige monoton zunehmende Funktion von k ist, wofür

---

1) Man kann jetzt weitergehen und durch sukzessives Anhängen anstoßender Rechtecke einerseits und Halbebenen andererseits beweisen, daß die der Gleichung (1) entsprechende vollständige Riemannsche Fläche aus einer unendlich vielblättrigen Überdeckung der z-Ebene mit Verzweigungspunkten erster Ordnung in den Punkten $z = \pm 1$, $\pm 1/k$ besteht, — im Punkte $z = \infty$ verlaufen alle Blätter schlicht, — während die eigentliche w-Ebene gerade einmal glatt bedeckt wird. Doch wollen wir eine genauere Besprechung dieser Sache auf ein späteres Kapitel hinausschieben.

$$\lim_{k=0+} \frac{2K}{K'} = 0, \qquad \lim_{k=1-} \frac{2K}{K'} = \infty$$

ist. Demgemäß nimmt $2K/K'$ jeden positiven Wert für einen und nur für einen Wert von k im Intervalle $0 < k < 1$ an.

Aufgabe. Man zeige, daß ein Dreieck der w-Ebene mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$ mittels des Integrals:

$$w = \int_0^z \frac{dz}{z^{1-\alpha}(1-z)^{1-\beta}}$$

auf die positive z-Ebene konform bezogen wird.[1])

Konforme Abbildung eines Torus auf ein Rechteck.

Indem wir die Gleichungen des Torus in der Form ansetzen:

$$x = (a + b\cos\theta)\cos\varphi,$$
$$y = (a + b\cos\theta)\sin\varphi,$$
$$z = b\sin\theta,$$

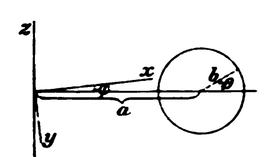


Fig. 97 a.

finden wir:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= b^2 d\theta^2 + (a + b\cos\theta)^2 d\varphi^2,$$

oder auch:

$$ds^2 = M\left(\frac{b^2 d\theta^2}{(a + b\cos\theta)^2} + d\varphi^2\right), \qquad M = (a + b\cos\theta)^2.$$

Dementsprechend erhalten wir eine konforme Abbildung der genannten Ringfläche auf ein Rechteck der (ξ, η)-Ebene, indem wir setzen:

$$d\xi = \frac{b\,d\theta}{a + b\cos\theta}, \qquad d\eta = d\varphi,$$

also:

$$\xi = \frac{2b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tan}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan\frac{\theta}{2}\right], \qquad \eta = \varphi.$$

Dabei soll

$$-\pi \leqq \theta < \pi, \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

sein, was zur Folge hat, daß

$$-\frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \leqq \xi < \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad 0 \leqq \eta < 2\pi.$$

1) Christoffel, *Annali di Matematica*, 2. Reihe, Bd. 1 (1867), S. 89.

Hiermit ist der Torus auf ein Rechteck abgebildet, dessen Seiten im Verhältnisse $b:\sqrt{a^2-b^2}$ zueinander stehen, woraus ersichtlich ist daß ein Rechteck von beliebiger Gestalt durch einen geeigneten Torus zu erhalten ist.

§ 17. Über algebraische Kurven.

Zwischen der Funktionentheorie und der Theorie der algebraischen Kurven herrschen enge Beziehungen, wovon wir jetzt einige zur Sprache bringen wollen. Beginnen wir mit den singulären Punkten. Vorgelegt sei die Gleichung:

(1) $$f(w, z) = 0,$$

wo $f(w, z)$ ein irreduzibles Polynom bedeutet, — doch genügt für die meisten Entwicklungen schon die Voraussetzung, daß f nur keine mehrfachen Faktoren enthält. Indem wir z als unabhängige Variabele auffassen, erhalten wir vor allem einen Verzweigungspunkt der über der z-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche, falls der Punkt (w_0, z_0) den Bedingungen entspricht:

(2) $$f = 0, \quad f_w = 0, \quad f_z \neq 0,$$

wozu indessen noch die weitere Voraussetzung hinzutritt, daß $f(w, z)$ von positivem Grade in w sei. In der Tat läßt sich dann (1) zunächst nach z auflösen:

$$z = \varphi(w),$$

wobei $\varphi(w)$ sich im Punkte w_0 analytisch verhält, und außerdem

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{f_w}{f_z}$$

ist. Infolgedessen verschwindet $\varphi'(w_0)$, und w_0 erweist sich hiermit als ein merkwürdiger Punkt (§ 2), sofern sich $\varphi(w)$ nicht auf eine Konstante reduziert. Daß dieser Fall in der Tat nicht eintreten kann, beweist man, indem man die höheren Ableitungen von z nach w berechnet. Da nämlich $f_{w^k}(w_0, z_0)$ nicht für alle Werte von k verschwindet, so wird es eine Ableitung $\varphi^{(k)}(w_0)$ geben, die von Null verschieden ist.

Wenden wir uns jetzt zu der ebenen C_n, die der Gleichung (1) entspricht, so hat diese Kurve eine im Punkte (w_0, z_0) zur Ordinatenachse parallele Tangente. Im allgemeinen wird (w_0, z_0) kein singulärer Punkt von C_n sein, nur dann, wenn außer $f_w(w_0, z_0)$ noch $f_{w^2}(w_0, z_0)$

verschwindet, wird

$$\left.\frac{d^2 z}{dw^2}\right|_{w=w_0} = 0,$$

so daß also ein Wendepunkt vorliegt. Demgemäß können wir folgendes vorläufiges Resultat aussprechen.[1])

1. Satz. *Diejenigen einfachen Punkte einer C_n, in welchen eine zur Ordinatenachse parallel laufende Gerade C_n berührt, geben zu Verzweigungspunkten in der z-Fläche Anlaß, und zwar führt ein gewöhnlicher Punkt von C_n zu einem Verzweigungspunkt erster, ein Wendepunkt zu einem höherer Ordnung.*

Demgemäß entspricht auch einem einfachen Punkte der C_n, in welchem die Tangente der Abszissenachse parallel läuft, ein merkwürdiger Punkt der z-Fläche.

In beiden Fällen ist vorausgesetzt, daß sich die C_n nicht zum Teil oder ganz auf eine mit der genannten Tangente koinzidierende Gerade reduziert.

Ziehen wir jetzt die einfachsten mehrfachen Punkte von C_n in Betracht. Sei beispielsweise

$$w^2 = z^2 + z^3. \tag{3}$$

Hier hat die C_3 einen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten im Anfangspunkte. Dem entspricht jedoch keine Verzweigung der Riemannschen Fläche. In der Tat lassen sich die beiden Bestimmungen von w in der Umgebung von $z = 0$ zu zwei eindeutigen, sich dort analytisch verhaltenden Funktionen:

$$w_1 = z\sqrt{1+z}, \qquad w_2 = -z\sqrt{1+z}$$

zusammenfassen, wo

$$z\sqrt{1+z} = z + \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{8}z^3 + \cdots.$$

Hätten wir dagegen als C_3 die Kurve

$$wz - w^3 - z^3 = 0 \tag{4}$$

genommen, deren beide durch den Anfang gehende Zweige die Koordinatenachsen dort berühren, so hätte sich ein Verzweigungspunkt mit eingestellt. Indem wir nämlich die Transformation

$$w' = \frac{w}{z}, \quad \text{also} \quad w = w'z \tag{5}$$

ausüben, erhalten wir hierdurch als Repräsentantin des einen Zweiges

1) Clebsch-Gordan, *Abelsche Funktionen*, § 3 und § 22.

von (4) in der Nähe des Anfangs — der andere wird ja aus dieser Nachbarschaft entfernt — die Kurve:

$$w' - z - w'^3 z = 0. \tag{6}$$

Löst man jetzt (6) nach w' auf, so kommt:

$$w' = \varphi(z), \qquad \varphi'(0) = 1.$$

Demnach wird eine Zweig von (4) durch die Formel gegeben:

$$w = z\varphi(z) = \psi(z),$$

wobei also

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0, \qquad \psi''(0) \neq 0$$

ist.

Wegen der Symmetrie von (4) in w und z liegen auch die durch die Gleichung:

$$z = \psi(w)$$

gelieferten Punkte auf der C_3. Hierbei entspricht dem merkwürdigen Punkte erster Ordnung $w = 0$ ein einfacher Verzweigungspunkt in $z = 0$, womit denn alle drei Bestimmungen von w erhalten sind.

Diese Beispiele sind nun auch für den allgemeinen Fall maßgebend. Das Resultat wollen wir ohne Beweis angeben:

2. Satz. *Einem mehrfachen Punkte* (w_0, z_0) k*-ter Ordnung von* C_n *mit lauter getrennten Tangenten entsprechen* k *Zweige, welche im allgemeinen analytisch durch die* k *Gleichungen:*

$$w_i = \varphi_i(z), \qquad i = 1, \dots k,$$

dargestellt werden, wobei $\varphi_i(z)$ *sich im Punkte* z_0 *analytisch verhält und* $\varphi_i'(z_0) \neq 0$ *ist. Die Riemannsche Fläche hat dann in der Umgebung von* $z = z_0$ k *schlichte Blätter, welche diesen* k *Zweigen entsprechen.*

Insbesondere kann jedoch ein Zweig von C_n *im Punkte* (w_0, z_0) *parallel zur Ordinatenachse verlaufen. Er wird dann durch die Gleichung* $z = \varphi(w)$ *dargestellt, wo* φ *einen merkwürdigen Punkt in* $w = w_0$ *hat. Einem solchen Zweige entspricht also ein Verzweigungspunkt der* z*-Fläche.*

Andererseits wird der Punkt $z = z_0$ *zu einem merkwürdigen Punkt für einen Zweig:* $w = \varphi_1(z)$, $\varphi_1'(z_0) = 0$, *falls dieser Zweig dort eine der* z*-Achse parallele Tangente hat.*

In den beiden besonderen Fällen wird vorausgesetzt, daß sich die C_n *nicht zum Teil auf eine mit der genannten Tangente koinzidierende Gerade reduziert.*

In allen bisher besprochenen Fällen kann die Verzweigung der Riemannschen Fläche durch eine Kollineation der (w, z)-Ebene auf-

gehoben werden. Dies trifft aber bei höheren Singularitäten nicht mehr zu; z. B.

$$w^2 = z^3.$$

Analytische Behandlung eines Zweiges. Haben wir im vorhergehenden einen Zweig einer algebraischen Kurve als etwas von der Geometrie her Bekanntes angesehen, so können wir denselben jetzt von der Analysis aus definieren und zugleich den gehörigen Existenzbeweis dafür liefern. Nach § 14 lassen sich nämlich sämtliche Punktepaare (w, z), welche in der Umgebung einer Stelle (w_0, z_0) von (1) liegen und zugleich (1) befriedigen, durch ein oder mehrere Gleichungspaare:

$$(7) \qquad w - w_0 = t^q \varphi(t), \qquad z - z_0 = t^p \psi(t)$$

darstellen, wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sich im Punkte $t = 0$ analytisch verhalten und außerdem, — sofern nicht eben $w - w_0 \equiv 0$ resp. $z - z_0 \equiv 0$ ist, — $\varphi(0)$, $\psi(0)$ nicht verschwinden. Ein Zweig der C_n besteht dann aus solchen Punkten (w, z), welche ein und demselben Gleichungspaare angehören.

Das Ergebnis von § 14 ergänzt auch in willkommener Weise das Newtonsche Verfahren zur Aufstellung der Entwicklung eines Zweiges der C_n in einem singulären Punkte.[1]) Dieses Verfahren dient bekanntlich sowohl zur Auffindung der Form der Entwicklung, als zur wirklichen Ermittlung der Exponenten, sowie der Koeffizienten. In Ermangelung der Entwicklungen von § 14 muß man dabei noch zum Nachweis bringen, daß die solchergestalt erhaltenen Reihen in der Tat konvergieren und der Gleichung (1) genügen. Dieser letzte Beweis ist gerade nicht einfach, und der ist es eben, den wir durch den Satz von § 14 vermeiden.

Im Anschluß an eine zur Funktion gehörige Parameterdarstellung können wir fernerhin die Anzahl der Schnittpunkte definieren, welche eine zweite Kurve

$$\varphi(w, z) = 0$$

mit der C_n in einem bestimmten Punkte (w_0, z_0) hat. Dazu tragen wir die Werte von w und z aus (7) in $\varphi(w, z)$ ein. Die Ordnung des Nullpunktes der hieraus entspringenden Funktion von t gibt dann die Anzahl der Schnittpunkte mit diesem Zweige an, vorausgesetzt, daß der Schnittpunkt im Endlichen liegt.

Mit den Entwicklungen dieses Kapitels haben wir zugleich die analytischen Grundlagen für die Behandlung desjenigen Teils der

1) Vgl. Clebsch-Lindemann, *Geometrie*, Bd. 1, 4. Abteil. II.

analytischen Geometrie gewonnen, welcher sich auf die Schnittpunktsätze für algebraische Kurven und auf die Integrale rationaler Funktionen von w, z auf einem vorgegebenen algebraischen Gebilde:

$$f(w, z) = 0$$

beziehen. Will man diesen Gegenstand weiter verfolgen, so möge hiermit auf die vorzüglichen Einleitungen von Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* und Picard, *Traité d'analyse,* Bd. 2, sowie Neumann, *Abelsche Integrale* hingewiesen werden.

§ 18. Die Riemannsche Fläche für Raumkurven.

Durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad w_1 = f_1(z), \dots w_n = f_n(z),$$

möge eine Kurve im Raume von $n + 1$ Dimensionen definiert werden. Dabei werden wir uns $f_1(z), \dots f_n(z)$ zunächst als algebraische Funktionen denken, so daß also eine algebraische Raumkurve vorliegt.[1] Indem wir sämtliche singuläre Punkte $\xi_1, \dots \xi_l$ dieser Funktionen in der erweiterten Ebene auftragen, verbinden wir dieselben durch eine einfache nicht geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ und schneiden die Ebene längs letzterer auf. Dadurch entsteht ein einfach zusammenhängender Bereich T, in welchem sich sämtliche Bestimmungen der Funktionen $f_i(z)$, dem Satze von § 10 gemäß, zu analytischen Funktionen zusammenfassen lassen. Wir breiten jetzt einige Blätter über der z-Ebene aus, schneiden sie alle längs $\mathfrak{C}$ auf, und erteilen dem ersten derselben nach Willkür eine Bestimmung einer jeden der obigen Funktionen. Betrachten wir nun die Werte dieser Bestimmungen am positiven Ufer des ersten Bogens (ξ_1, ξ_2) von $\mathfrak{C}$, so kann es vorkommen, daß

1) Gewöhnlich wird in der algebraischen Geometrie eine algebraische Raumkurve durch die Gleichungen:

$$z_i = R_i(u, v), \qquad i = 1, \dots n,$$

definiert, wo $R_1, \dots R_n$ rationale Funktionen der Parameter u, v sind, welch letztere dann einer algebraischen Gleichung:

$$f(u, v) = 0,$$

unterworfen werden. Demnach wird die Riemannsche Fläche der Raumkurve einfach durch die der letzten Gleichung zugehörige Riemannsche Fläche gegeben. Die Raumkurve heißt dann irreduktibel, wenn die Riemannsche Fläche nicht zerfällt.

jede der Bestimmungen den gleichen Wert am negativen Ufer aufweist. In dem Falle fügen wir diese beiden Ufer zusammen und heben somit diesen Schnitt aus dem ersten Blatte fort. Trifft eine derartige Übereinstimmung dagegen nicht zu, so werde ein zweites Blatt längs besagten Ufers an das erste angehängt, indem wir den Punkten desselben solche Bestimmungen der Funktionen $f_i(z)$ zuordnen, welche sich längs des betreffenden Ufers an die dem ersten Blatte zugehörigen Bestimmungen stetig anschließen.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens entsteht also eine im allgemeinen mehrblättrige Fläche, welche zunächst längs des Bogens (ξ_1, ξ_2) schließt. Wir gehen jetzt zum Bogen (ξ_2, ξ_3) über und verfahren hier wieder gerade so, wie vorhin beim ersten Bogen. So gewinnen wir eine Fläche, welche längst des zweiten Bogens schließt, sie braucht indessen jetzt nicht mehr mit allen ihren Blättern längs des ersten zu schließen. Hierauf ziehen wir noch einen an (ξ_2, ξ_3) hinanreichenden Bogen, längs dessen die Fläche noch nicht schließt, in Betracht, sofern ein solcher noch vorhanden ist, und wiederholen an ihm den vorstehenden Prozeß. Indem wir so fortfahren, werden wir schließlich, da die Anzahl aller möglichen Kombinationen von Bestimmungen der Funktionen (1) doch nur endlich ist, bei einer Fläche anlangen, welche längs der ganzen Kurve $\mathfrak{C}$ schließt. Sie kann sowohl aus einem als aus mehreren Stücken bestehen, denn wir haben ja nicht angenommen, daß die Funktion $f_i(z)$ einer *irreduktibelen* algebraischen Gleichung genüge. Die Blätterzahl derselben gibt die Ordnung der Raumkurve an.

Zweite Methode. Wir können diese Fläche noch auf eine andere Weise herstellen. Sei z_0 ein Punkt, in welchem jede der Funktionen (1) lauter getrennte Werte annimmt, und man bestimme die n Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ so, daß

$$W = \alpha_1 f(z) + \cdots + \alpha_n f_n(z)$$

für die verschiedenen möglichen Kombinationen willkürlich angenommener Bestimmungen der Funktionen $f_i(z)$ im Punkte z_0 stets ungleiche Werte erhält.[1]) Dann hängt die Funktion W algebraisch von z ab, und man überzeugt sich leicht, daß sie dieselbe Riemannsche Fläche liefert, wie wir sie vorhin erhalten haben.

Diese zweite Methode, die Riemannsche Fläche herzustellen, ist selbst dann anwendbar, wenn die Funktionen (1) unendlich vieldeutig

1) Wegen der Möglichkeit einer solchen Annahme vergleiche man Weber, *Algebra*, Bd. 1, 2. Aufl. S. 43.

sind. Wir werden nämlich im folgenden Kapitel zeigen, daß die Anzahl der Bestimmungen einer mehrdeutigen Funktion in einem Punkte stets abzählbar ist. Demnach läßt sich der Webersche Hilfssatz noch auf diesen Fall ausdehnen.

Man beachte wohl, daß der vollständige Schnitt zweier irreduzibeler algebraischer Flächen zu einer Raumkurve führen kann, deren Riemannsche Fläche zerfällt, und welche deshalb als mehrere getrennte Raumkurven aufgefaßt wird. So besteht beispielsweise der vollständige Schnitt der in homogenen Variabelen geschriebenen irreduktibelen Flächen zweiten Grades

$$xy - k_1 zt = 0, \quad xy - k_2 zt = 0, \quad k_1 k_2 \neq 0, \quad k_1 \neq k_2,$$

aus den vier Geraden:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Man vergleiche ferner Kap. 9, § 5.

§ 19. Betreffend die Arithmetisierung Riemannscher Flächen.

Wir haben die Riemannschen Flächen als geometrische Dinge eingeführt. Zum Schlusse wollen wir noch in Kürze angeben, wie sich dieser Begriff arithmetisieren läßt. Es handelt sich dabei offenbar um eine Menge, deren Elemente arithmetisch gegeben sein und in ein-eindeutiger Beziehung zu den Punkten der Fläche stehen sollen. Nun wurde ein Punkt der Fläche durch seine Lage, also durch den zugehörigen Wert von z allein noch nicht bestimmt, ihm kam außerdem noch die Blattangehörigkeit als ein wesentliches Merkmal zu. Dem werden wir arithmetisch dadurch gerecht werden, daß wir Wertepaare (z, n) als Elemente einer unendlichen Menge nehmen, welche das arithmetische Bild der Fläche liefern soll. Dabei entspricht n der Nummer des Blattes, während die Gesamtheit der zu einem bestimmten Werte von n gehörigen Punkte z einen Bereich T der Zahlenebene nebst einem Teile seines Randes ausfüllen. Fängt man also die Konstruktion einer Riemannschen Fläche in einem gegebenen Falle nach irgend einem der vorhin besprochenen Verfahren von vorne an, so wird man jetzt bei jedem Schritte eine geeignete Menge von Wertepaaren (z, n) an Stelle des geometrischen Blattes treten lassen. Hierdurch wird die Fläche arithmetisiert. So erscheinen die Punkte eines Verzweigungsschnittes auch formell getrennt, da ihnen ja verschiedene Wertepaare (z, n) und (z, n') zugeordnet werden. Unter

einer einfachen regulären Kurve auf der Fläche hat man eine Menge lauter getrennter Punkte (z, n) zu verstehen, wobei die entsprechende Menge von Punkten z eine reguläre Kurve bildet, welche sich indessen auch überschneiden kann. Hierzu tritt ja noch eine weitere Bedingung, welche dem Umstande entspricht, daß die Kurve stetig in der Fläche verlaufen soll.

Was zuletzt noch eine Funktion $w = f(z)$ auf der Fläche anbetrifft, so wird man ihr eine Menge von Wertetripeln (w, z, n) zu Grunde legen, wo w den dem Punkte (z, n) der jetzt arithmetisch definierten Riemannschen Fläche zuzuordnenden Wert bedeutet. Die Funktion selbst besteht dann aus der Menge dieser Tripel bzw. aus den Werten w, wie in Kap. 1, § 1 und § 10 des näheren auseinandergesetzt wurde. Ein Zweig der Funktion definiert sich ferner als eine Menge von Tripeln (w, z, n), wobei die Werte des zweiten Arguments einen schlichten Bereich T gerade ausfüllen, während die Werte w eine in T analytische Funktion liefern. Dabei wird n im allgemeinen verschiedene Werte annehmen, und zwar werden diese eindeutig von z abhängen.

Neuntes Kapitel.

Analytische Fortsetzung.

§ 1. Begriff der analytischen Fortsetzung.

Bisher wurden die Funktionen $f(z)$, mit denen wir uns beschäftigt haben, in einem vorgegebenen Bereiche betrachtet. Auf den Sätzen über Funktionen, welche in dem in Betracht kommenden Bereiche eindeutig und analytisch sind, wurde die ganze komplexe Funktionentheorie, soweit wir sie zur Zeit entwickelt haben, aufgebaut. Indem wir jetzt in dieser Entwicklung weiter gehen, stellen wir die Frage, ob der ursprüngliche Bereich T nicht erweitert werden kann, — ob es also, genauer gesagt, nicht einen T umfassenden Bereich $\mathfrak{T}$ nebst einer in $\mathfrak{T}$ analytischen Funktion gibt, welche letztere in allen dem Bereich T angehörigen Punkten von $\mathfrak{T}$ mit $f(z)$ übereinstimmt. Hierdurch werden wir zum Begriff der analytischen Fortsetzung geführt, welchen wir jetzt des näheren auseinandersetzen wollen.

In einem schlichten Bereiche[1]) T, dessen Begrenzung zum Teil oder ganz aus einer regulären Kurve C besteht, sei also eine Funktion $f(z)$ analytisch. An die andere Seite von C möge ein zweiter schlichter Bereich $\overline{T}$ stoßen, welcher vorläufig keinen Punkt mit T gemein haben soll. T, $\overline{T}$, und die Punkte von C (exkl. der beiden Endpunkte) bilden dann zusammengenommen einen Bereich $\mathfrak{T}$. Kann man nun den Punkten von $\overline{T}$, C solche Werte $\bar{f}(z)$, W zuordnen, daß die Funktion $f(z)$ hierdurch zu einer in $\mathfrak{T}$ analytischen Funktion ergänzt wird, so läßt sich $f(z)$ über T hinaus *analytisch fort-*

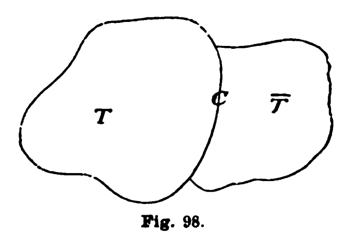


Fig. 98.

1) Die Bereiche T, $\overline{T}$, usw., wovon hier die Rede ist, sind als einblättrige Kontinuen (Kap. 5, § 2) aufzufassen, wozu also die Randpunkte nicht gezählt werden, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich erwähnt wird.

setzen. Die den Punkten von $\overline{T}$, C hiernach entsprechende Funktion heißt die *analytische Fortsetzung* von $f(z)$ für den Bereich $\overline{T}$ (genauer genommen, für den Bereich $\overline{T}$, C). Es kann offenbar keine zweite analytische Fortsetzung von $f(z)$ über C hinaus in $\overline{T}$ geben, welche mit der obigen nicht identisch wäre; (vgl. Kap. 7, § 7).

Allgemeiner dürfen T und $\overline{T}$ beliebige Riemannsche Flächen sein, welche auch übereinander greifen, vorausgesetzt nur, daß sie keinen gemeinsamen Punkt haben und längs einer regulären Kurve C aneinander stoßen. Im übrigen nennt man auch zwei Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$ analytische Fortsetzungen voneinander, wenn ihre Definitionsbereiche T, T' übereinander greifen und die Funktionen zugleich in einem gemeinsamen Teile derselben miteinander übereinstimmen.[1])

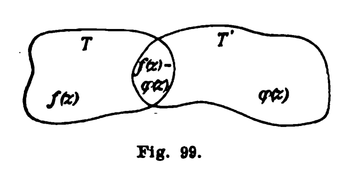


Fig. 99.

Analytische Fortsetzung längs einer Kurve. Sei $f(z)$ in einem Punkte z_0 analytisch, und man verbinde z_0 mit einem zweiten Punkte Z mittels der Kurve L. Dann sagt man: die Funktion $f(z)$ läßt sich längs L (oder über L) bis in den Punkt Z analytisch fortsetzen, wenn L durch eine endliche Anzahl einblättriger, einfach zusammenhängender Bereiche T_0, T_1, ... T_n, wie in der Figur angedeutet ist, derart überdeckt werden kann, daß sich $f(z)$ von T_0 in T_1, sodann weiter in T_2, hierauf noch in T_3, usw. bis hin zu T_n analytisch fortsetzen läßt. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_i$ denjenigen Bereich, welcher sich aus T_i, T_{i+1} und ihren gemeinsamen Randpunkten zusammensetzt, so soll auch $\mathfrak{T}_i$ einblättrig ausfallen. Hierbei wollen wir indessen von solchen Randpunkten absehen, welche auch Randpunkte von $\mathfrak{T}_i$ liefern würden; m. a. W. soll $\mathfrak{T}_i$, gerade so wie T_i, aus lauter inneren Punkten bestehen. Dagegen können zwei Bereiche T_i, T_j $(j \neq i \pm 1)$ übereinander greifen, ja die Kurve L darf sich sogar überschneiden. In diesem Falle wird man sich den aus den Bereichen $T_0, \ldots T_n$ (nebst den zu den Bereichen $\mathfrak{T}_i$ gehörigen Randpunkten derselben) gebildeten Streifen als eine mehrblättrige Riemannsche Fläche vorstellen. End-

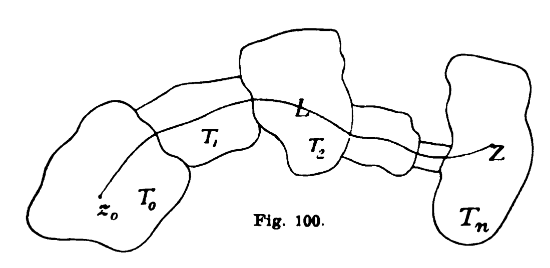


Fig. 100.

1) Vgl. das Zitat auf Riemann und Weierstraß in § 3.

lich darf L durch den Punkt ∞ gehen, wobei dann einer der Bereiche T_i alle Punkte umfassen wird, welche außerhalb eines genügend großen Kreises um den Nullpunkt liegen.

Bei dem soeben auseinandergesetzten Verfahren kommt es offenbar auf die genaue Lage der Kurve L nicht an, jede andere in der Nähe von L verlaufende und die Bereiche T_i in gleicher Reihenfolge durchsetzende Kurve L' führt zur selben analytischen Funktion im Punkte Z. Wesentlich ist dabei nur, daß L' sich so in Bogen (z'_i, z'_{i+1}), wobei $z_0' = z_0$, $z'_{n+1} = Z$ ist, zerlegen läßt, daß (z'_i, z'_{i+1}) in $\mathfrak{T}_i$ liegt. Darum kommt man schon mit regulären Kurven oder gar mit Polygonzügen aus, darf sich jedoch andererseits, falls es sich empfehlen sollte allgemeiner Jordanscher Kurven bedienen.

Seien $f(z)$, $\varphi(z)$ zwei Funktionen, welche sich in den ein- oder mehrblättrigen Bereichen T, $\bar{T}$ analytisch verhalten. Kann man dann einen Punkt z_0 von T mit einem Punkte Z von $\bar{T}$ durch eine Kurve L verbinden, derart, daß $f(z)$ sich längs L analytisch fortsetzen läßt und dabei außerdem die letzte analytische Fortsetzung in der Nähe von Z mit $\varphi(z)$ übereinstimmt, so heißt $\varphi(z)$ selbst eine analytische Fortsetzung von $f(z)$. Sind endlich $\varphi(z)$, $\psi(z)$ beide analytische Fortsetzungen von $f(z)$, so sind $\varphi(z)$, $\psi(z)$ offenbar auch analytische Fortsetzungen voneinander.

Wir wollen noch folgender Tatsache Erwähnung tun. Vorgelegt sei eine Funktion $F(z)$, die sich in einem Bereiche T analytisch verhält, sowie auch eine zweite Funktion $f(z)$, die zunächst bloß in der Umgebung eines inneren Punktes z_0 von T betrachtet wird, woselbst sie mit $F(z)$ übereinstimmt. Dann läßt sich $f(z)$ über eine beliebige in T belegene Kurve analytisch fortsetzen, und zwar fällt jede der also erhaltenen analytischen Fortsetzungen mit $F(z)$ zusammen.

Analytische Fortsetzung durch übereinandergreifende Kreise.[1]) Ein besonderes System von Bereichen T_i, $\mathfrak{T}_i$ wird durch übereinandergreifende Kreise geliefert. Den Ausgangsbereich T_0 bildet hier der größte Kreis um z_0 als Mittelpunkt, in welchem eine Funktion definiert werden kann, welche

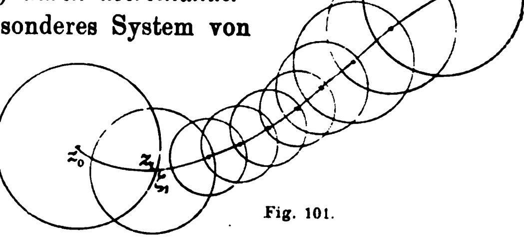


Fig. 101.

1) Puiseux, *Journ. de Math.*, Bd. 15 (1850) S. 379.

sich in diesem Bereiche analytisch verhalten und in der Nähe von z_0 mit $f(z)$ übereinstimmen soll. Insbesondere erhält man diesen Kreis dadurch, daß man $f(z)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz im Punkte $z = z_0$ entwickelt und dann den wahren Konvergenzkreis der Reihe bestimmt. Liegt L zufällig ganz in diesem Kreise, so ist die gewünschte analytische Fortsetzung hiermit bereits gewonnen. Sonst sei ζ_1 derjenige Schnittpunkt von L mit dem Rande von T_0, wofür sich der Bogen (z_0, ζ_1), vom Endpunkte ζ_1 abgesehen, ganz innerhalb T_0 befindet. Als z_1 nehme man dann einen beliebig nahe bei ζ_1 belegenen Punkt dieses Bogens und beschreibe einen Kreis K_1 um z_1 als Mittelpunkt, dessen Radius man jetzt in ähnlicher Weise bestimme, wie vorhin bei T_0. Es soll nämlich K_1 der größte derartige Kreis sein, in welchem sich eine Funktion analytisch verhalten kann, welche in der Nähe von z_1 mit der bereits erhaltenen Funktion übereinstimmen soll. Dieser Kreis erweist sich wiederum als der wahre Konvergenzkreis der Taylorschen Entwicklung für die erste Funktion im Punkte $z = z_1$. Wie man sieht, muß er einerseits mindestens bis an den Rand des Kreises T_0 heranreichen, während er andererseits T_0 nebst seinem Rande unmöglich im Innern enthalten kann. Der Bereich T_1 besteht nunmehr aus denjenigen inneren Punkten von K_1, welche weder innere noch Randpunkte von T_0 sind.

Durch sukzessive Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man also schließlich zum Punkte Z, sofern sich $f(z)$ überhaupt längs L bis in den Punkt Z analytisch fortsetzen läßt. Im andern Falle gibt es offenbar einen Punkt $\bar{z}$ von L, derart, daß $f(z)$ von z_0 aus längs L in jede Umgebung von $\bar{z}$ analytisch fortgesetzt werden kann, ohne jedoch $\bar{z}$ jemals zu erreichen.

Bezüglich der Wahl der weiteren Punkte z_i $(i > 0)$ fügen wir noch folgende Bemerkung hinzu. Sei R_i der Radius von K_i, und sei ζ_{i+1} derjenige Schnittpunkt von L mit dem Rande von K_i, wofür sich der Bogen (z_i, ζ_{i+1}), vom Endpunkte ζ_{i+1} abgesehen, ganz innerhalb K_i befindet. Dann genügt es, z_{i+1} so zu nehmen, daß dieser Punkt auf dem Bogen (z_i, ζ_{i+1}) von L liegt und übrigens $\alpha R_i < |z_{i+1} - z_i| < R_i$ ausfällt, wo $0 < \alpha < 1$ von vornherein willkürlich gewählt, sodann aber festgehalten wird.

§ 2. Sätze über analytische Fortsetzung.

Theorem A). *Sei $f(z)$ in einem inneren oder Randpunkte eines einfach zusammenhängenden Bereiches T analytisch. Kann man $f(z)$ in jeden Punkt von T analytisch fortsetzen, und zwar längs jedes beliebigen*

in T befindlichen Weges, so bilden die also erhaltenen Funktionswerte eine in T analytische Funktion.

Wir wollen den Satz zunächst für einen endlichen derartigen Bereich beweisen, welcher von einer einfachen regulären Kurve begrenzt ist. Dies gelingt uns, indem wir hier genau ebenso zu Werke gehen, wie im Kapitel 4, § 3 beim Beweise des Satzes B), und das Theorem also vorab für einen Bereich σ begründen, in dessen einem Eckpunkte $f(z)$ sich analytisch verhalten soll. Zu dem Zwecke setzen wir $f(z)$ über den a. a. O. benutzten Weg L analytisch fort. Hiermit gewinnen wir eine in σ eindeutige Funktion, welche sich, wie man leicht erkennt, daselbst analytisch verhält und auch in der Nähe der betreffenden Ecke mit $f(z)$ übereinstimmt. Auf Grund des Satzes von Kap. 5, § 10 ergibt sich nun der Beweis für den in Aussicht genommenen besonderen Fall.

Um den Beweis jetzt allgemein zu führen, nehmen wir auf den Zusatz von Kap. 5, § 10 Bezug, indem wir zunächst, sofern T nicht gerade aus der ganzen erweiterten Ebene besteht, einen Randpunkt von T vermöge einer linearen Transformation in den Punkt ∞ verlegen. Sodann läßt sich T, kraft jenes Zusatzes, in eine unendliche Reihe einfach zusammenhängender, ineinander eingeschachtelter, je von einer einfachen regulären geschlossenen Kurve berandeter Bereiche entwickeln, für deren jeden das Theorem ja bereits feststeht. Dadurch wird eine Funktion schrittweise über dem ganzen Bereich T ausgebreitet, welche allen Forderungen des Theorems genügt.

Hiermit sind alle Fälle erledigt, wobei T in der erweiterten Ebene überhaupt einen Randpunkt hat. Trifft dies indessen nicht zu, so konstatiert man zunächst, daß $f(z)$ eine ganze Funktion ist, welche dann im Punkte ∞ endlich bleibt und sich somit als eine Konstante erweist. Das Ergebnis wollen wir noch in folgende Worte zusammenfassen.

Zusatz. *Verhält sich $f(z)$ in einem bestimmten Punkte analytisch und läßt sich $f(z)$ über jeden beliebigen Weg der erweiterten Ebene analytisch fortsetzen, so ist $f(z)$ eine Konstante.*

Das vorstehende Theorem läßt sich auch folgendermaßen formulieren.

Theorem A'). *Ist $f(z)$ im Punkte z_0 analytisch und kann man $f(z)$ längs eines bestimmten, von z_0 ausgehenden und nach z_0 wieder zurückkehrenden einfachen Weges L analytisch fortsetzen; stimmt ferner*

die letzte Fortsetzung in der Nähe von z_0 mit der ursprünglichen Funktion nicht überein, so muß es in jedem der von L abgegrenzten Gebiete der erweiterten Ebene mindestens einen Punkt Z und einen z_0 mit Z verbindenden Weg $\mathfrak{L}$ geben, derart, daß $f(z)$ längs $\mathfrak{L}$ von z_0 bis in Z nicht analytisch fortgesetzt werden kann.

Wir wollen noch einen weiteren Satz erwähnen, welcher in der Theorie der periodischen und der automorphen Funktionen, sowie auch sonst vielfache Verwendung findet.

Satz.[1]) *Sind T, $\bar{T}$ zwei Bereiche, welche längs einer regulären Kurve C aneinanderstoßen, und sind $f(z)$, $\bar{f}(z)$ zwei Funktionen, welche sich in T resp. $\bar{T}$ analytisch verhalten und außerdem in den Punkten von C gleiche Randwerte W annehmen, so bildet $\bar{f}(z)$ nebst W eine analytische Fortsetzung von $f(z)$.*

In der Tat bilden die Werte von $f(z)$ und $\bar{f}(z)$ nebst den Randwerten W eine im zusammengesetzten Bereiche stetige, in allen nicht zu C gehörigen Punkten dieses Bereiches analytische Funktion. Nach dem Riemannschen Satze von Kap. 7, § 6 (Satz 12) muß sich letztere also auch in den Punkten von C analytisch verhalten, w. z. b. w. — Die Bedingung ist offenbar auch notwendig.

Weitere Sätze über analytische Fortsetzung finden sich im Kapitel über das logarithmische Potential.

Aufgabe 1. Sei $f(z)$ eine im Punkte z_0 eines einfach zusammenhängenden Bereiches S analytische Funktion, welche längs eines geeigneten Weges in jeden Punkt von S analytisch fortgesetzt werden kann. Man zeige durch Beispiele, daß es dann nicht stets eine in S eindeutige analytische Funktion gibt, welche in der Nähe von z_0 mit $f(z)$ übereinstimmt.

Aufgabe 2. Eine im Punkte z_0 analytische Funktion $f(z)$ sei längs zweier Wege L_1, L_2 von z_0 bis in Z analytisch fortsetzbar, wobei man denn zu zwei analytischen Fortsetzungen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ in der Nähe von Z geführt wird. Der Weg L_1 wird nun stetig in L_2 verschoben, und es wird dabei vorausgesetzt, daß sich $f(z)$ auch für jede mittlere Lage L desselben von z_0 in Z über L analytisch fortsetzen lasse. Man zeige, daß $\psi(z)$ und $\varphi(z)$ dann in der Nähe von Z miteinander übereinstimmen.

---

1) Painlevé, Pariser Dissertation, 1887, = *Toulouse Annales*, Bd. 2 (1888) S. 28.

Aufgabe 3. Ist $f(z)$ eine im Punkte $z = z_0$ analytische Funktion, deren verschiedene analytische Fortsetzungen selbst in der erweiterten Ebene keine anderen Singularitäten als nur Pole haben, so bildet der Inbegriff dieser Fortsetzungen eine rationale Funktion von z.

Aufgabe 4. Von einer Funktion ist bekannt, daß der Bereich eines Elements derselben in der oberen Halbebene liegt, daß ferner jede analytische Fortsetzung längs einer in der oberen Halbebene gelegenen Kurve höchstens auf Pole stößt, und daß endlich Pole sich in der Umgebung jedes Punktes der reellen Achse häufen. Man zeige, daß die Funktion eindeutig ist und daß der Definitionsbereich derselben aus der oberen Halbebene exklusive einer isolierten Punktmenge mit Häufungsstellen, welche die reelle Achse ausfüllen, besteht.

§ 3. Endgültige Definition einer monogenen analytischen Funktion.

Wir gingen in Kap. 6, § 5 von folgender Definition aus: Eine Funktion $f(z)$ verhält sich in einem schlichten Bereich T analytisch, wenn $f(z)$ in jedem Punkte dieses Bereiches eindeutig erklärt ist und überdies eine stetige Ableitung besitzt. Im vorletzten Paragraphen haben wir dann die Frage aufgeworfen, ob ein umfassenderer Bereich nicht an Stelle von T treten könne, wodurch wir zum Begriff der analytischen Fortsetzung geführt wurden. Dieses Prinzips hat sich Weierstraß[1]) bedient, um die Definition einer analytischen Funktion mit besonderer Rücksicht auf den Verlauf der Funktion im Großen einzuführen.

Im Innern eines von einer einfachen regulären Kurve begrenzten Bereiches T sei eine Funktion $f(z)$ analytisch. Man setze $f(z)$ über

1) Den Gedanken, die analytische Fortsetzung als Mittel zur Gewinnung neuen Gebiets zu gebrauchen, in welchem die Funktion unter Beibehaltung ihres analytischen Charakters definiert werden kann, verdankt man Riemann; man vergleiche die Abhandlung über Abelsche Funktionen, *Journ. für Math.*, Bd. 54 (1857), S. 102 = *Werke*, 1. Aufl., S. 82, 2. Aufl., S. 89; sowie *Werke*, 1. Aufl., S. 413, 2. Aufl., S. 440. Weierstraß, der schon vor Riemann diese Methode ersonnen hatte, benutzte dieselbe, um dem Begriff der analytischen Funktion, wie wir im Texte des näheren ausführen, eine genauere Fassung zu geben, sowie um das Prinzip der Permanenz einer Funktionalgleichung in strenger Weise zu begründen; cf. Weierstraß, s. Z. nicht veröffentlichte Abhandlung aus dem Jahre 1842, *Werke*, Bd. 1 (1894), S. 83. Die späteren Abdrücke der Weierstraßschen Abhandlung über die analytischen Fakultäten (1856) enthalten Material betr. analytische Fortsetzung, welches im ursprünglichen Artikel nicht vorhanden war. — Näheres hierüber in der *Enzyklopädie* II B 1, Nr. 13.

Es sei auch auf die Arbeiten des französischen Mathematikers Méray verwiesen, welcher unabhängig von Weierstraß ähnliche Ziele anstrebte.

T hinaus analytisch fort, sofern das möglich ist. Hierdurch werden den Punkten z eines erweiterten Bereiches der z-Ebene Funktionswerte zugeordnet. Jetzt nehme man eine neue analytische Fortsetzung vor, wenn das angeht, und wiederhole noch den Schritt beliebig oft resp. so weit, bis man einen bestimmten Abschluß dadurch erreicht hat, daß jede weitere analytische Fortsetzung mit einer bereits vorhandenen übereinstimmt.[1]) Das Endresultat besteht nun darin, daß jedem Punkte eines bestimmten Bereiches, der insbesondere die ganze erweiterte z-Ebene umfassen kann, ein oder mehrere Funktionswerte zugeordnet sind, dergestalt, daß eine Funktion $w = f(z)$ von folgender Beschaffenheit zu stande kommt.

a) Ist (w_0, z_0) ein beliebiges der Funktion $f(z)$ angehöriges Wertepaar, so gibt es in der Umgebung der Stelle $z = z_0$ solche weitere Wertepaare $(\mathfrak{w}, z)$, daß

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{f}(z), \qquad w_0 = \mathfrak{f}(z_0),$$

eine im Punkte $z = z_0$ analytische Funktion von z wird. Insbesondere kann es vorkommen, daß einem Wertepaar (w_0, z_0) mehrere, sogar auch unendlich viele Funktionen[2]) $\mathfrak{f}_1(z)$, $\mathfrak{f}_2(z), \ldots$, von der genannten Beschaffenheit entsprechen.

b) Sind (w_0, z_0) und (w_1, z_1) zwei beliebige, der Funktion $f(z)$ angehörige Wertepaare, und sind

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{f}_0(z), \qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{f}_1(z)$$

zwei denselben nach a) zugehörigen Funktionen, so ist $\mathfrak{f}_1(z)$ eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{f}_0(z)$.

c) Sei L ein beliebiger Weg, längs dessen sich die in a) genannte Funktion $\mathfrak{f}(z)$ analytisch fortsetzen läßt. Dann stimmt jede der dabei auftretenden analytischen Fortsetzungen von $\mathfrak{f}(z)$ mit einer Bestimmung der Funktion $f(z)$ überein.

d) Die einem bestimmten Werte von z zugeordneten Funktionswerte sollen im allgemeinen voneinander verschieden sein. Genauer gesagt soll einem Punkte z_0 ein Funktionswert w_0 nur dann mehrmals zugeordnet werden, wenn der besondere Fall unter a) eintritt, und dann soll w_0 auch nur so oft gezählt werden, wie es verschiedene Funktionen $\mathfrak{f}_i(z)$ gibt.

---

1) Wegen einer näheren Ausführung dieses Gedankens vergleiche man § 4.

2) Man denke etwa an die Funktion

$$w = (z - 1)\log z, \qquad (w_0, z_0) = (0, 1).$$

Eine Funktion, welche den vorstehenden Bedingungen Genüge leistet, heißt nach Weierstraß eine *monogene analytische Funktion*. Sie wird fernerhin zu einem *monogenen analytischen Gebilde* dadurch erweitert, daß man zu den bisher betrachteten Wertepaaren (w, z) noch in jedem Pole $z = a$ ein weiteres Element (∞, a), sowie in jedem Verzweigungspunkte endlicher Ordnung $z = a$, in welchem $f(z)$ endlich bleibt und sich dem Grenzwerte b nähert, oder einen Pol hat, ein Wertepaar (b, a) resp. (∞, a) hinzunimmt; insbesondere kann a der Punkt ∞ sein. Das hat namentlich zur Folge, daß dann umgekehrt die Gesamtheit der solchergestalt gewonnenen Wertepaare (w, z) ein zweites inverses monogenes analytisches Gebilde (z, w) liefern, sofern $f(z)$ nicht gerade eine Konstante ist.

Es ist evident, daß zwei monogene analytische Funktionen, welche in der Umgebung einer Stelle (w_0, z_0) miteinander übereinstimmen, überhaupt zusammenfallen müssen.

Unter einem *Element* einer analytischen Funktion $f(z)$ (auch *Funktionselement* genannt) versteht man irgend eine der vorstehenden Funktionen $\mathfrak{f}(z)$. Allgemeiner sei $z = a$ ein Verzweigungspunkt endlicher Ordnung oder ein Pol von $f(z)$, so daß sich also in der Umgebung desselben gewisse Bestimmungen von $f(z)$ zur ein- oder mehrdeutigen Funktion

$$\varphi(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z - a)^{k/n},$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl inkl. 0 bedeutet, zusammenfassen lassen. Dann heißt auch $\varphi(z)$ ein Element von $f(z)$. Dabei soll der Fall $a = \infty$ mit aufgenommen sein; es wird dann in der obigen Reihe $1/z$ an Stelle von $z - a$ treten. In allen Fällen kann man ein Element nach den Formeln von Kap. 8, § 14 parametrisch darstellen.

Einen *Zweig* einer analytischen Funktion $w = f(z)$ bildet jede Menge der Funktion angehöriger Wertepaare (w, z) von folgender Beschaffenheit: a) die dem zweiten Argument z entsprechenden Punkte der z-Ebene füllen einen einblättrigen Bereich T gerade einmal aus; b) die Gesamtheit jener Wertepaare bildet eine in T analytische Funktion. — Ist z_0 ein Randpunkt von T, in welchem jener Zweig keine analytische Fortsetzung über T hinaus gestattet, so heißt z_0 ein *singulärer Punkt* von $f(z)$, oder präziser ein singulärer Punkt für diesen Zweig, denn ein anderer Zweig kann sich ja in z_0 analytisch verhalten.

Man denke etwa an das Beispiel (Kap. 8, § 4):

$$w^3 - 3w = z.$$

Hier hat die Funktion $w = f(z)$ im Punkte $z_0 = 2$ einen Verzweigungspunkt erster Ordnung, während sich die übrige Bestimmung der Funktion dort analytisch verhält. Nimmt man also als Bereich T die obere Halbebene, so haben diejenigen Zweige, welche dem 1. und 3. Blatte der Riemannschen Fläche entsprechen, eine Singularität in $z_0 = 2$, der andere Zweig aber nicht. Am Rande des wahren Konvergenzkreises einer Potenzreihe liegt offenbar mindestens ein singulärer Punkt der Funktion.

Sei $f(z)$ im Punkte $z = a$ analytisch, und sei ferner L eine von a ausgehende reguläre Kurve. Kann man dann $f(z)$ längs L in jede Umgebung eines seiner Punkte $z = c$ analytisch fortsetzen, ohne indessen c jemals zu erreichen, so bildet c eine singuläre Stelle der Funktion. Denn man kann den Bogen (a, c) von L mit einem solchen Bereich T umgeben, welchem ein einen singulären Punkt c aufweisender Zweig von $f(z)$ entspricht. Es kann aber auch singuläre Punkte geben, welche auf diese Weise nicht zu erreichen sind. Man denke etwa an den in Kap. 5, § 2, unter B) betrachteten Bereich T. Daß es eine in demselben analytische Funktion gibt, welche jeden Randpunkt von T zur Singularität hat, geht aus einem später zu beweisenden Satze von Weierstraß hervor, Kap. 11, § 13. Da liefert nun der Punkt A den gewünschten Beleg für die Behauptung.

Die singulären Punkte einer analytischen Funktion können, wie soeben erwähnt, sowohl isoliert auftreten als auch eine ganze Kurve ausfüllen. Im letzteren Falle heißt jene Kurve eine *natürliche Grenze*[1])

---

1) Die erste gedruckte Mitteilung über das Auftreten natürlicher Grenzen findet sich nach Schwarz, *Journ. für Math.*, Bd. 75 (1873), S. 319 = *Werke*, Bd. 2, S. 241, in einer Abhandlung von Weierstraß, *Berliner Berichte*, 1866, S. 617. In Weierstraß's *Werken*, welche keine getreue Wiedergabe der Originalarbeiten bieten, ist diese Stelle gestrichen. Die Möglichkeit einer natürlichen Grenze hat Weierstraß bereits im Jahre 1842 erkannt; *Werke*, Bd. 1, S. 84. In seinen Vorlesungen machte er 1863 auf diesen Gegenstand aufmerksam (Schwarz, a. a. O.). Beispiele von Funktionen mit natürlichen Grenzen sind von Hankel, *Universitätsprogramm*, „Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen", Tübingen, 1870 = *Math. Ann.*, Bd. 20 (1882), S. 63, veröffentlicht worden. Kronecker war 1863 im Besitz des Beispiels aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots;$$

Schwarz, a. a. O., wo ein Beispiel Weierstraß's aus der Theorie der al-

der Funktion, da sich letztere nicht über dieselbe hinaus analytisch fortsetzen läßt. Durch die elliptischen Modulfunktionen ist man zuerst auf das Auftreten natürlicher Grenzen aufmerksam geworden. Wir werden in § 5 eine einfache Potenzreihe mitteilen, welche eine Funktion definiert, die im Innern des Einheitskreises analytisch ist, während sie in der Umgebung eines willkürlichen Randpunktes desselben beliebig große Werte annimmt, so daß also dieser Kreis eine natürliche Grenze für die Funktion bildet. Der übrige Teil der Ebene heißt ein *lacunärer Raum* (espace lacunaire). Dieser Ausdruck wird hauptsächlich auf solche eindeutige analytische Funktionen angewandt, welche nicht in alle Bereiche der Ebene analytisch fortgesetzt werden können.

Um auf den Begriff der natürlichen Grenze noch näher einzugehen, so achte man wohl auf den Unterschied zwischen diesen Kurven und den Verzweigungsschnitten. Während letztere doch unter gewissen Einschränkungen willkürlich gezogene Linien sind, über welche hinaus die Funktion vor der Hand keine analytische Fortsetzung erfahren soll, bilden erstere dagegen in der inneren Beschaffenheit der Funktion begründete Hindernisse, über welche hinaus überhaupt keine analytische Fortsetzung möglich ist.[1]) Im übrigen dürfen auch Pole in der Umgebung einer natürlichen Grenze auftreten, wie bei den Dreiecksfunktionen wirklich der Fall ist. Allgemein sei T der zu einem bestimmten Zweige einer analytischen Funktion gehörige Bereich, und $\{P\}$ eine Menge von Randpunkten des T, welche Singularitäten dieses Zweiges sind. Ist $\{P\}$ perfekt und zusammenhängend, d. h. besteht $\{P\}$ aus einem einzigen Randstück, welches mehr als einen Punkt hat, vgl. Kap. 5, § 7, so bildet $\{P\}$ eine natürliche Grenze für diesen Zweig.

Wir haben die Definition des analytischen Verhaltens einer Funtion $f(z)$ a) in einem vorgegebenen Bereiche, b) in einem Punkte an die Spitze unserer Entwicklungen gestellt (Kap. 6, § 5). Dabei wurde

---

gebraischen Differentialgleichungen in Verbindung mit den elliptischen Modulfunktionen auch erwähnt wird); hier kommt die Funktion in der Nähe eines beliebigen Punktes der natürlichen Grenze jedem vorgegebenen Werte beliebig nahe.

In Riemanns Nachlaß fanden sich Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen, wo der limes untersucht wird, dem eine solche Funktion zustrebt, wenn das Argument sich einem Punkte der Begrenzung des Definitionsbereichs der Funktion, also in diesem Falle einem Punkte einer natürlichen Grenze, nähert; *Werke*, 1. Aufl., S. 427 u. S. 438; 2. Aufl., S. 455 u. S. 466.

1) Die für beiderlei Kurven gemeinsame französische Bezeichnung *coupure* ist nicht dazu angetan, den wesentlichen Unterschied derselben hervorzuheben.

vor allem verlangt, daß $f(z)$ in jedem Punkte des betreffenden Bereichs eindeutig sei. Wenn man dagegen schlechtweg von einer eindeutigen analytischen Funktion $f(z)$ spricht, so meint man damit, daß die monogene analytische Funktion $f(z)$ eindeutig sei. Die Punkte der Ebene, in denen dieselbe erklärt ist, bilden ihren *Definitionsbereich*. Im Falle einer mehrdeutigen monogenen analytischen Funktion besteht der Definitionsbereich aus der zugehörigen Riemannschen Fläche, vergleiche § 4.

Der Begriff der monogenen analytischen Funktion deckt sich keineswegs mit demjenigen eines einheitlichen analytischen Ausdrucks. So definiert beispielsweise die Formel

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{1+z^n} = \begin{cases} 1, & |z|<1, \\ 0, & |z|>1, \end{cases}$$

im Innern des Einheitskreises ein Element der monogenen analytischen Funktion $f(z) = 1$, während sie außerhalb desselben ein Element der Funktion $\varphi(z) = 0$ abgibt. Weierstraß hat sogar gezeigt, daß Stücke von n beliebigen Funktionen durch ein und dieselbe Formel dargestellt werden können. Seien nämlich $S_1, S_2, \ldots S_n$ endliche getrennt liegende, durch reguläre Kurven berandete Bereiche der z-Ebene, und seien ferner $f_1(z), \ldots f_n(z)$ resp. in denselben analytische Funktionen, welche außerdem stetige Randwerte annehmen. Indem wir an Hermites Bemerkung über die Cauchysche Integralformel (Kap. 7, § 4, Ende) anknüpfen, schreiben wir die Formel hin:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f_1(t)\,dt}{t-z} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{f_n(t)\,dt}{t-z}.$$

Die hierdurch definierte Funktion $f(z)$ stimmt innerhalb des Bereiches S_k mit $f_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ überein und verschwindet außerhalb der Bereiche S.

Im Anschluß an die Entwicklungen von Kap. 8, § 18 definiert man jetzt ohne Mühe das monogone analytische Funktionensystem $(f_1(z), f_2(z), \ldots f_r(z))$. Es ist dies derjenige Spezialfall des monogenen analytischen Gebildes n-ter Stufe im Gebiete von $n+r$ Veränderlichen, wofür $n = 1$ ist; man vergleiche hierüber das Kapitel über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen im zweiten Bande.

Im folgenden Paragraphen wollen wir uns mit einer eingehenden Begründung des Hauptsatzes dieses Paragraphen beschäftigen, *daß nämlich eine im Kleinen gegebene analytische Funktion zu einer monogenen analytischen Funktion führt, wie sie durch die vorhin formulierten Eigenschaften* a) ... d) *festgelegt wird*

§ 4. Nähere Begründung des Hauptsatzes von § 3.

Im voraufgehenden Paragraphen haben wir ein Verfahren geschildert, wonach der Definitionsbereich einer vorgelegten analytischen Funktion möglichst erweitert wird, und von hier aus sind wir dann zum Begriff der monogenen analytischen Funktion gelangt. Es handelt sich jetzt darum, ein systematisches Vorgehen anzugeben, um jenes Resultat zu gewinnen. Wir wollen die Fragestellung in folgendem Satze formulieren; vgl. auch Kap. 14, § 15, Anfang.

Theorem. *Sei $f(z)$ im Punkte $z = a$ analytisch. Dann kann man dieser Funktion eine abzählbare Menge von Funktionen:*

$$w = f_n(z), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

von folgender Beschaffenheit zuordnen:

a) *Die Funktion $f_n(z)$ verhält sich analytisch in einem Kreise T_n um den Punkt a_n, $n = 0, 1 \ldots$, und zwar soll T_n stets gleich dem Innern des wahren Konvergenzkreises der Taylorschen Reihenentwicklung für $f_n(z)$ im Punkte a_n genommen werden. In der Nähe von $a_0 = a$ soll außerdem $f_0(z)$ mit der vorgelegten Funktion $f(z)$ übereinstimmen.*

b) *Jede Funktion $f_n(z)$ läßt sich aus jeder anderen dieser Funktionen durch analytische Fortsetzung ableiten.*

c) *Sei L ein endlicher Weg, längs dessen $f(z)$ sich analytisch fortsetzen läßt. Dann kann diese analytische Fortsetzung vermöge einer endlichen Anzahl der Funktionen $f_n(z)$ geleistet werden.*

Hinsichtlich des Inhalts dieses Theorems bemerken wir vor allem folgendes. Sei z' ein beliebiger Punkt, der in einem der Bereiche T_n liegt. Dann gibt es kraft des Theorems nur eine abzählbare Menge von Bereichen T_n, welche z' umfassen, und somit auch nur eine abzählbare Menge von Funktionen $f_n(z)$, welche in der Nähe von z' voneinander verschieden sind. Die den voneinander verschiedenen Funktionen $f_n(z)$ entsprechenden Funktionswerte $w_n = f_n(z')$ wollen wir nun dem Punkte z' zuordnen, und auch dem Punkte $z = \infty$ sollen die gehörigen Funktionswerte zugewiesen werden. Hierdurch erhalten wir eine allen Bedingungen a) ... d) von § 3 genügende monogene analytische Funktion.

Zum Beweise des Theorems gehen wir vom Kreise T_0 aus und numerieren zunächst die rationalen Punkte dieses Bereiches, nebst a:

$$\bar{a}_0 = a, \quad \bar{a}_1, \ \bar{a}_2, \ \ldots .$$

Jedem dieser Punkte $\bar{a}_n$ ordnen wir dann vermöge der Taylorschen Reihenentwicklung für $f(z)$ in $\bar{a}_n$ eine Funktion $\bar{f}_n(z)$ nebst einem Bereiche $\bar{T}_n$, nämlich dem wahren Konvergenzkreise der Reihenentwicklung zu. Die so gewonnenen Funktionen $\bar{f}_n(z)$ genügen Bedingungen a), b) des Satzes.

Hierauf fasse man alle rationalen Punkte der Ebene ins Auge, welche in einem der soeben erhaltenen Bereiche $\bar{T}_n$ liegen, und numeriere diejenigen davon, welche mit einem früheren Punkte $\bar{a}_n$ nicht zusammenfallen. So erhält man eine Reihe weiterer Punkte:

$$\bar{a}_{1,1}, \quad \bar{a}_{1,2}, \quad \bar{a}_{1,3}, \ldots,$$

nebst den zugehörigen Funktionen $\bar{f}_{1,n}(z)$ und Bereichen $\bar{T}_{1,n}$. Für die Gesamtheit der bisher gewonnenen Funktionen $\bar{f}_n(z)$, $\bar{f}_{1,n}(z)$ sind Bedingungen a), b) erfüllt.[1])

Indem wir das Verfahren wiederholen, müssen wir jetzt möglicherweise eine Modifikation deshalb eintreten lassen, da ein Bereich $\bar{T}_{1,n}$ einen Punkt $\bar{a}_m$ oder $\bar{a}_{1,m}$ umfassen könnte, ohne daß dabei die zugehörige Funktion $\bar{f}_{1,n}(z)$ mit $\bar{f}_m(z)$ resp. $\bar{f}_{1,m}(z)$ übereinstimmte.[2]) In diesem Falle muß besagter Punkt zum zweiten Male gerechnet werden. Um dieser Sachlage gerecht zu werden, wollen wir nun in folgender Weise zu Werke gehen. Wir ziehen zunächst bloß den ersten Bereich $\bar{T}_{1,1}$ in Betracht, indem wir die in demselben befindlichen rationalen Punkte in zwei Teile zerlegen, und zwar erstens in solche, welche bereits unter den $\bar{a}_n$ oder $\bar{a}_{1,n}$ aufgetreten sind und auch dabei zugleich auf dieselben Funktionen $\bar{f}_n(z)$ resp. $\bar{f}_{1,n}(z)$ führen. Diese Punkte brauchen wir nicht weiter zu berücksichtigen. Dagegen liefern die übrigen rationalen Punkte von $\bar{T}_{1,1}$, sofern noch welche vorhanden sind, eine abzählbare Menge von Funktionen $\bar{f}(z)$ nebst Bereichen $\bar{T}$, welche beibehalten werden sollen. Sodann gehen wir zu $\bar{T}_{1,2}$ und stellen hier eine ähnliche Überlegung an, wobei jetzt außer den früheren Punkten $\bar{a}_n$, $\bar{a}_{1,n}$ noch die soeben erhaltenen Punkte nebst ihren Funktionen

1) Man überzeugt sich leicht geometrisch, daß keinem der Punkte $\bar{a}_{1,n}$ zwei verschiedene Funktionen entsprechen können, sowie daß die mit einem früheren Punkte $\bar{a}_n$ zusammenfallenden Punkte wirklich fortgelassen werden durften. Auf einen strengen Beweis dafür kann man indessen verzichten, indem man schon an dieser Stelle den Beweis so führt, wie später hinsichtlich der im weiteren Laufe der Entwicklungen eintretenden Möglichkeiten ohnehin von Nöten ist.

2) Man kann zwar zeigen, daß der genannte Punkt nur ein $\bar{a}_{1,m}$ sein kann. Das ist indessen hier nicht von Wichtigkeit, da bei den späteren Wiederholungen der Überlegung jeder vorhergehende Punkt doch möglicherweise in Betracht kommen kann.

und Bereichen in Betracht gezogen werden. Wiederholt man dieses Verfahren an jedem weiteren Bereiche $\overline{T}_{1,3}$, $\overline{T}_{1,4}$, ..., so gelangt man schließlich zu einer abzählbaren Menge abzählbarer Mengen neuer Punkte nebst den dazu gehörigen Funktionen und Bereichen, welche wir noch letzten Endes umnumerieren und durch die Indizes $(2, n)$, $n = 1, 2, \ldots$ kennzeichnen wollen:

$$\begin{array}{lll} \bar{a}_{2,1}, & \bar{a}_{2,2}, & \bar{a}_{2,3}, \ldots \\ \bar{f}_{2,1}(z), & \bar{f}_{2,2}(z) & \bar{f}_{2,3}(z), \ldots \\ \overline{T}_{2,1}, & \overline{T}_{2,2}, & \overline{T}_{2,3}, \ldots . \end{array}$$

Der hiermit ausführlich geschilderte Prozeß wird immer wiederholt. Daraus entspringt eine zweifach unendliche Folge von Punkten $\bar{a}_{m,n}$ nebst den zugehörigen Funktionen $\bar{f}_{m,n}(z)$ und Bereichen $\overline{T}_{m,n}$, welche wir nunmehr zu einer einfach unendlichen Folge a_n, $f_n(z)$, T_n definitiv umnumerieren. Diese letzte Folge nebst den zum Punkte $z = \infty$ gehörigen Funktionselementen genügt offenbar Bedingungen a) und b), sie genügt aber auch c), wie jetzt nachgewiesen werden soll.

Sei also L ein endlicher Weg, längs dessen die Ausgangsfunktion $f(z)$ analytisch fortgesetzt werden kann, und man fasse eine geeignete Folge von Kreisen T_0, K_1, K_2, ..., wie sie am Ende von § 1 des näheren angegeben sind, ins Auge. Ist der Mittelpunkt z_1 von K_1 dabei ein rationaler Punkt, so ist er bereits unter den Punkten $\bar{a}_n$ und somit auch unter den a_n enthalten. Sonst kann man aber jedenfalls einen rationalen Punkt a_{n_1} von T_0 ausfindig machen, der so nahe bei z_1 liegt, daß der entsprechende Bereich T_{n_1} den Bogen (z_1, z_2) von L umfaßt. Hiermit haben wir also in $f_{n_1}(z)$ eine erste analytische Fortsetzung der gewünschten Art gewonnen. Gehen wir jetzt zum Punkte z_2, so läßt sich die eben angestellte Überlegung hier wiederholen, der zufolge sich dann ein zweiter Punkt a_{n_2} nebst der zugehörigen Funktion $f_{n_2}(z)$ und dem Bereiche T_{n_2} einstellt. Indem wir so fortfahren, gelangen wir schließlich zum Endpunkte von L. Geht L durch den Punkt ∞, so ist die nötige Ergänzung bereits ersichtlich.

Daß nun endlich die Bedingung d) erfüllt wird, ergibt sich aus der Verabredung, wonach die Funktionswerte überhaupt aufgenommen wurden.

Aus den voraufgehenden Entwicklungen erkennt man die Richtigkeit folgenden Satzes.

Satz[1]). *Die verschiedenen, einem bestimmten Punkte $z = z'$ ent-*

---

1) Poincaré, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Bd. 2 (1888) S. 197.

sprechenden Funktionswerte, welche man aus einem vorgelegten Element durch analytische Fortsetzung abzuleiten vermag, bilden stets eine abzählbare Menge.

§ 5. Über einige spezielle monogene analytische Funktionen.

In den rationalen, sowie in den Exponential- und den trigonometrischen Funktionen haben wir bereits Beispiele von eindeutigen monogenen analytischen Funktionen, deren singuläre Punkte entweder in endlicher Anzahl vorhanden sind oder doch nur aus einer Punktmenge mit einer einzigen Häufungsstelle (nämlich dem Punkte $z = \infty$) bestehen. Dagegen liefern der Logarithmus und die inversen trigonometrischen Funktionen unendlich vieldeutige, die algebraischen Funktionen endlich vieldeutige monogene analytische Funktionen.

a) *Algebraische Funktionen.* Die Richtigkeit letzterer Behauptung bezüglich der algebraischen Funktionen geht schon daraus hervor, daß eine irreduzibele algebraische Gleichung:

$$f(w, z) = 0,$$

eine Funktion w von z definiert, deren Riemannsche Fläche aus einem einzigen Stücke besteht; vgl. Kap. 8, §§ 12, 15. Demgemäß läßt sich eine beliebige Bestimmung von w in jede andere Bestimmung stetig über die Fläche hin fortsetzen, und diese stetige Fortsetzung gibt ohne weiteres zu einer analytischen Fortsetzung Anlaß, wodurch das dem ersten Wertepaar (w_0, z_0) entsprechende Element in ein beliebiges dem zweiten Wertepaare (w_1, z_1) zugehöriges übergeführt wird. Im übrigen ist es nicht schwer, den arithmetischen Charakter dieser Überlegung noch schärfer hervortreten zu lassen, indem wir folgenden Satz vorausschicken.

Satz. *Sei*

$$f(w, z) = 0 \tag{1}$$

eine irreduzibele algebraische Gleichung, wodurch w als mehrdeutige Funktion von z definiert wird. Dann gibt es eine endliche Anzahl von Funktionselementen, welche diese Funktion vollständig darstellen.

Behufs des Beweises knüpfen wir an die Entwicklungen von Kap. 8, § 14 an, wonach sich alle der Gleichung (1) entsprechenden Wertepaare (w, z), deren z in der Nähe einer beliebigen Stelle z_0 liegt, zu Funktionselementen

$$\mathfrak{f}_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)} (z - z_0)^n \quad \text{resp.} \quad \varphi_i(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n^{(i)} (z - z_0)^{n/q_i}$$

zusammengefaßt werden können. Dabei soll der Definitionsbereich sowohl von $\mathfrak{f}_i(z)$ als von $\varphi_i(z)$ aus einem Kreise um z_0 bestehen, und zwar soll das eben der wahre Konvergenzkreis der betreffenden Reihe sein. Im Falle $z_0 = \infty$ tritt ja $1/z$ an Stelle von $z - z_0$. Nach Kap. 8, § 12 werden Elemente vom Typus $\varphi_i(z)$ nur in endlicher Anzahl vorhanden sein. Die entsprechenden Punkte z_0 mögen mit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{k-1}$, $\alpha_k = \infty$ bezeichnet werden. Vor allem wollen wir nun die genannten, sowie alle übrigen, zu den Punkten $\alpha_0, \ldots \alpha_k$ gehörigen Elemente herausgreifen. Sei K_i $(i = 0, \ldots k - 1)$ der kleinste unter den dem Punkte α_i zugehörigen Konvergenzkreisen, und ebenso K_∞ der größte, dem Punkte $\alpha_k = \infty$ entsprechende Kreis. Erstere k Kreisflächen nebst dem Äußern von K_∞ sollen jetzt aus der Ebene fortgehoben werden. Insbesondere kann es vorkommen, daß die ganze Ebene hierdurch erschöpft wird. Es kann aber auch ein endlicher, von mehreren Kreisbogen begrenzter Bereich S resp. mehrere solche Bereiche überbleiben. Endlich können sich isolierte Punkte einstellen. Wesentlich ist dabei, daß, wenn Punkte der Ebene überhaupt noch da sind, diese eine im Endlichen gelegene Menge $\mathfrak{M}$ bilden. Für die Punkte von $\mathfrak{M}$ haben dann die Definitionsbereiche der verschiedenen Elemente $\mathfrak{f}_i(z)$ offenbar eine positive untere Grenze, so daß man also in $\mathfrak{M}$ eine endliche Anzahl von Punkten $\beta_0, \ldots \beta_l$ derart wählen kann, daß die dazu gehörigen Elemente $\mathfrak{f}_i(z)$ die auf $\mathfrak{M}$ entfallenden Bestimmungen von w vollständig erschöpfen. Letzteres gilt auch von K_i.

Hiermit ist der Satz bewiesen. Die Frage, ob die endliche Anzahl vorliegender Funktionselemente auch wirklich alle analytische Fortsetzungen voneinander sind, erledigt sich jetzt in evidenter Weise. Wäre dem nämlich nicht so, so würde man schon aus einem Teile davon eine monogene analytische Funktion zusammensetzen können, welche zugleich der Gleichung (1) und einer zweiten algebraischen Gleichung niederen Grades, $f_1(w, z) = 0$, Genüge leistet. Infolgedessen müßte das Polynom $f(w, z)$ durch das Polynom $f_1(w, z)$ teilbar sein.

b) *Die allgemeine Potenz.* Man braucht den Bereich der elementaren Funktionen noch nicht zu verlassen, um ein Beispiel einer expliziten analytischen Formel zu erhalten, welche nicht eine, sondern mehrere monogene analytische Funktionen definiert. Die allgemeine Potenz wurde nämlich durch die Formel erklärt:

$$a^z = e^{cz}, \qquad c = \log a,$$

unter $\log a$ eine beliebige Bestimmung dieser Größe verstanden. Darnach ist a^z ein unendlich vieldeutiger Ausdruck, dessen verschiedene Bestimmungen sich zu solchen eindeutigen Funktionen zusammenfassen lassen, welche sich je in der ganzen endlichen Ebene analytisch verhalten und darum ganze transzendente Funktionen bilden:

$$a^z = e^{cz}, \qquad e^{(c+2\pi i)z}, \qquad e^{(c+4\pi i)z}, \ldots$$

Die allgemeine Potenz besteht also nicht etwa wie $\log z$ aus einer mehrdeutigen monogenen analytischen Funktion, sondern vielmehr aus unendlich vielen eindeutigen monogenen analytischen Funktionen.

Über Elimination. Im Kleinen gilt der Satz, daß eine analytische Funktion einer analytischen Funktion wieder eine analytische Funktion ist, Kap. 6, § 5. Untersuchen wir jetzt, ob ein entsprechender Satz im Großen besteht. Sei beispielsweise

$$f(w) = \sqrt{w}, \qquad w = e^z.$$

Hier ist w in der ganzen endlichen z-Ebene eine von Null verschiedene eindeutige analytische Funktion von z. Ferner kommen den beiden Bestimmungen von $f(w)$, als Funktion von z betrachtet:

$$f(w) = \varphi(z) = \sqrt{e^z},$$

in dem nämlichen Bereiche die Eigenschaften (a), (c), (d) von § 3, nicht aber (b) zu. Denn jene Bestimmungen werden ja durch die beiden eindeutigen monogenen analytischen Funktionen

$$e^{\frac{1}{2}z}, \qquad -e^{\frac{1}{2}z}$$

gerade erschöpft.

Hieraus erkennt man, daß die Elimination von z' aus zwei vorgelegten Gleichungen:

$$w = \varphi(z'), \qquad z' = \psi(z),$$

wo $\varphi(z')$, $\psi(z)$ monogene analytische Funktionen sind, nicht notwendig zu einer einzigen monogenen Funktion führt, vielmehr kann $\varphi[\psi(z)]$ aus mehreren solchen bestehen resp. Stücke davon abgeben[1]). Demselben Vorkommnis sind wir bereits einmal begegnet, Kap. 8, § 18. Da nahmen wir nämlich von dem Umstande Kenntnis, daß der volle Schnitt zweier algebraischen Flächen möglicherweise mehrere Raumkurven liefern kann.

1) Burkhardt, *Analytische Funktionen*, § 70.

Im gegenwärtigen Falle kann man den Sachverhalt so deuten, daß man die beiden vorgelegten monogenen analytischen Funktionen durch zwei Zylinderflächen darstellt:

$$z = \varphi(y), \qquad y = \psi(x).$$

Durch die also definierten Raumkurven geht dann noch eine dritte Zylinderfläche,

$$z = \varphi[\psi(x)],$$

welche in gewissen Fällen zerfällt, indem die Direktrix derselben, nämlich die ebene Kurve $z = \varphi[\psi(x)]$, aus mehreren monogenen analytischen Kurven besteht. Hiermit zerfällt auch die betreffende Raumkurve. Beispiel:

$$z = \sqrt{y}, \qquad y = x^2.$$

Aufgabe. Welche von den folgenden Formeln stellen mehrere monogene analytische Funktionen vor?

$$\log e^z, \qquad \log \sin z, \qquad \log \sqrt{z}, \qquad \sqrt{\log z}, \qquad \sqrt{\sin z},$$
$$\sqrt{1 - \cos z}, \qquad \sqrt[6]{z^2}.$$

c) *Eine Funktion mit einer natürlichen Grenze.* Wir wollen jetzt eine Funktion kennen lernen, welche sich im Einheitskreise eindeutig und analytisch verhält, ohne jedoch eine analytische Fortsetzung darüber hinaus zu gestatten. Sie wird durch folgende Reihe definiert:

$$H(z) = z^{1!} + z^{2!} + z^{3!} + \cdots.$$

In der Tat konvergiert diese Reihe für alle Werte von z, wofür $|z| < 1$ ist, während sie für $z = 1$ divergiert. Ferner findet man:

$$\lim_{x=1-} H(x) = \infty,$$

wobei x auf der reellen Strecke (0, 1) liegen soll. Denn

$$H(x) > x^{1!} + x^{2!} + \cdots + x^n$$

für alle Werte von n. Dieses Polynom übersteigt aber bei gehöriger Wahl von n und ε jede vorgegebene positive Größe G, sobald $1 - \varepsilon < x < 1$ genommen wird.

Wir können nun noch weiter zeigen, daß

$$\lim H(z) = \infty$$

wird, wenn z längs eines beliebigen Radius, welcher nur einen Winkel

$2p\pi/q$ mit der positiven reellen Achse bildet, an den Rand des Einheitskreises hinanrückt. Sei also

$$z = re^{2p\pi i/q}, \qquad r < 1,$$

und bezeichne man mit m die kleinste natürliche Zahl, wofür $m!$ durch q teilbar wird. Dann wird für die in Betracht kommenden Werte von z

$$H(z) = \sum_{n=1}^{m-1} z^{n!} + \sum_{n=m}^{\infty} r^{n!}.$$

Hierin ist der Beweis unserer Behauptung enthalten, und es ist auch zugleich damit dargetan, daß eine analytische Fortsetzung von $H(z)$ über den Einheitskreis hinaus nicht angeht. Dieser Kreis bildet mithin eine natürliche Grenze für die Funktion.[1])

Die zu $w = H(z)$ inverse Funktion

$$z = L(w)$$

hat die Eigentümlichkeit, daß durchweg

$$|L(w)| < 1$$

ist. Soviel wir sehen können, dürfte indessen $L(w)$ mehrdeutig sein. Wir wollen darum noch ein weiteres Beispiel anführen, wobei sowohl die direkte als auch die inverse Funktion eindeutig ist, ohne jedoch linear zu sein.

d) *Die Funktion* $Q(z)$. Betrachten wir die durch folgende Reihe definierte Funktion $Q(z)$:

$$Q(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n!+2}}{(n!+1)(n!+2)}.$$

Die Reihe konvergiert offenbar gleichmäßig für alle Werte von z, wofür $|z| \leqq 1$ ist, womit sich $Q(z)$ in diesem abgeschlossenen Bereiche als stetig erweist. Im Innern des Kreises verhält sich $Q(z)$ außerdem

---

1) Es wäre indessen ein Irrtum zu glauben, daß $H(z)$ unendlich wird, wenn z einem beliebigen Punkte des Randes zustrebt. In dem Falle würde nämlich die Funktion $H_1(z) = 1/H(z)$ den Wert 0 am Rande annehmen, während sie im Innern des Kreises höchstens eine endliche Anzahl von Polen $z_1, \ldots z_k$ hat. Hiernach könnte man mittels des Ausdrucks

$$(z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2} \cdots (z - z_k)^{\alpha_k} H_1(z)$$

eine Funktion herstellen, die sich im Innern des Kreises analytisch verhält und am Rande den Wert 0 annimmt. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt aber dann das identische Verschwinden von $H_1(z)$.

analytisch. Indessen läßt sich $Q(z)$ nicht über den Kreis hinaus analytisch fortsetzen, denn sonst müßte dasselbe auch für

$$Q''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} z^{n!} = H(z) - z$$

gelten. Ferner ist

$$Q(z) \neq Q(z'), \quad |z| \leqq 1, \quad |z'| \leqq 1,$$

sofern nur $z \neq z'$ ist. In der Tat ist

$$\frac{Q(z) - Q(z')}{z - z'} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n!+1} + z^{n!} z' + \cdots + z'^{n!+1}}{(n!+1)(n!+2)},$$

folglich ist[1])

$$\left| \frac{Q(z) - Q(z')}{z - z'} \right| \geqq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!+1} > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Demnach wird der Rand des Einheitskreises in eine einfache reguläre geschlossene Kurve der w-Ebene übergeführt, deren Inneres dem Innern jenes Kreises ein-eindeutig entspricht, vgl. Kap. 8, § 5.

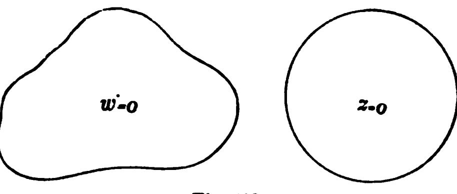


Fig. 102.

Anwendung. Mit Hilfe der Funktion $Q(z)$ kann man häufig ein Beispiel konstruieren, wodurch eine aufgeworfene Frage entschieden wird. So deuten beispielsweise die algebraischen Kurvenscharen

$$f(w, z, \alpha) = 0$$

darauf hin, daß überhaupt jede solche Schar, wo f nur analytisch von den drei Argumenten abhängt, zu einer Umhüllungskurve führen muß. Setzt man indessen die Schar

$$w - Q(z) - \alpha = 0$$

an, so sieht man, daß hier von einer Umhüllungskurve, selbst von einer ausgearteten, nicht die Rede sein kann.

Aufgabe 1. Man konstruiere die Riemannsche Fläche für die Funktion

1) Diesen Schritt im Beweise verdanke ich Herrn A. Hurwitz; vgl. *Bull. Am. Math. Soc.*, 2. Reihe, Bd. 5 (1898), S. 16.

$$\log Q\left(\frac{1}{2}\, z\right) - \log Q\left(\frac{1}{2}\, \frac{1}{z}\right),$$

und zeige, daß dieselbe unendlich vielblättrig ist, ohne jedoch einen Verzweigungspunkt zu besitzen.

Aufgabe 2. Eine bekannte Zerlegung einer Funktion $f(z)$ in einen geraden und einen ungeraden Teil besteht darin, daß man

$$f(z) = \tfrac{1}{2}[f(z) + f(-z)] + \tfrac{1}{2}[f(z) - f(-z)]$$

setzt. Welchen Bedingungen muß eine monogene analytische Funktion $f(z)$ genügen, damit dieser Zerlegung allgemeine Gültigkeit zukomme?

§ 6. Von der Permanenz einer Funktionalgleichung; analytische Fortsetzung vermöge derselben.

Theorem. *Es sei*

$$G(w_1, \dots w_n) \tag{1}$$

ein Polynom in $w_1, \dots w_n$, *dessen Koeffizienten analytische Funktionen von* z *mit gemeinsamer Riemannscher Fläche* $\mathfrak{S}$ *im Sinne von Kap.* 8, § 18 *sind. Ist man dann im Besitze von* n *Funktionen:*

$$w_i = f_i(z), \qquad i = 1, \cdots n, \tag{2}$$

welche sich alle in einem Punkte von $\mathfrak{S}$ *analytisch verhalten und in der Umgebung desselben das Polynom zum Verschwinden bringen:*

$$G(w_1, \dots w_n) = 0, \tag{3}$$

so leistet auch jedes System gleichzeitiger analytischer Fortsetzungen der Funktionen (2) *über einen auf* $\mathfrak{S}$ *beliebig verlaufenden Weg* L *hin der Funktionalgleichung* (3) *Genüge. Dabei soll* L *als eine reguläre Kurve aufgefaßt werden.*

In der Tat verhält sich G, als Funktion von z betrachtet, in jedem Punkte von L analytisch und verschwindet außerdem identisch in jener Umgebung. Denken wir uns L also zunächst als eine in der schlichten Ebene einfache reguläre Kurve, so läßt sich L mit einem Streifen umgeben, in welchem sich G analytisch verhält und überdies identisch verschwindet. Im Falle sich L dagegen überschneidet, so wird man L in eine endliche Anzahl einfacher Bogen zerlegen und jeden derselben dann mit einem Streifen umgeben, wo-

rin sich G analytisch verhält. Daraus erkennt man, daß G der Reihe nach in jedem derselben verschwindet. Hiermit ist der Beweis erbracht.

Die Differentialgleichungen sind Funktionalgleichungen, welche ein wichtiges Beispiel für die Anwendungen des Theorems bilden. Nehmen wir etwa eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten:

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z) w = 0, \tag{4}$$

indem wir vorab folgenden Existenzsatz für die Lösung derselben angeben: Sei $z = z_0$ ein gewöhnlicher Punkt für die Koeffizienten $p(z)$, $q(z)$, und sei ferner K der größte Kreis um z_0, in welchem sich $p(z), q(z)$ beide analytisch verhalten. Dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen von (4), $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$[1]), deren beide sich in K analytisch verhalten. Des weiteren läßt sich jede beliebige Lösung $\mathfrak{w}$, welche sich in z_0 oder auch in irgend einem anderen Punkte von K analytisch verhält, in der Form:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{c}_1 \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{w}_2,$$

ausdrücken, wo $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ Konstante sind. Der Satz gilt selbst dann noch, wenn $p(z), q(z)$ zwei beliebige, in einem einfach zusammenhängenden, $z = \infty$ nicht umfassenden Bereiche K analytische Funktionen sind.

Es möge nun $w = f(z)$ eine Lösung von (4) sein, wobei die Funktion $f(z)$ zunächst bloß in einem beschränkten Bereiche betrachtet wird, in welchem sie sich analytisch verhält. Dann besagt das Theorem, indem man

$$w_1 = \frac{d^2 w}{d z^2}, \qquad w_2 = \frac{dw}{dz}, \qquad w_3 = w,$$

$$G(w_1, w_2, w_3) = w_1 + p(z) w_2 + q(z) w_3$$

setzt, daß auch jede analytische Fortsetzung von $f(z)$ längs eines Weges, der nur durch keinen Pol von $p(z)$, $q(z)$ hindurchgeht, der Differentialgleichung (4) genügt. Demgemäß liefert die monogene analytische Funktion, welche aus dem obigen Funktionselement $f(z)$ hervorgeht, in ihrem Gesamtverlaufe eine Lösung von (4).[2])

---

1) D. h. zwischen $\mathfrak{w}_1$ nnd $\mathfrak{w}_2$ besteht keine identische Relation von der Form:

$$\alpha \mathfrak{w}_1 + \beta \mathfrak{w}_2 = 0,$$

wo α, β Konstante sind, welche nicht beide verschwinden.

2) Dabei muß man jedoch in besonderen Fällen von gewissen Polen der Koeffizienten $p(z)$, $q(z)$ absehen, in welchen die in Rede stehende analytische Funktion trotzdem keine Singularität aufweist; denn in solchen Punkten hört die Differentialgleichung auf, eine Bedeutung zu haben, und darum kann daselbst von einer Lösung derselben ja nicht die Rede sein.

Um noch eine zweite Anwendung des Theorems zu erwähnen, so seien $w_1 = f_1(z)$ und $w_2 = f_2(z)$ zwei linear unabhängige Lösungen von (4), welche in einem bestimmten Bereiche der z-Ebene durch explizite Formeln, z. B. durch Potenzreihen gegeben werden, und sei $w = f(z)$ eine Lösung, welche in einem getrennt liegenden Gebiete betrachtet wird. Indem wir w in den erstgenannten Bereich analytisch fortsetzen, läßt sich w dort in der Form

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 \tag{5}$$

darstellen. Und nun behauptet das Theorem, daß alle simultanen analytischen Fortsetzungen der soeben in jenem Bereiche betrachteten Bestimmungen von w, w_1, w_2 fortdauernd der Funktionalgleichung (5) Genüge leisten.

Analytische Fortsetzung vermöge einer Funktionalgleichung.

a) *Die Gamma-Funktion.* Es ist zuweilen möglich, eine analytische Fortsetzung vermöge einer Funktionalgleichung zu konstatieren. Nehmen wir beispielsweise die Definition der Gammafunktion durch das bestimmte Integral (vgl. ein späteres Kapitel im zweiten Bande):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

wo über die positive reelle Achse integriert wird. Das Integral konvergiert nur so lange $\Re(z) > 0$ ist. Andererseits findet man für solche Werte von z durch teilweise Integration die Funktionalgleichung:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Hier hat aber die linker Hand stehende Funktion eine Bedeutung für alle Werte von z, wofür nur $\Re(z) > -1$ ist. Definiert man daher die Γ-Funktion für den Bereich $-1 < \Re(z) \leqq 0$, $z \neq 0$, durch die Gleichung

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

so erhält man dadurch eine analytische Fortsetzung der durch das Integral vorgestellten Funktion. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens findet man, daß die Funktion sich schließlich über die ganze Ebene mit Ausnahme der Punkte $z = 0, -1, -2, \cdots$ analytisch fortsetzen läßt, wonach sie sich denn als eine eindeutige

Funktion erweist, welche im Endlichen keine anderen Singularitäten als Pole besitzt und im Punkte $z = \infty$ eine höhere Singularität hat.

b) *Die elliptischen Funktionen.* Betrachten wir jetzt das reelle elliptische Integral

$$(6) \qquad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad 0 < k < 1,$$

wobei x auf das Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ beschränkt werde. Die Umkehrfunktion,

$$x = \operatorname{sn} u,$$

erweist sich auch als eindeutig, sofern man u vor der Hand auf das Intervall $-K \leqq u \leqq K$ beschränkt, wo

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ist. Daran schließen sich noch die weiteren positiven Funktionen:

$$\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u, \qquad \sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} u,$$

welche ebenfalls im genannten Intervalle eindeutig sind. Endlich folgt aus

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

daß

$$\frac{dx}{du} = \frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

ist.

Wir wollen jetzt die Gleichung ansetzen:

$$(7) \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

wobei wir x und y als reelle unabhängige Variabelen ansehen, welche im übrigen vorläufig auf den Bereich:

$$-\operatorname{sn}\frac{K}{2} \leqq x \leqq \operatorname{sn}\frac{K}{2}, \qquad -\operatorname{sn}\frac{K}{2} \leqq y \leqq \operatorname{sn}\frac{K}{2},$$

beschränkt werden mögen, damit Gleichung (7) stets nach z auflösbar sei. Hierdurch wird z zunächst als eindeutige Funktion von x und y festgelegt. Und nun ist es eine Haupteigenschaft des elliptischen Integrals (6), daß diese Abhängigkeit eben eine algebraische ist.

Euler hat nämlich gezeigt, daß

(8) $$z = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

ist.[1])

Aus dieser Relation erhält man eine entsprechende für die inversen Funktionen, indem man

$$x = \operatorname{sn} u, \qquad y = \operatorname{sn} v, \qquad z = \operatorname{sn}(u+v)$$

einträgt:

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Dies ist eben das sogenannte *Additionstheorem* für $\operatorname{sn} u$. Setzt man hier noch $v = u$, so kommt:

(9) $$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 u} = \frac{2 \operatorname{sn} u \dfrac{d \operatorname{sn} u}{du}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 u}.$$

---

1) Die Richtigkeit dieser Formel ergibt sich sofort, indem man eine zur Behandlung der Funktion $\log z = \int\limits_1^z \frac{dz}{z}$ von Burkhardt (*Analytische Funktionen*, § 56; vgl. unten, Kap. 12, § 1), benutzte Methode auf den vorliegenden Fall überträgt und sonach im letzten Integral von (7), geschrieben in der Form:

$$\int\limits_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

die Integrationsvariabele t durch τ ersetzt, wo

$$\tau = \frac{x\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)} + t\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2t^2}$$

ist. Dabei wird, wie die Rechnung zeigt,

$$\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Infolgedessen geht das letztgenannte Integral in

$$\int\limits_x^z \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$$

über, wo z durch die Formel (8) gegeben ist. Schreibt man noch das mittlere Integral von (7) in der Form:

$$\int\limits_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}},$$

so lassen sich die beiden Integrale zu einem einzigen zusammenziehen, womit sich dann die Formel (8) ergibt.

Wir wollen nunmehr unser Augenmerk auf den analytischen Charakter der hier in Betracht gezogenen Funktionen richten. Da finden wir vor allem, daß sich das Integral (6), als Funktion eines komplexen Arguments x aufgefaßt, — wir wollen ja die obigen Buchstaben x, y, u, v auch für komplexe Werte beibehalten, — in der Umgebung der Stelle $x = 0$ analytisch verhält, während seine Ableitung dort nicht verschwindet, so daß also die inverse Funktion $x = \operatorname{sn} u$ ebenfalls dort analytisch ist. Es soll jetzt bewiesen werden, daß $\operatorname{sn} u$ eine eindeutige monogene analytische Funktion ist, der keine anderen Singularitäten als Pole in der ganzen endlichen Ebene zukommen. In der Tat sei R der Radius des größten Kreises um $u = 0$, in welchem $\operatorname{sn} u$ sich analytisch verhält. (Daß $\operatorname{sn} u$ keine ganze Funktion ist, wird später gezeigt.) Dann wird durch die rechte Seite von Formel (9) eine Funktion $f(u)$ definiert, welche im genannten Kreise, höchstens von Polen abgesehen, eindeutig und analytisch ist. Durch Eintragen einer neuen Variabelen $u' = 2u$ kommt:

$$\operatorname{sn} u' = f\left(\frac{u'}{2}\right).$$

Hier steht rechter Hand eine Funktion, welche im erweiterten Kreise $|u'| < 2R$, höchstens von Polen abgesehen, eindeutig und analytisch ist. Infolgedessen gestattet die Funktion $\operatorname{sn} u$ eine analytische Fortsetzung über den ursprünglichen Kreis $|u| < R$ hinaus, und zwar weist sie im Kreise $|u| < 2R$ höchstens Pole auf. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens ergibt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung.[1])

Um noch nachträglich zu konstatieren, daß Pole auch wirklich vorhanden sind, genügt es, das Integral (6) über die positive imaginäre Achse zu führen, woraus erhellt, daß $\operatorname{sn} u$ im Punkte

$$u_0 = i \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}$$

unendlich wird.

Die Funktionen $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ besitzen analoge algebraische Additionstheoreme, welche vorläufig ebenfalls nur für beschränkte reelle Werte von u und v bewiesen werden.[2]) Setzt man hierin $u = v$, so kommt:

1) Diese Beweismethode rührt von Weierstraß (*Vorlesungen über elliptische Funktionen*) her.

2) Vgl. etwa Schlömilch, *Kompendium der höheren Analysis*, Bd. 2, S. 399, 400. Die Formeln ergeben sich durch direktes Ausrechnen von $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{1-k^2z^2}$ als Funktionen von x, y vermöge (8).

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{1 - 2\operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{1 - 2k \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}.$$

Hier stehen rechter Hand eindeutige Funktionen, welche sich in der ganzen endlichen Ebene, höchstens mit Ausnahme von Polen und hebbaren Unstetigkeiten, analytisch verhalten. Andererseits stimmen die analytischen Funktionen $\operatorname{cn} 2u$, $\operatorname{dn} 2u$ längs eines Stückes der reellen Achse resp. mit diesen Funktionen überein. Daher sind sie überhaupt bis auf hebbare Unstetigkeiten mit denselben identisch.

Jetzt können wir noch beweisen, daß das Additionstheorem für $\operatorname{sn} u$ allgemein gilt, was auch immer für komplexe Werte u, v haben mögen, sofern nur die in Betracht kommenden Funktionen alle eine Bedeutung haben. Es ist eine gute Übung für den Leser, diesen Beweis durchzudenken. Wir wollen uns indes hier deshalb nicht weiter damit beschäftigen, weil der Satz ja ohne weiteres aus der Verallgemeinerung des Prinzips der Erhaltung einer Funktionalgleichung auf Funktionen mehrerer Veränderlichen hervorgeht.

Über die Perioden von $\operatorname{sn} u$. Endlich konstatieren wir, daß $\operatorname{sn} u$ die Perioden $4K$, $2K'i$ zuläßt, wo

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}},$$

und $k^2 + k'^2 = 1$ ist. Zu dem Zwecke werde nämlich das Integral

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

zuerst über eine flache Schleife um die Punkte -1, 1, Fig. 103a, geführt, worauf sich dann diese Schleife der Strecke $(-1, 1)$ der reellen

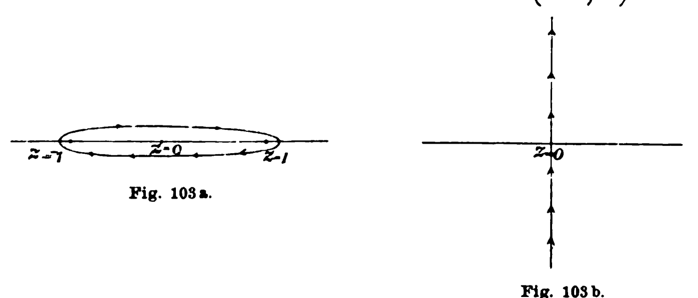


Fig. 103a.

Fig. 103b.

Achse immer noch mehr anschmiegen soll. Dabei springt in die Augen, daß der Gesamtzuwachs des Integrals gerade $4K$ beträgt.

Nachdem nun z, vom Punkte $z = 0$ ausgehend, diesen Weg einmal beschrieben hat, soll z hinfort in der Umgebung der Stelle $z = 0$ verbleiben. Hiermit erhält das Integral den Wert

$$4K + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wobei der letzterem Integrale entsprechende Integrationsweg aus der genannten Umgebung nicht hinaustritt. Daraus geht hervor, daß die Funktionalgleichung

$$\operatorname{sn}(u + 4K) = \operatorname{sn} u$$

zunächst wenigstens in der Umgebung der Stelle $u = 0$ gilt. Wegen des Prinzips der Permanenz einer Funktionalgleichung muß sie aber deshalb allgemein bestehen.

In ähnlicher Weise wird man z jetzt über den in Fig. 103b angedeuteten Weg führen. Dadurch erfährt das Integral den Zuwachs

$$i\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} + i\int_{-\infty}^0 \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} = 2K'i.$$

Um letztere Gleichung zu konstatieren, wird man am einfachsten, wie folgt, vorgehen. Nach dem Cauchyschen Integralsatze läßt sich der betreffende Integrationsweg in eine die positive reelle Achse umfassende Schleife stetig deformieren, ohne daß der Wert des Integrals sich dabei ändert. Knüpft man nun an die Entwicklungen von Kap. 8, § 16 an, indem man dieser Schleife gestattet, sich jener Achse immer noch enger anzuschmiegen, so ergibt sich sofort die gewünschte Auswertung des Integrals. Hieraus folgt gerade so, wie im soeben besprochenen Falle, daß

$$\operatorname{sn}(u + 2K'i) = \operatorname{sn} u.$$

Hiernach erweist sich $\operatorname{sn} u$ als doppeltperiodisch mit den Perioden $4K$ und $2K'i$. Daß jede weitere Periode Ω sich linear und ganzzahlig aus diesen zusammensetzt:

$$\Omega = 4mK + 2m'K'i,$$

wird im folgenden Kapitel gezeigt.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen der Theorie.

Zehntes Kapitel.

Periodische Funktionen.

§ 1. Primitive Perioden.

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf eindeutige analytische Funktionen, die in der ganzen endlichen Ebene keine anderen Singularitäten als Pole haben. Eine solche Funktion heißt *periodisch*, wenn sie einer Funktionalgleichung von der Form:

$$f(z+\omega) = f(z)$$

genügt. Dabei ist ω eine von 0 verschiedene Konstante, und die Gleichung gilt für alle Werte von z, wofür beide Funktionen definiert sind.[1]) ω heißt eine *Periode*. Es erhellt sofort, daß auch $n\omega$, $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, sowie ferner, unter ω_1, ω_2 zwei beliebige Perioden verstanden, die Größe $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, $(m_1, m_2 = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, eine Periode ist. Im besonderen kann es vorkommen, daß ein Bruchteil von ω bzw. die Größe $\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$, wo wenigstens einer der

---

1) Allgemein sei $f(z)$ eine beliebige monogene analytische Funktion von folgender Beschaffenheit: in jedem Punkte der Umgebung einer bestimmten Stelle $z = z_0$ fällt eine besondere Bestimmung von $f(z)$ mit einer zweiten Bestimmung dieser Funktion in dem entsprechenden Punkte $z' = z + \omega$ der Umgebung der Stelle $z_0 + \omega$ zusammen:

$$f(z+\omega) = f(z).$$

Setzt man dann $f(z)$ längs eines von z_0 ausgehenden Weges analytisch fort, so läßt sich ersichtlich jene zweite Bestimmung der Funktion längs desjenigen Weges fortsetzen, welcher aus dem ersten Wege durch die Parallelverschiebung: $z' = z + \omega$ hervorgeht. Hieraus erkennt man, daß sich der ganze Definitionsbereich von $f(z)$ mit demjenigen von $f(z+\omega)$ gerade deckt, sowie daß die beiden monogenen analytischen Funktionen $f(z)$ und $f(z+\omega)$ ausnahmlos durch obige Funktionalgleichung miteinander verknüpft sind. $f(z)$ heißt dann *periodisch*.

Koeffizienten α_1, α_2 keine ganze Zahl ist, eine Periode ist. Dementsprechend drängt sich vor allem die Frage auf, ob eine solche Periode dem absoluten Betrage nach beliebig klein zu werden vermöge. Hierauf gibt folgender Satz Antwort.

Hilfssatz.[1] *Ist $f(z)$ eine periodische Funktion, die nicht bloß auf eine Konstante ausartet, und zeichnet man alle ihre Perioden als Punkte der Ebene auf, so haben dieselben keine im Endlichen belegene Häufungsstelle.*[2]

Denn sonst müßten sich diese Punkte auch in der Nähe der Stelle $z = 0$ häufen, da die Differenz zweier in der Nähe der Häufungsstelle gelegener Perioden wieder eine Periode ist. Wäre dem nun so, so sei $z = z_0$ ein Punkt, in welchem $f(z)$ sich analytisch verhält. Dann gibt es in jeder Nähe dieses Punktes einen Punkt $z = z_0 + \omega$, in welchem $f(z)$ den Wert $f(z_0)$ annimmt, und daher verschwindet die Funktion $f(z) - f(z_0)$ in jeder Umgebung von z_0 noch in einem zweiten von z_0 verschiedenen Punkte. Demgemäß kann $f(z)$ nur eine Konstante sein, was eben gegen die Voraussetzung verstößt.

Jetzt nehme man eine beliebige Periode, lege durch den dieselbe darstellenden Punkt und $z = 0$ eine Gerade, und bezeichne mit ω eine der beiden auf letzterer befindlichen, dem Punkte $z = 0$ am nächsten gelegenen Perioden. Dann wird eine beliebige Periode Ω, wofür die Relation

(1) $$\operatorname{arc} \Omega \equiv \operatorname{arc} \omega \pmod{\pi}$$

gilt, ein ganzzahliges Vielfaches von ω sein,

$$\Omega = n\omega$$

Denn sonst könnte man Ω in der Form schreiben:

$$\Omega = n\omega + \alpha\omega,$$

wo n eine ganze Zahl und die reelle Größe α zwischen 0 und 1 liegt, und daher müßte $\alpha\omega$ eine Periode sein. Das widerspricht aber der Voraussetzung bezüglich ω, und hiermit erweist sich die Behauptung als richtig.

---

1) Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, 1. Aufl., 1859, S. 76; 2. Aufl., 1873, S. 233. Der Satz rührt im wesentlichen von Jacobi her; vgl. das übernächste Zitat.

2) Für mehrdeutige Funktionen ist der Satz nicht richtig. Andererseits behält der Satz seine Gültigkeit für eindeutige reelle stetige Funktionen einer reellen Variablen, sofern man das Wort „Ebene" durch „Gerade" ersetzt.

Die Größe ω heißt nach **Weierstraß** eine *primitive Periode*,[1]) d. h. eine Periode, welche so beschaffen ist, daß jede andere Periode Ω, wofür die Relation (1) gilt, sich als ein ganzzahliges Vielfaches derselben ausdrücken läßt. Hat $f(z)$ keine anderen Perioden als nur $n\omega$, so heißt $f(z)$ *einfach periodisch*. Sonst sei $\overline{\omega}$ eine weitere Periode. Da $\operatorname{arc}\overline{\omega} \neq \operatorname{arc}\omega$ resp. $\operatorname{arc}\omega + \pi$ ist, so bilden die beiden Strecken $(0, \omega)$, $(0, \overline{\omega})$ zwei Seiten eines Parallelogramms. Innerhalb und auf dem Rande desselben können sich dem vorstehenden Satze zufolge nur eine endliche Anzahl von Perioden befinden; im übrigen liegt nur die eine Periode ω auf der Seite $(0, \omega)$, denn ω ist ja primitiv. Des weiteren sei $\omega' \neq \omega$ eine Periode, welche im Parallelogramm und zwar der Seite $(0, \omega)$ möglichst nahe liegt. Wir wollen nun das Parallelogramm mit den Seiten $(0, \omega)$, $(0, \omega')$ ins Auge fassen. Die Ecken ω, ω', $\omega + \omega'$ desselben stellen Perioden dar, weiter gibt es aber keine den inneren und Randpunkten zugehörigen Perioden. Denn nach den Forderungen, wodurch das Parallelogramm bestimmt wurde, kann ein solcher Punkt Ω höchstens auf der Seite $(\omega', \omega + \omega')$ liegen: $\Omega = \omega' + \alpha\omega$, $0 < \alpha < 1$. Darnach müßte aber auch eine Periode, nämlich $\alpha\omega$, auf der Seite $(0, \omega)$ liegen, wodurch man denn auf einen Widerspruch geführt würde.

Jetzt teile man die ganze Ebene in kongruente Parallelogramme ein, denen das vorstehende Parallelogramm angehöre. Die Ecken derselben mit Ausnahme von $z = 0$ stellen dann Perioden dar, denn sie sind alle in der Formel enthalten:

$$\Omega = m\omega + m'\omega', \quad m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad |m| + |m'| > 0.$$

Weiter gibt es aber keine Perioden. Denn eine solche würde noch zu einer Periode führen, welche einem von den Ecken verschiedenen Punkte des Ausgangsparallelogramms entspricht.

Die Funktion $f(z)$ heißt in diesem Falle *doppeltperiodisch* und die Perioden ω, ω' bilden ein *primitives Periodenpaar*, d. h. ein Periodenpaar, welches so beschaffen ist, daß jede Periode als Summe zweier ganzzahligen Vielfachen der beiden Bestandteile ω und ω' ausgedrückt werden kann.

Während eine primitive Periode einer einfach periodischen Funktion bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt war, kann man dagegen bei den doppeltperiodischen Funktionen ein primitives Perioden-

1) Jacobi gebrauchte die Bezeichnung „index proprius", *Journ. für Math.*, Bd. 13 (1835), S. 55. Der Ausdruck „primitive Periode" rührt von Weierstraß's Vorlesungen her.

paar auf unendlich viele verschiedene Weisen wählen. In der Tat setze man

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Omega &= \mu\omega + \mu'\omega', \\ \Omega' &= \nu\omega + \nu'\omega', \end{aligned}$$

wo μ, μ', ν, ν' ganze Zahlen sind. Kann man diese Gleichungen nach ω, ω' ganzzahlig auflösen:

$$\begin{aligned} \omega &= \varkappa\Omega + \varkappa'\Omega', \\ \omega' &= \lambda\Omega + \lambda'\Omega', \end{aligned}$$

wo also $\varkappa$, $\varkappa'$, λ, λ' ganze Zahlen sind, so läßt sich jede Periode auch durch Ω, Ω' ganzzahlig ausdrücken, m. a. W. bilden dann Ω und Ω' ebenfalls ein primitives Periodenpaar. Beispiel: $\mu = \nu' = 1$, $\mu' = 0$, ν beliebig. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Ω, Ω' ein primitives Periodenpaar bilden sollen, besteht darin, daß

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mu & \mu' \\ \nu & \nu' \end{vmatrix} = \pm 1$$

sei. Daß diese Bedingung hinreicht, ist ja evident. Daß sie aber auch notwendig ist, ergibt sich, wie folgt. Zuvörderst ist klar, daß die Koeffizienten $\varkappa$, $\varkappa'$, λ, λ' ganzzahlig ausfallen müssen, denn sonst könnte man auf die Existenz einer Periode schließen, welche sich nicht als die Summe zweier ganzzahliger Vielfachen von Ω, Ω' ausdrücken läßt. Aus der Beziehung

$$\varkappa\Omega + \varkappa'\Omega' = K\Omega + K'\Omega', \quad \text{d. h.} \quad (\varkappa - K)\Omega + (\varkappa' - K')\Omega' = 0$$

folgt nämlich wegen (2) und (3), daß

$$\varkappa = K, \quad \varkappa' = K'$$

ist; und ähnliches gilt auch für λ, λ'. Nun ist aber

$$\varkappa = \frac{\nu'}{\Delta}, \quad \varkappa' = -\frac{\mu'}{\Delta}, \quad \lambda = -\frac{\nu}{\Delta}, \quad \lambda' = \frac{\mu}{\Delta},$$

woraus sich ergibt,

$$\begin{vmatrix} \mu & \mu' \\ \nu & \nu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta\cdot\lambda' & -\Delta\cdot\varkappa' \\ -\Delta\cdot\lambda & \Delta\cdot\varkappa \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \Delta = \Delta^2(\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda).$$

Hierin liegt der gewünschte Beweis. Geometrisch sagt die Bedingung aus, daß die Flächeninhalte der beiden Periodenparallelogramme einander gleich sind.

Die voraufgehenden Entwicklungen erschöpfen alle Möglichkeiten bezüglich der Existenz von Perioden der hier in Betracht gezogenen Funktionen $f(z)$, daher müssen diese Funktionen entweder einfach oder doppelt periodisch sein. Hiermit ist auch der folgende von Jacobi herrührende Satz geliefert.

Lehrsatz.[1] *Eine eindeutige n-fach periodische Funktion $f(z)$ gibt es nicht, wofern $n > 2$ und $f(z)$ keine Konstante ist.*

Wir betonen die Bedingung *eindeutig*, denn es gibt wohl *mehrdeutige* Funktionen, deren Perioden sich nicht alle durch ein primitives Perioden*paar*, sondern erst vermöge eines primitiven Perioden*komplexes* $(\omega, \omega', \ldots, \omega^{(n-1)})$ ganzzahlig darstellen lassen:

$$\Omega = m\omega + m'\omega' + \cdots + m^{(n-1)}\omega^{(n-1)}.$$

Insbesondere liefert die einem nicht spezialisierten Abelschen Integrale, $p > 1$, entsprechende Umkehrfunktion eine derartige Funktion.[2]

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß es im Falle einer doppeltperiodischen Funktion stets ein primitives Periodenpaar (ω, ω') gibt, wofür der Punkt

$$\frac{\omega'}{\omega} = a + bi$$

in demjenigen Raume der Zahlenebene liegt, welcher durch folgende Ungleichungen bestimmt wird[3]:

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x < \tfrac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 > 1, \quad y > 0,$$

wozu noch die Randpunkte

$$x^2 + y^2 = 1, \quad -\tfrac{1}{2} < x \leqq 0, \quad y > 0$$

hinzutreten. Es ist hier.

$$\pi/3 < \operatorname{arc} \omega'/\omega \leqq 2\pi/3.$$

Wie man leicht nachrechnet, haben

$$\Re\left(\frac{\omega'}{i\omega}\right) \quad \text{und} \quad \Delta \cdot \Re\left(\frac{\Omega'}{i\Omega}\right)$$

stets gleiches Vorzeichen.

---

1) Jacobi, *Journal für Math.*, Bd. 13, (1835), S. 61.

2) Man vergleiche etwa Neumann, *Abelsche Integrale*, 2. Aufl., 1884, oder Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.*

3) Hierüber vergleiche man Klein-Fricke, *Modulfunktionen,* Bd. 1, 2. Abschnitt, 3. Kap., S. 243.

§ 2. Über Periodenstreifen und einfach periodische Funktionen.

Sei $f(z)$ eine einfach periodische Funktion mit der primitiven Periode ω. Zur Behandlung von $f(z)$ teilen wir die z-Ebene in gleiche Streifen ein, indem wir durch jeden der Punkte $z = n\omega (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ eine Gerade legen, welche, wie wir fürs erste voraussetzen wollen, senkrecht auf der Strecke $(0, \omega)$ stehen soll. Greift man einen dieser Streifen willkürlich heraus, welcher dann als der Anfangs- oder Ausgangsstreifen bezeichnet werde, so entspricht jedem Punkte z' der Ebene vermöge der Beziehung

$$z' = z + n\omega, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ein und nur ein Punkt z dieses Streifens. Die Punkte z' heißen zu z, sowie untereinander *kongruent*. Nur wegen der Randpunkte ist noch eine Festsetzung nötig, welche wir, wie folgt, treffen wollen: die Punkte des einen Randes sollen zum Ausgangsstreifen gerechnet werden, diejenigen des anderen Randes aber nicht; außerdem wird man den unendlich fernen Bereich des Streifens als zwei getrennte Punkte auffassen, wie später des näheren besprochen werden soll. Wie man sieht, läßt sich das Verhalten der Funktion $f(z)$ in der ganzen Ebene überschauen, indem man ihr Verhalten bloß in den Punkten des Anfangsstreifens untersucht. Im übrigen machen wir den Leser noch einmal auf die am Eingange des vorigen Paragraphen getroffene Verabredung bezüglich der Funktion $f(z)$ aufmerksam.

Den Ausgangsstreifen nennt man nach Klein einen *Fundamentalbereich* oder *-raum* für die Funktion $f(z)$.[1]) Auf die genaue Form und Lage der Begrenzung desselben kommt es nicht an. So hätte man beispielsweise statt senkrechter auch beliebige parallele Geraden durch die Punkte $n\omega$ legen dürfen, vorausgesetzt nur, daß sie mit der durch 0 und ω gelegten Geraden nicht zusammenfallen. Wesentlich ist dabei nur, daß ein Bereich angenommen wird, durch dessen Wiederholung vermöge der Transformation

$$z' = z + n\omega$$

der ganze Definitionsbereich der Funktion $f(z)$ gerade einmal erhalten wird.[2])

---

1) Vgl. *Enzyklopädie*, II B 1, Nr. 25, sowie Klein-Fricke, *Modulfunktionen*, Bd. 1, S. 163—203. Der genannte Streifen bildet den *Diskontinuitätsbereich* für die Gruppe linearer Transformationen: $(z', z + nw)$, Fricke-Klein, *Automorphe Funktionen*, Bd. 1, S. 60.

2) Die beiden Punkte ∞ des Streifens nehmen hierbei eine Sonderstellung ein, indem sie zu jedem Fundamentalstreifen gerechnet werden müssen, während sie andererseits zu keinem Punkte des Definitionsbereiches von $f(z)$ führen, sofern $f(z)$ nicht gerade eine Konstante ist.

Um die Eigenschaften der Funktion $f(z)$ zu erforschen, bietet sich als bequemstes Mittel die Methode der konformen Abbildung, welcher wir uns jetzt zuwenden wollen.

Konforme Abbildung des Periodenstreifens auf die volle Ebene. Durch die Transformation

$$w = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$$

wird der Periodenstreifen ein-eindeutig auf die schlichte w-Ebene bezogen. Wir haben nämlich früher einmal die Transformation

$$w = e^Z$$

eingehend erörtert (Kap. 6, § 15, sowie Kap. 8, § 1). Es ergab sich, daß die Z-Ebene hierdurch auf eine unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten in $w = 0, \infty$ abgebildet wird, und zwar so, daß der Streifen

$$0 \leqq Y < 2\pi, \qquad Z = X + iY,$$

ein-eindeutig auf ein längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenes Blatt bezogen wird. Andererseits wird derselbe Streifen durch die Transformation

$$z = \frac{\omega}{2\pi i} Z$$

in einen jener Periodenstreifen, — nehmen wir an, in den Anfangsstreifen, — übergeführt.

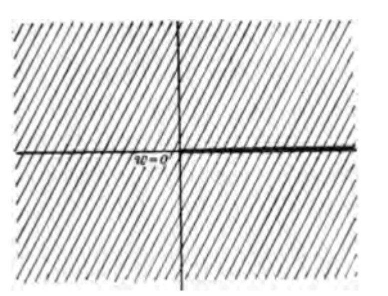


Fig. 104.

Lassen wir jetzt den Punkt z aus dem Anfangs- in einen benachbarten Streifen übertreten. Dabei rückt w in ein zweites Blatt der Riemannschen Fläche. Und nun entsprechen zwei übereinanderliegenden Punkten dieser Fläche zwei zueinander kongruente Punkte der z-Ebene. Infolgedessen nimmt $f(z)$, als Funktion von w betrachtet:

$$f(z) = \varphi(w),$$

in übereinander liegenden Punkten der verschiedenen Blätter gleiche Werte an und erweist sich somit als eine eindeutige Funktion von w. Des weiteren verhält sich $\varphi(w)$ im allgemeinen analytisch, indem $\varphi(w)$ in einem endlichen Punkte $w_0 \neq 0$ höchstens einen Pol aufweist. Dagegen kann einer oder auch beide der Punkte $w = 0, \infty$ der Sitz einer wesentlichen Singularität sein, es können sich ferner Pole in der Nähe dieser Punkte häufen, so daß also eine isolierte wesentliche Singularität zweiter Art zu stande kommt.

Diese beiden Punkte $w = 0, \infty$ sind es gerade, welche dem unendlich fernen Bereiche des Periodenstreifens entsprechen, woraus nun hervorleuchtet, weshalb es sich empfiehlt, diesen Bereich als zwei getrennte Punkte aufzufassen, das Verhalten von $f(z)$ in einem Ende des Streifens bedingt nämlich keineswegs das Verhalten der Funktion im anderen Ende.

Umgekehrt führen alle diejenigen eindeutigen Funktionen $\varphi(w)$, welche in der ganzen w-Ebene, von den Punkten $w = 0, \infty$ höchstens abgesehen, keine anderen singulären Punkte als Pole haben, auf Funktionen $f(z)$, welche sich im Endlichen bis auf Pole analytisch verhalten und die Periode ω zulassen. Dabei braucht ω jedoch keine primitive Periode zu sein und außerdem kann hier noch eine zweite Periode ω', wofür $\operatorname{arc} \omega' \neq \operatorname{arc} \omega$ resp. $\operatorname{arc} \omega + \pi$ ist, vorhanden sein.

Unter den eindeutigen analytischen Funktionen nehmen die rationalen Funktionen eine besonders einfache Stellung ein. Untersuchen wir daher jetzt, welche Eigenschaften der Funktion $f(z)$ zukommen, wenn $\varphi(w)$ rational ist. In diesem Falle verhält sich $\varphi(w)$ auch in den Punkten $w = 0, \infty$ analytisch resp. hat $\varphi(w)$ in einem oder in beiden derselben einen Pol. Hiernach kann man sagen: Rückt z längs eines beliebigen ganz im Periodenstreifen verlaufenden Weges nach einer bestimmten Seite hin ins Unendliche, so nähert sich $f(z)$ dabei einem Grenzwerte oder aber $f(z)$ wird unendlich. Diese notwendige Bedingung ist offenbar auch hinreichend, falls sie für beide Enden des Periodenstreifens erfüllt ist.

Definition. Nähert sich $f(z)$ einem Grenzwerte C oder wird $f(z)$ unendlich, wenn z längs eines beliebigen ganz im Fundamentalraume verlaufenden Weges nach einer bestimmten Seite hin ins Unendliche rückt, so sagt man: $f(z)$ *nimmt den Wert C* im betreffenden Ende des Streifens *an* bzw. hat dort einen *Pol*; und man definiert die Ordnung des Poles usw. für die Funktion $f(z)$ als diejenige Zahl, welche die Ordnung des Poles der zugehörigen Funktion $\varphi(w)$ im entsprechenden Punkte darstellt. In jedem anderen Falle sagt man, die

Funktion $f(z)$ hat im Endpunkte des Streifens einen *wesentlichen singulären Punkt.* Bleibt die Funktion bloß endlich in einem Ende des Parallelstreifens, so nimmt sie notwendig einen bestimmten Wert dort an.

Aufgabe. Man untersuche die Abbildung eines Periodenstreifens, wenn dieser durch zwei parallele Gerade begrenzt wird, welche indessen nicht senkrecht auf der Strecke $(0, \omega)$ stehen. Insbesondere soll dabei gezeigt werden, daß ein durch zwei Parallele zur Strecke $(0, \omega)$ aus dem Streifen geschnittenes Parallelogramm in einen Kreisring der w-Ebene übergeführt wird, welcher längs einer logarithmischen Spirale aufgeschnitten ist.

§ 3. Behandlung der einfach periodischen Funktionen vermöge konformer Abbildung ihres Fundamentalbereiches.

Im Anschluß an die Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen, sowie des Paragraphen über rationale Funktionen, Kap. 7, § 10, erhält man eine Reihe von Sätzen betreffend einfach periodische Funktionen, zu deren Betrachtung wir jetzt übergehen.[1])

1. Satz. *Hat eine einfach periodische Funktion $f(z)$ keinen wesentlichen singulären Punkt im Fundamentalraume, so läßt sich $f(z)$ als eine rationale Funktion von $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$ darstellen, wobei ω eine (primitive oder nicht-primitive) Periode bedeutet:*

$$f(z) = R\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}\right).$$

Wird $f(z)$ hier ferner in keinem der beiden Endpunkte des Fundamentalstreifens null oder unendlich, so hat man, sofern $f(z)$ keine Konstante ist:*

$$f(z) = C\frac{\prod\limits_{c=1}^{n}\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}z} - e^{\frac{2\pi i}{\omega}a_c}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}z} - e^{\frac{2\pi i}{\omega}b_k}\right)}.$$

Wird die Funktion bloß in keinem Endpunkte unendlich, so wird

$$f(z) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{A_{jk}}{\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega}z} - e^{\frac{2\pi i}{\omega}b_j}\right)^k} + C.$$

1) Wir erinnern wieder an die zu Anfang des § 1 getroffene Voraussetzung bezüglich der Funktion $f(z)$.

Hinsichtlich der Ausnahmefälle wird der Leser den Satz leicht ergänzen können.

Wir fügen noch den folgenden Zusatz hinzu, dessen erster Teil auch direkt bewiesen werden kann, da die Funktion ja in der ganzen Ebene endlich bleibt.

Zusatz. *Hat $f(z)$ außerdem gar keinen Pol im ganzen Fundamentalraume, inklusive der beiden Endpunkte, so ist $f(z)$ eine Konstante. Hat $f(z)$ bloß in einem Endpunkte einen Pol, so ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion von $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$ bzw. $e^{-\frac{2\pi i}{\omega}z}$.*

Anstatt der Funktion $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$ kann man $\tan\frac{\pi}{\omega}z$ ebenso gut zur Darstellung einer periodischen Funktion verwenden, denn die beiden Funktionen hängen ja linear voneinander ab:

$$\tan\frac{\pi}{\omega}z = -i\cdot\frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}-1}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}+1}.$$

Im Falle $\varphi(w)$ keine anderen singulären Punkte als nur $w=0, \infty$ hat, kann man $\varphi(w)$ in eine Laurentsche Reihe entwickeln, die für die ganze Ebene außer dem Punkte $w=0$ gilt:

(1) $$\varphi(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n.$$

Die entsprechende Funktion $f(z)=\varphi(w)$ läßt somit eine für die ganze endliche z-Ebene gültige Entwicklung von der Form zu:

(2) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n\frac{2\pi i}{\omega}z}.$$

Ersetzt man hier die Exponentialfunktion durch trigonometrische Funktionen, so erhält man für $f(z)$ eine Entwicklung in eine Fouriersche Reihe:

(3) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{2\pi}{\omega}z+b_n\sin n\frac{2\pi}{\omega}z\right).$$

Dabei ist

$$a_n=c_n+c_{-n},\qquad b_n=i(c_n-c_{-n}).$$

Daß die beiden Reihen:

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\frac{2\pi}{\omega}z,\qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\frac{2\pi}{\omega}z,$$

in jedem Punkte der z-Ebene absolut, sowie in jedem endlichen Bereiche der Ebene gleichmäßig konvergieren, beweist man ohne Schwierigkeit auf Grund folgender Relationen:

$$|c_n| < MR^{-n}, \quad |c_{-n}| < mr^n, \qquad n \geq 0,$$

wo R, r beliebig groß bzw. klein angenommen werden dürfen, und M, m von n nicht abhängen, vgl. Kap. 7, § 15. Ferner gelten wegen

$$\cos \zeta = \frac{e^{\zeta i} + e^{-\zeta i}}{2}, \quad \sin \zeta = \frac{e^{\zeta i} - e^{-\zeta i}}{2i}$$

die Relationen

$$|\cos \zeta| \leqq e^{|\eta|}, \qquad |\sin \zeta| \leqq e^{|\eta|}, \qquad \zeta = \xi + \eta i.$$

Denn es ist

$$|e^{\xi i - \eta} \pm e^{-\xi i + \eta}| \leqq e^{-\eta} + e^{\eta} = e^{|\eta|} + e^{-|\eta|} \leqq 2 e^{|\eta|}.$$

Der Einfachheit halber haben wir vorausgesetzt, daß $\varphi(w)$ keine anderen singulären Punkte im Endlichen als nur den einen $w = 0$ hat. Dem entspricht, daß $f(z)$ gar keine singulären Punkte im Endlichen hat. Wir wollen jetzt eine beliebige Funktion $f(z)$ mit der Periode ω betrachten. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, welches durch zwei Parallele zur Strecke $(0, \omega)$ aus dem Fundamentalraume der Funktion herausgeschnitten wird und höchstens auf den Seiten AB, CD Pole von $f(z)$ enthält. Das konforme Abbild dieses Bereiches in der w-Ebene ist ein Kreisring, in welchem nun die Laurentsche Entwicklung (1) für die transformierte Funktion gilt. Daher läßt sich $f(z)$ durch die Reihe (2) oder (3) im Parallelogramme darstellen. Diese Reihen konvergieren absolut für jeden auf keiner der Seiten AB, CD gelegenen Punkt des Parallelogramms, sie konvergieren andererseits gleichmäßig in jedem Teile des Parallelogramms, der nur keinen Punkt jener Seiten am Rande enthält. Dagegen läßt sich (3) im allgemeinen nicht in die beiden Reihen (4) spalten. Damit nämlich die Reihenentwicklung

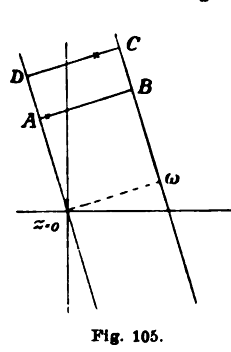


Fig. 105.

$$(5) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{\omega} z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{\omega} z$$

zu stande komme, ist notwendig und hinreichend, daß das obige Parallelogramm die Strecke $(0, \omega)$ im Innern enthalte. In der Tat

sei $z = a$ ein Punkt, wofür eine dieser Reihen konvergiert, und man setze

$$\frac{2\pi}{\omega} a = \alpha + \beta i.$$

Dann zeigt man im Anschluß an das in Kap. 3, § 4, S. 97, beim Beweise des 1. Satzes verwendete Verfahren, daß diese Reihe in allen Punkten z, wo

$$\frac{2\pi}{\omega} z = \xi + \eta i \qquad \text{und} \qquad |\eta| < |\beta|$$

ist, absolut, sowie ferner in jedem Bereiche, für dessen Punkte

$$|\eta| \leqq |\beta| - h, \qquad\qquad 0 < h < |\beta|,$$

ist, gleichmäßig konvergiert.

Zur Bestimmung der Koeffizienten multipliziert man die Gleichung (5) mit $\cos 2n\pi z/\omega$ resp. $\sin 2n\pi z/\omega$ und integriert dann etwa geradlinig zwischen zwei kongruenten Punkten des Bereichs $|\eta| < |\beta|$. Insbesondere kann man die Strecke $(0, \omega)$ zum Integrationsweg nehmen. So kommt:

$$a_n = \frac{2}{\omega}\int_0^\omega f(z) \cos n \frac{2\pi z}{\omega}\, dz, \quad (n > 0); \qquad b_n = \frac{2}{\omega}\int_0^\omega f(z) \sin n \frac{2\pi z}{\omega}\, dz,$$

$$a_0 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(z)\, dz.$$

Fassen wir diese Ergebnisse in einen Satz zusammen:

2. Satz.[1]) *Hat eine Funktion $f(z)$ eine primitive oder nicht-primitive Periode ω, so läßt sich $f(z)$ in eine Reihe von der Form entwickeln:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i}{\omega} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{\omega} z + b_n \sin n \frac{2\pi}{\omega} z\right).$$

Dabei konvergiert die Reihe absolut und stellt die Funktion dar, so lange z im Innern eines durch zwei Parallele zur Strecke $(0, \omega)$ begrenzten, keinen Pol von $f(z)$ enthaltenden Streifens liegt. Sei ferner T ein im genannten Streifen gelegener Bereich, dessen Randpunkte sämtlich um mehr als eine positive konstante Größe h vom Rande des Streifens abstehen. Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig in T.

---

1) Dieser Satz läßt auch eine ähnliche Erweiterung zu, wie der 3. Satz, indem man nur verlangt, daß $f(z)$ in einem bestimmten Streifen, dessen Ränder der Strecke ω parallel sind, analytisch sei und dort die Periode ω besitze.

Enthält der Streifen insbesondere die Strecke $(0, \omega)$, *so kann die letzte Reihe in zwei Fouriersche Reihen zerlegt werden:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{\omega} z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{\omega} z.$$

Letztere Reihen konvergieren beide absolut und gleichmäßig in jedem Parallelstreifen, dessen Ränder beide innerhalb des obigen Streifens liegen und außerdem noch vom Punkte $z = 0$ *gleich entfernt sind. Dagegen divergiert mindestens eine der Reihen in jedem Punkte, dessen Entfernung von der durch die Punkte* $z = 0$, ω *bestimmten Geraden die geringste Entfernung eines Poles der Funktion* $f(z)$ *von derselben übersteigt.*

Im übrigen kann man von den hier auftretenden Reihen zur Taylorschen Entwicklung der Funktion $f(z)$ *in einem beliebigen innern Punkte* z_0 *des Streifens dadurch übergehen, daß man die einzelnen Terme der Reihen in Potenzreihen entwickelt und darauf alle Terme mit gleichen Potenzen von* $z - z_0$ *zusammenfaßt.*

Der letzte Teil des Satzes ist eine unmittelbare Folge des Weierstraßschen Reihensatzes von Kap. 7, § 14, S. 343.

Aus den voraufgehenden Entwicklungen entspringt der Satz, daß eine reelle Funktion $f(z)$ mit einer reellen Periode ω durch eine Fouriersche Reihe (3) oder (5) dargestellt werden kann, vorausgesetzt nur, daß $f(z)$ in jedem reellen Punkte $x = x_0$ nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelt werden kann. In der Tat wird dann die Länge des wahren Konvergenzintervalls für die Potenzreihenentwicklung der Funktion im Punkte x_0 eine positive untere Grenze K haben, wenn diesem Punkte alle reellen in einem Intervalle $a \leqq x \leqq a + \omega$ gelegenen, und demgemäß auch alle reellen Werte anzunehmen gestattet wird. Demgemäß läßt sich eine komplexe Funktion $f(z)$ auf Grund jener Potenzreihenentwicklungen in denjenigen Punkten $z = x + yi$ der Ebene, wofür

$$|y| < K$$

ist, derart definieren, daß sich $f(z)$ im genannten Bereiche analytisch verhält und überdies längs der reellen Achse mit $f(x)$ übereinstimmt. Fernerhin wird $f(z)$ die Periode ω zulassen; denn die beiden im bewußten Bereiche analytischen Funktionen $f(z)$, $f(z + \omega)$ stimmen ja längs der reellen Achse miteinander überein. Hiermit wird die Funktion $f(z)$ der obigen Behandlungsweise zugänglich, selbst dann, wenn

sie am Rande und außerhalb des Streifens andere Singularitäten als Pole besitzt, — was ja auch im allgemeinen eintreten wird, — woraus dann die Richtigkeit des in Rede stehenden Satzes erhellt. Wir können also sagen:

3. Satz. *Jede reelle Funktion $f(x)$ der reellen Variabelen x, welche sich für jeden Wert von x nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickeln läßt und außerdem noch eine reelle Periode ω hat, kann durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{\omega} x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{\omega} x.$$

Hier konvergiert die Reihe gleichmäßig für alle Werte von x und läßt sich überdies beliebig oft gliedweise differentiieren, wobei auch die abgeleiteten Reihen für alle Werte von x gleichmäßig konvergieren.

Fahren wir jetzt fort, indem wir weitere Sätze betreffend Funktionen, wie sie nach der Vereinbarung von § 1 hier betrachtet werden, aussprechen.

4. Satz. *Hat die einfach periodische Funktion $f(z)$ keinen wesentlichen singulären Punkt im Fundamentalraume und ist $f(z)$ keine Konstante, so nimmt $f(z)$ jeden Wert gerade so oft dort an, wie die Anzahl der Pole anzeigt.*

5. Satz. *Haben zwei einfach periodische Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ eine gemeinsame Periode ω und hat ferner keine der Funktionen eine wesentliche singuläre Stelle in ihrem Fundamentalstreifen, so werden sie durch eine algebraische Gleichung miteinander verknüpft:*

$$G[f_1(z), f_2(z)] = 0,$$

wobei G ein irreduzibeles Polynom bedeutet und die algebraische Kurve $G(W, Z) = 0$ im übrigen vom Geschlechte 0 ist.

1. Zusatz. *Hat insbesondere die Funktion $f_2(z)$ nur einen Pol erster Ordnung in dem der Periode ω entsprechenden Periodenstreifen, so ist dieser Streifen für sie ein primitiver, und $f_1(z)$ läßt sich außerdem rational durch $f_2(z)$ darstellen.*

2. Zusatz. *Jede einfach periodische Funktion $f(z)$, die keine wesentliche singuläre Stelle im Fundamentalraume hat, genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher z nicht*

explizite vorkommt:

$$G[f'(z),\ f(z)] = 0.$$

Dabei ist die algebraische Kurve $G(W, Z)$ *vom Geschlechte* 0.

6. Satz. *Hat die einfach periodische Funktion* $f(z)$ *keine wesentliche singuläre Stelle im Periodenstreifen, so sind die drei Funktionen*

$$f(z_1), \quad f(z_2), \quad f(z_1 + z_2),$$

wo z_1, z_2 *zwei unabhängige Variabelen bedeuten, durch eine algebraische Gleichung verknüpft, deren Koeffizienten von* z_1, z_2 *nicht abhängen:*

$$G[f(z_1),\ f(z_2),\ f(z_1 + z_2)] = 0.$$

Man sagt: die Funktion $f(z)$ besitze ein *algebraisches Additionstheorem.*

Der Beweis dieser Sätze erfolgt durch die Darstellung der jeweils auftretenden Funktionen mittels rationaler Funktionen von $w = e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$, unter Heranziehung des Satzes, daß eine rationale Kurve (d. h. eine Kurve, deren Koordinaten sich beide rational durch einen Parameter darstellen lassen) stets vom Geschlechte Null ist, und umgekehrt. Nur beim 1. Zusatze brauchen wir vielleicht noch etwas näher auf den Beweis einzugehen. Wäre da $G[W, Z]$ vom Grade $n > 1$ in W, so würden ein und demselben Werte von Z, und somit auch von z verschiedene Werte W entsprechen, was eben gegen die Voraussetzung verstößt, daß $f_1(z)$ eindeutig ist.

Aufgabe. Man zeige, daß weder ein Polynom noch eine rationale Funktion, welche keine Konstante ist, periodisch sein kann.

§ 4. Direkte Behandlung der einfach periodischen Funktionen.

Die Sätze des vorhergehenden Paragraphen lassen sich auch direkt auf dem Substrat des Periodenstreifens, also ohne Benutzung einer Abbildung dieses Streifens herleiten. Zu dem Zwecke stellen wir den folgenden Satz an die Spitze:

Satz. *Sei* $f(z)$ *eine einfach periodische Funktion, die im Fundamentalraume nur eine endliche Anzahl von Polen hat und überdies in jedem Endpunkte desselben endlich bleibt oder aber unendlich wird. Dann läßt sich* $f(z)$ *rational durch*

$$w = e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$$

ausdrücken.

Wir wollen zunächst annehmen, daß $f(z)$ in beiden Endpunkten des Periodenstreifens endlich bleibt. Dann hat $f(z)$ notwendig einen Pol, sofern sich diese Funktion nicht gerade auf eine Konstante reduziert. In der Umgebung eines Poles läßt sich ferner $f(z)$ durch die Formel:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega} z} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} a}\right)^k} + \varphi(z),$$

darstellen, wobei sich $\varphi(z)$ im Punkte a analytisch verhält. In der Tat überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, daß zunächst A_m so bestimmt werden kann, daß die Differenz

$$f(z) - \frac{A_m}{\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega} z} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} a}\right)^m}$$

höchstens einen Pol $(m-1)$-ter Ordnung in a hat. Verfährt man dann mit letzterer Funktion wieder ebenso, wie vorhin mit $f(z)$, und wiederholt man den Schritt genügend oft, so gelangt man schließlich zu der in Aussicht gestellten Darstellung. Im übrigen machen wir noch darauf aufmerksam, daß obige Summe in beiden Endpunkten des Periodenstreifens endlich bleibt, sowie ferner, daß sie die Periode ω zuläßt.

Um nunmehr den Hauptsatz zu begründen, bilde man die bewußte Summe für jeden im Fundamentalraume belegenen Pol von $f(z)$ und ziehe dann die Summe aller dieser Funktionen von $f(z)$ ab. Hierdurch erwächst eine Funktion, welche in der ganzen erweiterten z-Ebene, sofern sie noch in den Polen von $f(z)$ passend definiert wird, analytisch ist. Darum ist sie eine Konstante, womit denn der Beweis des Satzes unter der genannten Einschränkung erbracht ist.

Wird $f(z)$ dagegen in einem oder auch in beiden Endpunkten des Periodenstreifens unendlich, so braucht man nur eine Funktion

$$F(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}$$

einzuführen, welche bei geeigneter Wahl der Koeffizienten $\alpha, \dots \delta$ dort endlich bleibt. Alsdann läßt sich $F(z)$ nach dem Vorhergehenden rational durch $e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$ ausdrücken, und daher gilt der Satz allgemein. In einem Endpunkte des Streifens, in welchem $f(z)$ endlich bleibt, nähert sich $f(z)$ übrigens einem Grenzwerte.

Aus diesem Satze ergeben sich alle Sätze von § 3 mit Ausnahme der Reihensätze, zu denen wir uns zuletzt noch wenden.

Die Reihenentwicklung. Sei z ein Punkt des Fundamentalraums, in welchem $f(z)$ sich analytisch verhält, und man umgebe z mit einem Bereiche S, der weder im Innern noch am Rande C einen Pol von $f(z)$ enthält. Sollte z gerade am Rande des Periodenstreifens liegen, so kann man einen neuen Streifen einführen, derart, daß z nun im Innern desselben liegt. Jetzt kann man der Cauchyschen Integralformel folgende Gestalt geben:

$$f(z) = \frac{1}{\omega} \int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(t-z)} - 1},$$

wobei also der Integrand sowohl in bezug auf t als auf z die Periode ω zuläßt. In der Tat hat der Integrand bloß einen einzigen Pol in S, nämlich im Punkte $t = z$, und zwar hat das Residuum dort, wie man sofort nachrechnet, den Wert $\omega f(z)/2\pi i$.

Um nun die Reihenentwicklung aus diesem Integrale herzuleiten, fasse man das Parallelogramm $ABCD$, § 3, ins Auge, wobei jetzt auch die Seiten AB und CD singularitätenfrei sein sollen. Erstreckt man das Integral über den Rand dieses Bereiches, so heben sich die von den Seiten BC, DA herrührenden Bestandteile gegenseitig auf. Für die eine der übrigen Seiten wird man dann die Funktion

$$\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(t-z)} - 1}$$

nach aufsteigenden, für die andere nach absteigenden Potenzen von $e^{\frac{2\pi i}{\omega}(t-z)}$ entwickeln, man vergleiche die im vorigen Paragraphen verwendeten Abschätzungen für $|\sin\zeta|$, $|\cos\zeta|$. Jetzt bleibt nur noch übrig, die daraus entspringende Reihenentwicklung des Integranden gliedweise zu integrieren.

Wir bemerken noch, daß wir es bei der voraufgehenden Untersuchung nicht nötig hatten, den Periodenstreifen überhaupt zu verlassen, indem wir uns des Theorems von § 8 bedienen.

§ 5. Doppeltperiodische Funktionen.

Sei $f(z)$ eine doppeltperiodische Funktion, die keine anderen Singularitäten im Endlichen als Pole hat, und seien ω, ω' ein primi-

tives Periodenpaar derselben.[1]) Dementsprechend teile man die Ebene in ein Periodenparallelogrammnetz ein, wie in § 1 des näheren auseinandergesetzt wurde. Dann nimmt die Funktion $f(z)$ den ganzen Vorrat ihrer Werte bereits in einem dieser Parallelogramme gerade einmal an, welches damit zu einem Fundamentalbereiche der Funktion wird.

1. Satz. *Hat $f(z)$ keinen Pol im Periodenparallelogramm, so ist $f(z)$ eine Konstante.*

Denn $f(z)$ verhält sich dann in der ganzen eigentlichen Ebene analytisch und bleibt endlich im Punkte $z = \infty$.[2])

Weitere Eigenschaften der Funktion $f(z)$ werden durch die Methode des Herumintegrierens erschlossen. Vor allem machen wir darauf aufmerksam, daß die genaue Lage des Periodennetzes belanglos ist, dasselbe kann offenbar einer beliebigen Parallelverschiebung unterworfen werden, ohne seiner Grundeigenschaft bezüglich der Periodizität von $f(z)$ verlustig zu gehen. Auch brauchen die Seiten nicht einmal geradlinig angenommen zu werden, nur müssen je zwei gegenüberliegende Seiten einander kongruent sein, und der Rand darf sich auch nicht überschneiden.

Fundamentalsatz. *Das Integral*

$$\int f(z)\, dz,$$

längs des Randes eines Periodenparallelogramms hinerstreckt, hat den Wert null.

In der Tat wird der Beitrag von der Seite des Parallelogramms:

$$z = z_0 + \omega t, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

den Wert

$$\omega \int_0^1 f(z_0 + \omega t)\, dt$$

haben, während die gegenüberliegende Seite:

$$z = z_0 + \omega' + \omega t, \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

---

1) Solche Funktionen werden auch wohl *elliptische Funktionen* genannt. Im übrigen rühren die folgenden Entwicklungen zum großen Teile von Liouville her; Vorlesung vom Jahre 1847, herausgegeben von Borchardt, *Journal für Mathematik*, 88 (1879), S. 277; Liouville, *Comptes Rendus* 32 (1851), S. 450.

2) Diesen Satz haben wir sowohl wegen seiner Wichtigkeit als auch wegen der Einfachheit seines Beweises an die Spitze gestellt. Er ist indessen im 4. Satze enthalten, darum wird der systematischen Entwicklung unseres Gegenstandes, welche doch alles aus dem Fundamentalsatze herleiten will, kein Abbruch getan.

den Beitrag

$$\omega \int_1^0 f(z_0 + \omega' + \omega t)\, dt$$

liefert. Wegen der Periodizität der Funktion $f(z)$ ist nun

$$f(z_0 + \omega' + \omega t) = f(z_0 + \omega t),$$

und darum heben sich die beiden Integrale gegenseitig auf. Ähnliches gilt auch für die beiden anderen Seiten. — Sollte insbesondere ein Pol gerade am Rande liegen, so wird man das Parallelogrammnetz vorab durch ein anderes ersetzen, wofür dies nicht zutrifft.

Aus dem Fundamentalsatze geht eine Reihe von Sätzen über doppeltperiodische Funktionen hervor, womit wir uns jetzt beschäftigen wollen.

2. Satz. *Die Summe der Residuen von $f(z)$ im Periodenparallelogramm ist gleich null.*

Diese Summe ist gleich dem Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\, dz,$$

erstreckt über den Rand des Parallelogramms, sofern $f(z)$ keinen Pol auf dem Rande des Parallelogramms hat, und verschwindet also nach dem Fundamentalsatze.

Im Ausnahmefalle wird man das Parallogramm zunächst durch ein benachbartes ersetzen, welches keinen Pol auf seinem Rande enthält. Dann gilt der Satz für das neue Parallelogramm. Soll dies nun auch für das alte zutreffen, so wird man zuerst festsetzen müssen, daß etwa die Punkte (vgl. Fig. 106)

$$z_0 + \omega + \omega' t, \qquad 0 < t \leqq 1;$$
$$z_0 + \omega' + \omega t, \qquad 0 < t < 1,$$

zum Parallelogramm gerechnet werden, während die übrigen Punkte des Randes es nicht werden. Alsdann gilt der Satz ausnahmslos für alle Fälle.

Letztere Vereinbarung bezüglich der Randpunkte des Parallelogramms soll übrigens fortan festgehalten werden.

Aus diesem Satze ergeben sich nun weiter die folgenden Sätze.

3. Satz. *Hat die Funktion $f(z)$ höchstens einen Pol erster Ordnung im Periodenparallelogramm, so ist $f(z)$ eine Konstante.*

Hier läßt sich $f(z)$ in der Form schreiben:

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ im ganzen Parallelogramm analytisch ist und am Rande desselben stetig bleibt. Die Summe der Residuen beträgt also bloß A. Darum verschwindet A, und $f(z)$ erweist sich somit als ausnahmslos analytisch im Parallelogramme, folglich ist $f(z)$ eine Konstante.

4. Satz. *Die Funktion $f(z)$ nimmt jeden Wert gleich oft im Parallelogramm an, sofern $f(z)$ keine Konstante ist, und zwar m mal, wo m die Gesamtzahl der Pole ist.*

Daß $f(z)$ zunächst gerade so viele Nullpunkte als Pole im Periodenparallelogramm aufweist, erkennt man aus dem 3. Satze von Kap. 7, § 11; denn die Funktion $f'(z)/f(z)$ ist im vorliegenden Fall doppeltperiodisch, und darum verschwindet das Integral derselben, über den Rand des Periodenparallelogramms erstreckt. Bildet man jetzt die Funktion

$$F(z) = f(z) - C,$$

und wendet man das soeben erhaltene Resultat darauf an, so ergibt sich allgemein der Beweis des Satzes.

5. Satz. *Liegen die Nullpunkte und die Pole der Funktion $f(z)$ in den Punkten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ bzw. $\beta_1, \ldots \beta_n$ des Periodenparallelogramms, so ist*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}.$$

Der Satz ist schon deshalb bemerkenswert, weil er eine für die doppeltperiodischen Funktionen bestehende Bedingung enthält, wofür bei den einfach periodischen Funktionen, sowie früher auch bei den rationalen Funktionen kein Vorbild existiert. Wir durften nämlich bei der Bildung einer rationalen, sowie einer einfach periodischen, keine wesentliche singuläre Stelle im Periodenstreifen aufweisenden Funktion, die Nullpunkte und die Pole anlegen, wo es uns beliebte, vorausgesetzt nur, daß die Gesamtzahl beider die nämliche war. Jetzt wird dieser Willkür eine Einschränkung auferlegt. Wir dürfen höchstens $2n-1$ von diesen $2n$ Punkten beliebig annehmen, der letzte wird dann durch die anderen mit bestimmt.

Zum Beweise braucht man bloß die Summe der Residuen der Funktion

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

im Periodenparallelogramm zu berechnen. In einem Nullpunkte oder Pole hat das Residuum den Wert α_i bzw. $-\beta_i$. Die Summe der Residuen für das ganze Periodenparallelogramm bildet also die linke Seite der zu beweisenden Kongruenz. Andererseits wird man das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z f'(z)\,dz}{f(z)}$$

über den ganzen Rand des Parallelogramms erstrecken. Wie eine kurze Rechnung zeigt, liefern die Seiten

$$z_0+\omega t, \qquad 0\leqq t\leqq 1,$$
$$z_0+\omega'+\omega t, \qquad 0\leqq t\leqq 1,$$

zusammengenommen den Beitrag:

$$-\frac{\omega}{2\pi i}\int_0^1\frac{\omega' f'(z_0+\omega t)}{f(z_0+\omega t)}\,dt=-\frac{\omega'}{2\pi i}\log f(z_0+\omega t)\Big|_0^1=m'\omega',$$

wo m' eine ganze Zahl ist. Ebenso ergeben die beiden anderen Seiten den Wert $m\omega$, womit dann der Satz bewiesen ist.

Zusatz. *Nimmt $f(z)$ einen beliebigen Wert C in den Punkten $\gamma_1, \dots \gamma_n$ des Parallelogramms an und ist $f(z)$ keine Konstante, so ist*

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\equiv 0 \quad (\text{mod. } \omega,\ \omega').$$

6. Satz. *Haben die Funktionen $f(z)$, $\varphi(z)$ ein gemeinsames Periodenparallelogramm, so sind dieselben durch eine irreduzibele algebraische Gleichung miteinander verknüpft:*

$$G[\varphi(z),\ f(z)]=0.$$

Indem wir vom trivialen Falle $\varphi(z)$, $f(z)=\text{const.}$ absehen, und nun

(1) $$W=\varphi(z), \qquad Z=f(z),$$

setzen, entsprechen einem willkürlichen Werte von Z im allgemeinen n verschiedene Punkte des Periodenparallelogramms. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn $f'(z)$ verschwindet. Wir wollen die im Parallelogramm belegenen Wurzeln letzterer Funktion:

$$f'(z)=0, \qquad z=a_1, \dots a_k,$$

sowie die entsprechenden Punkte der Z-Ebene:

$$Z=A_i=f(a_i), \qquad i=1,\dots k,$$

aufzeichnen. Im übrigen seien $z = b_1, \ldots b_l$ die im Parallelogramm befindlichen Pole von $f(z)$ und $\varphi(z)$, und man markiere noch die Punkte

$$Z = B_i = f(b_i), \qquad i = 1, \ldots l.$$

Jetzt knüpfen wir an den 1. Satz von Kap. 8, § 15 an, indem wir konstatieren, a) daß jedem Werte Z' von Z mit Ausnahme von A_i, B_j n Werte von W entsprechen[1]); b) daß in der Nähe von Z' diese n Funktionswerte zu n, je im Punkte Z' analytischen Funktionen zusammengefaßt werden können, wodurch dann auch der ganze Vorrat von W-Werten gerade erschöpft wird; c) daß die Ausnahmepunkte A_i, B_j höchstens Verzweigungspunkte und Pole bilden, wobei ferner die Funktion in ersteren entweder endlich bleibt oder aber unendlich wird; und endlich d) daß sich jeder Zweig der Funktion W in jeden anderen durch analytische Fortsetzung überführen läßt.

Der Beweis von a) ist bereits erbracht. Um b) darzutun, beachten wir, daß dem Punkte Z' n getrennte Punkte des Periodenparallelogramms entsprechen, in deren jedem $f'(z) \neq 0$ ist; darum wird die Umgebung eines jeden derselben ein-eindeutig und konform auf die Umgebung von Z' bezogen, wo sich dann W seinerseits, als Funktion von Z betrachtet, analytisch verhält. Des weiteren folgt c) daraus, daß in der Umgebung eines Ausnahmepunktes die Wertepaare (W, Z) auf Grund der Beziehungen (1) durch eine oder mehrere Parameterdarstellungen von der Art, wie sie in Kap. 8, § 14 betrachtet wurden, je gerade einmal zum Ausdruck gelangen. Was endlich d) anbetrifft, so sei Z_1 ein innerer Punkt des Bereichs, in welchem der eine Zweig definiert ist, und sei z_1 eine Wurzel der Gleichung $Z_1 = f(z)$. Ebenso mögen Z_2, z_2 in Bezug auf den anderen Zweig genommen werden. Dann kann man z_1 und z_2 mittels einer solchen, durch keinen der Punkte a_i, b_j gehenden Kurve miteinander verbinden, welche der Variabelen Z vermöge (1) einen Weg in der Z-Ebene anweist, derart, daß der eine jener Zweige in den anderen derselben längs dieses Weges analytisch fortgesetzt werden kann.

Hiermit ist der Beweis im allgemeinen Falle fertig. Das Polynom $G(W, Z)$ steigt bis zum Grade n in W an. Im besonderen können jedoch mehrere Bestimmungen von W in allen Punkten Z miteinander zusammenfallen, wie das Beispiel $\varphi(z) = f(z)$ zeigt. Sei

1) Im allgemeinen werden diese Werte für einen nicht speziellisierten Wert von Z' voneinander verschieden sein. Beschränken wir uns also vorläufig auf diesen Fall, um die nötige Ergänzung dann am Schlusse des Beweisès zu erbringen.

also $Z_0 + A_i, B_j$ ein beliebiger Wert von Z, und seien

$$W_1 = F_1(Z), \ldots, W_n = F_n(Z)$$

die n Bestimmungen von W, welche in der Nähe von Z_0 aus (1) entspringen. Dann fallen diese Funktionen zu je k zusammen, und man überzeugt sich mit leichter Mühe, daß, wenn man nur eine Funktion aus jedem Systeme beibehält, ein irreduzibeles algebraisches Gebilde, $G(W, Z) = 0$, sich ergibt, wobei dann W bis zum Grade $m = n/k$ ansteigt.

Zusatz. *Jede doppeltperiodische Funktion $f(z)$ genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die unabhängige Variabele nicht explizite vorkommt:*

$$G[f'(z), f(z)] = 0.$$

Hierbei hat das algebraische Gebilde $G[W, Z] = 0$, sofern sich die Funktion $f(z)$ nicht auf eine Konstante reduziert, das Geschlecht 1.

Briot und Bouquet[1]) haben die ganze Klasse von algebraischen Differentialgleichungen:

$$G\left[\frac{dw}{dz}, w\right] = 0$$

auf die Existenz eines eindeutigen Integrals $w = f(z)$ hin untersucht. Es hat sich dabei ergeben, daß im Falle $p = 0$, wo p das Geschlecht des algebraischen Gebildes $G[W, Z] = 0$ bedeutet, die Funktion $f(z)$ entweder eine rationale Funktion von z oder aber eine rationale Funktion von e^{az} sein muß. Ist dagegen $p = 1$, so muß $f(z)$ eine doppeltperiodische Funktion von z sein. Darnach ist das Geschlecht des im Zusatze auftretenden algebraischen Gebildes $G[W, Z] = 0$ notwendig gleich 1, sofern sich $f(z)$ nicht auf eine Konstante reduziert.

Aufgabe. Man beweise folgende Sätze:

a) Haben die doppeltperiodischen Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ gleiche Perioden und stimmen ihre Hauptteile in jedem im Periodenparallelogramm belegenen Pole miteinander überein, so ist

$$\varphi(z) = f(z) + \text{Konst.}$$

b) Haben die doppeltperiodischen Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ gleiche Perioden und fallen die Nullpunkte und Pole der einen Funk-

1) *Théorie des fonctions elliptiques*, 2. Aufl., 1875, livre V.

tion, jeden auch seiner Multiplizität nach gerechnet, bzw. mit den Nullpunkten und Polen der anderen Funktion zusammen, so ist

$$\varphi(z) = C f(z).$$

c) Hat $f(z)$ nur zwei Pole erster Ordnung in einem Periodenparallelogramm, so müssen die entsprechenden Perioden ein primitives Periodenpaar bilden.

d) Haben die doppeltperiodischen Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ nur zwei Pole erster Ordnung im Periodenparallelogramm und fällt außerdem jeder Pol der einen Funktion mit einem Pole der anderen Funktion zusammen, so ist

$$\varphi(z) = C f(z) + C'.$$

§ 6. Über doppeltperiodische Funktionen zweiter Ordnung.

Unter der *Ordnung* einer doppeltperiodischen Funktion versteht man die Gesamtzahl der im Periodenparallelogramm belegenen Pole. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist eine doppeltperiodische Funktion, welche keine Pole besitzt, eine Konstante, und eine erster Ordnung gibt es nicht. Einer zweiter Ordnung sind wir dagegen bereits einmal begegnet, und zwar war das die zum elliptischen Integrale

$$z = \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

inverse Funktion (vgl. Kap. 9, § 6)

$$w = \sin \operatorname{am} z = \operatorname{sn} z.$$

Daß es nun allgemein zu jedem beliebigen Periodenparallelogramm doppeltperiodische Funktionen sowohl mit zwei einfachen getrennten Polen als auch mit einem einzigen Pole zweiter Ordnung gibt, wird im nachfolgenden Kapitel gezeigt.

Sei also $f(z)$ eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung mit getrennten, in den Punkten β_1, β_2 des Periodenparallelogramms gelegenen Polen. Der Vereinbarung bezüglich der Zugehörigkeit der Randpunkte gemäß wird dann

Fig. 106.

$$\beta_1 = \beta_2 + \theta\omega + \theta'\omega'$$

sein, wobei $-1 < \theta < 1$, und ebenfalls $-1 < \theta' < 1$ ist. Indem wir den Mittelpunkt der Strecke (β_1, β_2) mit c bezeichnen:

$$c = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

verlegen wir den Anfang in diesen Punkt:

$$z' = z - c.$$

Dann wird

$$\beta'_1 = \beta_1 - c = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = \frac{\theta}{2}\,\omega + \frac{\theta'}{2}\,\omega',$$

$$\beta'_2 = \beta_2 - c = \frac{-\beta_1 + \beta_2}{2} = -\beta'_1$$

sein. Ferner soll das Periodenparallelogramm durch ein neues ersetzt werden, dessen Mittelpunkt im Punkte $z' = 0$ liegt. Dann liegen beide Pole β'_1, β'_2 wirklich innerhalb des Parallelogramms. Von jetzt ab wollen wir die Striche fortlassen, also die transformierte Funktion schlechtweg mit $f(z)$, deren Pole mit β_1, β_2 bezeichnen.

Nach dem 5. Satze von § 5 hat man nun, da

$$\beta_1 + \beta_2 = 0$$

ist, die Relation:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$$

und zwar wird stets $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ sein, sofern nicht gerade einer und daher auch beide der Nullpunkte α auf dem Rande des Parallelogramms liegen. Ferner wird noch die Summe der beiden Punkte, in denen $f(z)$ einen beliebigen Wert annimmt, im allgemeinen gleich 0 sein, § 5, Zusatz des 5. Satzes. Nun heißt das aber geometrisch nichts anderes, als daß die Punkte des Parallelogramms, in welchen $f(z)$ den Wert C annimmt, sofern sich dieselben innerhalb des Parallelogramms befinden, inbezug auf den Mittelpunkt $z = 0$ desselben symmetrisch liegen. Demgemäß ist allgemein

$$f(z) = f(-z),$$

d. h. $f(z)$ ist eine gerade Funktion. Da die Ableitung einer geraden Funktion ungerade ist, so hat man ferner:

$$f'(z) = -f'(-z).$$

Im übrigen hat $f'(z)$ einen Pol zweiter Ordnung in jedem der Punkte β_1, β_2, und zwar fehlt der lineare Term im Hauptteil desselben, d. h.

das Residuum verschwindet dort; sonst verhält sich $f'(z)$ analytisch im Periodenparallelogramm. Hiermit erweist sich $f'(z)$ als von der vierten Ordnung.

Auf Grund dieser Relationen lassen sich auch die Nullpunkte von $f'(z)$ leicht bestimmen. Im Punkte $z = 0$ verhält sich $f'(z)$ analytisch, und da überdies

$$f'(0) = -f'(0)$$

ist, so ist $z = 0$ eine Wurzel von $f'(z)$. Des weiteren verhält sich $f'(z)$ im Randpunkte $z = \frac{1}{2}\omega$ analytisch, und da nun

$$f'(\tfrac{1}{2}\omega) = -f'(-\tfrac{1}{2}\omega) = -f'(\omega - \tfrac{1}{2}\omega) = -f'(\tfrac{1}{2}\omega)$$

ist, so folgt, daß $z = \frac{1}{2}\omega$ eine zweite Wurzel von $f'(z)$ ist. In ähnlicher Weise findet man, daß $f'(z)$ in $z = \frac{1}{2}\omega', \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega'$ verschwindet. Hiermit sind alle vier Wurzeln von $f'(z)$ ermittelt.

Jetzt wollen wir die Form der Differentialgleichung für $f(z)$:

$$G[f'(z), f(z)] = 0$$

erforschen. Setzt man

$$Z = f(z), \quad W = f'(z),$$

so kann man ohne weiteres folgende Schlüsse ziehen:

a) jedem Werte von Z entsprechen zwei im allgemeinen getrennte Werte von W;

b) diese beiden Werte von W sind einander entgegengesetzt gleich;

c) jedem Werte von W entsprechen höchstens vier getrennte Werte von Z;

d) W und Z werden gleichzeitig unendlich.

Aus a) und c) geht hervor, daß

$$G[W, Z] = A_0(Z)\,W^2 + A_1(Z)\,W + A_2(Z)$$

ist, wobei A_i ein Polynom höchstens vom vierten Grade in Z ist. Wegen a) verschwindet $A_0(z)$ nicht identisch, und wegen d) reduziert sich $A_0(Z)$ auf eine Konstante. Ferner verschwindet $A_1(z)$ wegen b) identisch. Nun weiß man aber bereits die Werte von z, wofür $f'(z)$ verschwindet. Für diese hat Z die Werte:

$$Z_0 = f(0), \quad Z_1 = f\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad Z_2 = f\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right), \quad Z_3 = f\left(\frac{\omega'}{2}\right);$$

außerdem nimmt $f(z)$ den gleichen Wert in zwei von diesen Punkten niemals an, da $f(z)$ in jedem derselben den jeweiligen Wert bereits

zweimal annimmt. Daher muß A_2 wirklich vom vierten Grade sein, und wir finden nunmehr:

$$[f'(z)]^2 = C\left[f(z)-f(0)\right]\left[f(z)-f\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]\left[f(z)-f\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\right]\left[f(z)-f\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right].$$

Die Funktion $f(z)$ ist nichts anders als die zum elliptischen Integrale

$$z = \int_{z_0}^{Z} \frac{dZ}{\sqrt{C(Z-Z_0)(Z-Z_1)(Z-Z_2)(Z-Z_3)}}$$

inverse Funktion $Z(z)$:

$$Z = f(z).$$

Durch eine geeignete lineare Transformation von Z läßt sich dieses Integral noch auf die Jacobische Normalform:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

bringen. Es wird nämlich in der Theorie der binären Formen gezeigt, daß zwei beliebige binäre quadratische Formen, deren vier Wurzeln alle getrennt liegen, zu einer quadratischen Form Anlaß geben, deren beide Wurzeln die Wurzeln der einen, sowie diejenigen der anderen vorgelegten Formen harmonisch teilen. Faßt man daher die vier Punkte $Z_0, \ldots Z_3$ zu Paaren zusammen und sucht man dann das entsprechende Punktepaar, so braucht man letztere Punkte nur noch durch eine geeignete lineare Transformation in die Punkte $\zeta = 0, \infty$ überzuführen, um jene Normalform des Integrals zu erzielen.

In ähnlicher Weise verfährt man auch mit denjenigen Funktionen zweiter Ordnung, die bloß einen einzigen Pol haben. Da ergibt sich, daß eine solche Funktion ebenfalls einer Differentialgleichung von der Form genügt:

$$[f'(z)]^2 = G(z),$$

wobei aber jetzt G ein Polynom dritten Grades mit getrennten linearen Faktoren bedeutet. In beiden Fällen hat die der algebraischen Gleichung $G[W, Z] = 0$ entsprechende Riemannsche Fläche zwei Blätter, welche in vier Verzweigungspunkten zusammenhängen. Im übrigen läßt sich die eine Form der Gleichung ein-eindeutig in die andere transformieren, da beide ja auf die Normalform

$$\eta^2 = (1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)$$

gebracht werden können.

Konforme Abbildung des Periodenparallelogramms auf eine zweiblättrige Fläche. Durch die Funktion

$$Z = f(z)$$

wird das Periodenparallelogramm, wie wir jetzt beweisen wollen, ein-eindeutig und im allgemeinen konform auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Verzweigungspunkten abgebildet. Dabei geht der Rand des Parallelogramms in eine geschlossene, die Fläche nicht zerstückelnde Kurve mit einem Doppelpunkte über. Wir wollen uns wieder auf Funktionen $f(z)$ mit zwei getrennten Polen beschränken und im übrigen alle die früheren Festsetzungen bezüglich derselben noch beibehalten.

Indem wir an den Abbildungssatz von Kap. 8, § 5 anknüpfen, zerlegen wir das Periodenparallelogramm vorab in vier ähnliche Parallelogramme und beginnen mit einem davon, dem Bereich I, welcher

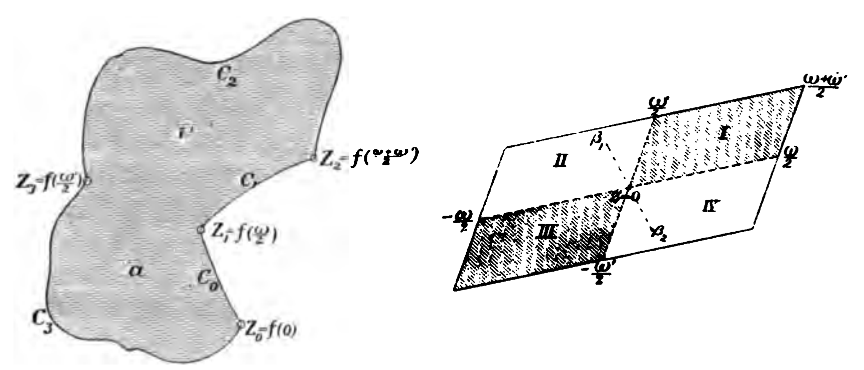


Fig. 107.

keinen Pol enthalten möge. Im anderen Falle wird man vom Bereiche II ausgehen; sollte endlich ein Pol auf der punktierten Begrenzung von I liegen, so braucht man nur den Rand des Periodenparallelogramms in geeigneter Weise zu verbiegen. Da $f(z)$ gerade ist, so nimmt diese Funktion jeden ihr in I zukommenden Wert zum zweiten Male im Bereiche III an. Hieraus folgt nun insbesondere, daß sie den nämlichen Wert in zwei getrennten Randpunkten von I niemals annimmt. Wir sehen also, daß die Funktion $Z = f(z)$ allen Anforderungen jenes Abbildungssatzes im Bereiche I genügt, und darum bildet sie diesen Bereich ein-eindeutig und konform auf ein endliches Stück I' der Z-Ebene ab. Dabei besteht der Rand von I' aus einer regulären Kurve, C, welche in den vier Punkten:

$$Z_0 = f(0), \quad Z_1 = f\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad Z_2 = f\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right), \quad Z_3 = f\left(\frac{\omega'}{2}\right)$$

Ecken aufweist, deren Winkelöffnungen gerade doppelt so groß sind, wie die entsprechenden Winkel im Parallelogramm.

Im Bereiche *II* hat $f(z)$ dagegen einen Pol, die Funktion genügt aber dort allen den Bedingungen des erweiterten Satzes von Kap. 8, § 5, und demnach bildet sie den Bereich *II* auf das Äußere *II'* des Bereiches *I'* in der Z-Ebene konform ab. Fügt man noch die Bereiche *I'* und *II'* längs des der Strecke $(0, \frac{1}{2}\omega)$ der z-Ebene entsprechenden Bogens C_3 zusammen, so erhält man als Abbild des Gesamtbereiches *I, II* die längs des übrigen Bogens von C aufgeschnittene erweiterte Z-Ebene.

Unter Benutzung des Umstandes, daß $f(z)$ gerade ist: $f(z) = f(-z)$, findet man ferner, daß der Gesamtbereich *III, IV* auf ein gleiches zweites Blatt der Z-Ebene abgebildet wird. Demgemäß ergibt sich als endgültige Abbildung des Periodenparallelogramms die aus diesen beiden Blättern bestehende Riemannsche Fläche, wobei der Bogen C_0 als Verzweigungsschnitt dient, während die weiteren Bogen C_1, C_2 bzw. den beiden Paaren gegenüberliegender Seiten des Parallelogramms entsprechen.

Der Leser wolle sich ein Modell dieser zweiblättrigen aufgeschnittenen Fläche nach der Anweisung von Kap. 8, § 4, Fig. 83 verfertigen. Er wird dann sofort erkennen, wie sich die Riemannsche Fläche für den Gesamtverlauf der zu $Z = f(z)$ inversen Funktion $z(Z)$ zusammensetzt, indem nämlich, der Angliederung eines neuen Parallelogramms der z-Ebene entsprechend, ein weiteres derartiges zweiblättriges Flächenstück an den bereits vorhandenen Komplex angehängt und längs eines Teiles des Randes mit diesem verschmolzen wird; hierüber vergleiche man noch die in §§ 8, 9 des 8. Kapitels besprochenen transzendenten Riemannschen Flächen.

Anderseits vermag man aus derselben zweiblättrigen Fläche, welche soeben modelliert ist, eine geschlossene zweiblättrige Fläche herzustellen, welche als Riemannsche Fläche für das obige algebraische Gebilde:

$$W^2 = C(Z - Z_0)(Z - Z_1)(Z - Z_2)(Z - Z_3) \tag{1}$$

dienen kann. In der Tat nimmt $f(z)$ gleiche Werte in einander gegenüberliegenden Randpunkten z und $z + \omega$ resp. z und $z + \omega'$ des Parallelogramms an, daher wird man jedes der beiden Blätter längs des Bogens C_1 zu einem unversehrten Blatte ergänzen können, da-

gegen gehen die Blätter längs C_2 ineinander über. Hiernach hängen also die beiden Blätter längs zwei Verzweigungsschnitte miteinander zusammen, und zwar liegen letztere über den beiden Bogen C_0 und C_2.

Auf der soeben erhaltenen zweiblättrigen Fläche verläuft W, als Funktion von Z betrachtet, eindeutig und besitzt dort außerdem keine anderen Singularitäten als Pole. Diese Fläche vermag darum als eine Riemannsche Fläche für das algebraische Gebilde (1) zu dienen. Andererseits hat man durch die Funktion $f(z)$ und deren Ableitung eine Uniformisierung dieses Gebildes erhalten:

$$Z = f(z), \quad W = f'(z).$$

Hierbei entspricht jedem Werte z ein Punkt des Gebildes, während umgekehrt jeder Punkt (W, Z) des Gebildes zu einem und nur einem Punkte z des Fundamentalraumes der Funktion $f(z)$ führt.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß das hiermit erhaltene Resultat zugleich für eine beliebige Funktion zweiter Ordnung mit getrennten Polen, sowie auch mit einem einzigen Pole zweiter Ordnung gilt.

Aufgabe. Sei $\varphi(z)$ eine beliebige ungerade doppeltperiodische Funktion, welche keine Konstante ist, und sei $\overline{\omega}$ irgend eine halbe Periode derselben. Man zeige, daß $\overline{\omega}$ entweder eine Wurzel oder ein Pol von $\varphi(z)$ ist, und daß im übrigen die Ordnung der Wurzel resp. des Poles ungerade ist.

Man zeige ferner, daß

$$\varphi(\overline{\omega} + z) = -\varphi(\overline{\omega} - z).$$

7. Satz. *Jede doppeltperiodische Funktion $\varphi(z)$ läßt sich durch eine beliebige doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung $f(z)$ und deren Ableitung $f'(z)$ rational ausdrücken, vorausgesetzt nur, daß ein der Funktion $f(z)$ zugehöriges primitives Periodenparallelogramm auch für $\varphi(z)$ ein (nicht notwendig primitives) Periodenparallelogramm bildet.*

Verpflanzt man nämlich die Funktion $\varphi(z)$ auf die soeben besprochene zweiblättrige Z-Fläche, so verläuft sie dort eindeutig und weist außerdem keine anderen Singularitäten als Pole auf. Infolgedessen läßt sie sich als rationale Funktion von W, Z darstellen, vgl. Kap. 8, § 15, 3. Satz, und hiermit ist der Beweis erbracht.

Zweiter Beweis. Der Satz kann auch ohne Heranziehung der zweiblättrigen Fläche bewiesen werden. Sei $\varphi(z)$, sowie $f(z)$ zunächst eine gerade Funktion. Dann nimmt $\varphi(z)$ in jedem Punktepaare,

dessen Verbindungsstrecke durch $z = 0$ halbiert wird, gleiche Werte an und erscheint daher als eine eindeutige Funktion von $Z = f(z)$. Da diese Funktion außerdem im allgemeinen analytisch ist und keine anderen Singularitäten als Pole besitzt, so ist sie rational.

Sei zweitens $\varphi(z)$ eine ungerade Funktion von z, während $f(z)$ noch immer gerade bleibt. Dann wird $\varphi(z)/f'(z)$ gerade sein, und infolgedessen wird hier

$$\varphi(z) = f'(z)\,R[f(z)].$$

Ist $\varphi(z)$ dagegen weder gerade noch ungerade, so läßt sich $\varphi(z)$ immerhin als die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen:

$$\varphi(z) = \tfrac{1}{2}[\varphi(z) + \varphi(-z)] + \tfrac{1}{2}[\varphi(z) - \varphi(-z)],$$

womit sich dann der Beweis auch in diesem Falle ergibt.

Vermöge der voraufgehenden Entwicklungen kann man nunmehr den Fall erledigen, daß auch $f(z)$ keine gerade Funktion ist, indem man vermöge einer linearen Transformation der unabhängigen Variabelen:

$$z = z_1 + \gamma$$

bewirkt, daß $f(z)$ in eine gerade Funktion von z_1:

$$f(z) = f(z_1 + \gamma) = f_1(z_1)$$

verwandelt wird. Alsdann braucht man $\varphi(z) = \varphi(z_1 + \gamma) = \varphi_1(z_1)$ nur rational durch $f_1(z_1)$ und $f_1'(z_1)$ auszudrücken, um hierauf zur ursprünglichen Variabelen z wieder zurückzugehen.

Aufgabe 1. Sei $f(z)$ eine gerade Funktion zweiter Ordnung, und sei n eine natürliche Zahl. Dann genügt $f(z/n)$ einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten linear und ganz von $f(z)$ abhängen.

Aufgabe 2. Sind $f(z)$, $F(z)$ zwei gerade Funktionen zweiter Ordnung, so sind sie durch eine lineare Relation miteinander verknüpft.

§ 7. Weitere Sätze betreffend doppeltperiodische Funktionen.

8. Satz. *Der siebente Satz läßt sich dahin verallgemeinern, daß man an Stelle der Funktion zweiter Ordnung $f(z)$ eine beliebige Funktion n-ter Ordnung $\psi(z)$ treten läßt.*

Zum Beweise fasse man die irreduzibele algebraische Gleichung ins Auge, welche dem Zusatze des 6. Satzes von § 5 zufolge die bei-

den Funktionen

(1) $$Z = \psi(z), \quad W = \psi'(z)$$

miteinander verknüpft:

(2) $$G[W, Z] = 0.$$

Ich behaupte: der Grad von G in W ist gleich n. In der Tat sei Z_0 ein Wert von Z, wofür alle Wurzeln von (2) endlich und, sowie diejenigen der ersten Gleichung (1):

(3) $$Z_0 = \psi(z),$$

voneinander verschieden sind. Wäre nun der Grad von G in W kleiner als n, so müßte es zwei im Periodenparallelogramm belegene Wurzeln von (3): $z = a, b$ geben, derart, daß gleichzeitig

$$\psi(a) = \psi(b), \qquad \psi'(a) = \psi'(b)$$

wäre. Daraus folgt aber allgemein:

$$\psi^{(k)}(a) = \psi^{(k)}(b), \qquad k = 2, 3, \cdots.$$

Differentiiert man nämlich (2) nach z, so kommt:

$$\psi''(z) = -\frac{G_Z[\psi'(z), \psi(z)]}{G_W[\psi'(z), \psi(z)]}\psi'(z),$$

wobei der obigen Voraussetzung bezüglich Z_0 zufolge $G_W[\psi'(a), \psi(a)]$ nicht verschwindet. Durch den Schluß von k auf $k+1$ ergibt sich noch allgemein, daß jede spätere Ableitung von $\psi(z)$ rational durch $\psi(z)$, $\psi'(z)$ ausdrückbar ist, und zwar besteht der Nenner des Bruches stets aus einer Potenz von $G_W[\psi'(z), \psi(z)]$.

Aus dieser Überlegung geht nun hervor, daß die beiden Funktionen von ζ:

$$\psi(a + \zeta), \quad \psi(b + \zeta),$$

miteinander identisch sind; denn sie verhalten sich analytisch im Punkte $\zeta = 0$ und stimmen dort nebst allen ihren Ableitungen miteinander überein. Setzt man noch

$$a + \zeta = z, \quad b + \zeta = b - a + z,$$

so wird

$$\psi(z) = \psi(z + b - a),$$

und daher läßt die Funktion $\psi(z)$ die Periode $b-a$ zu.[1]) In diesem Widerspruch liegt der Beweis der Behauptung.

Der Beweis des Satzes folgt nunmehr, unter Heranziehung des 3. Satzes von Kap. 8, § 15, daraus, daß $\varphi(z)$, auf die der Gleichung (2) zugehörige Z-Fläche verpflanzt, dort eindeutig verläuft und keine anderen Singularitäten als Pole aufweist.

9. Satz. *Sei $\Phi(z)$ eine Funktion, deren Periodenparallelogramm sich aus N primitiven Periodenparallelogrammen der Funktion $\varphi(z)$ zusammensetzt. Dann genügt $\Phi(z)$ einer irreduzibelen algebraischen Gleichung N^{ter} Ordnung, deren Koeffizienten rational von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ abhängen.*

Zu einem primitiven Periodenpaar von $\Phi(z)$: Ω, Ω', gibt es nach Voraussetzung ein primitives Periodenpaar von $\varphi(z)$: ω, ω', wofür

$$\Omega = p\omega, \quad \Omega' = q\omega'$$

ist. Dabei sind p, q natürliche Zahlen, deren Produkt gleich N ist. Dem Umstande entsprechend, daß ein Punkt z des kleinen Parallelogramms N kongruente Punkte im großen Parallelogramm besitzt, — bei geeigneter Wahl der Parallelogramme sind es die Punkte

$$\begin{array}{llll} z, & z+\omega, & z+2\omega,\ldots & z+(p-1)\omega, \\ z+\omega', & z+\omega'+\omega, & z+\omega'+2\omega,\ldots & z+\omega'+(p-1)\omega, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z+(q-1)\omega', & z+(q-1)\omega'+\omega,\ldots & & z+(q-1)\omega'+(p-1)\omega, \end{array}$$

— wollen wir ein beliebiges symmetrisches Polynom in den $N=pq$ Argumenten:

$$\Phi(z+k\omega+k'\omega'), \quad k=0,1,\ldots,p-1, \; k'=0,1,\ldots,q-1$$

bilden. Dasselbe läßt offenbar die Perioden ω, ω' zu und wird somit rational durch $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ ausdrückbar. Hieraus erkennt man, daß die Koeffizienten der algebraischen Gleichung:

$$\Pi[\Phi - \Phi(z+k\omega+k'\omega')] = 0$$

als rationale Funktionen von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ dargestellt werden können, während derselben andererseits durch die Funktion $\Phi(z)$ genügt wird.

---

1) Wegen der hier angewendeten Schlußweise vgl. Biermann, *Analytische Funktionen*, S. 391.

Es bleibt also nur noch übrig nachzuweisen, daß das obige Polynom sich nicht in Faktoren zerlegen läßt, deren Koeffizienten rational von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ abhängen. Gesetzt, das ginge nun an. Dann würde $\Phi(z)$ Wurzel eines Polynoms sein, dessen Koeffizienten rational von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ abhängen, welches aber bei passender Wahl von k_0, k'_0 für den Wert $\Phi = \Phi(z + k_0\omega + k'_0\omega')$ nicht verschwindet. Führt man jetzt z stetig in den Wert $z + k_0\omega + k'_0\omega'$ über, so kehren die Koeffizienten zu ihren ursprünglichen Werten wieder zurück, während das Polynom beständig verschwindet, und hiermit sind wir zu einem Widerspruch geführt.

Zum Schlusse beweisen wir noch das Additionstheorem nebst dessen Umkehrung.

10. Satz. *Jede doppeltperiodische Funktion $\varphi(z)$ besitzt ein algebraisches Additionstheorem, und zwar ist*

$$\varphi(z_1 + z_2) = R[\varphi(z_1),\ \varphi'(z_1),\ \varphi(z_2),\ \varphi'(z_2)],$$

wo R eine rationale Funktion der vier Argumente bedeutet.

Sei $f(z)$ irgend eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung mit gemeinsamem Periodenparallelogramm, wofür der Satz bereits feststeht. Eine solche Funktion werden wir im folgenden Kapitel in der Weierstraßschen $\wp$-Funktion kennen lernen; vgl. indessen auch nachstehende Aufgabe 1. Kraft des 7. Satzes wollen wir $\varphi(z)$ zuerst durch diese Funktion und deren Ableitung ausdrücken:

$$\varphi(z) = \mathfrak{R}[f(z),\ f'(z)]. \tag{1}$$

Hieraus folgt vor allem:

$$\varphi(z_1 + z_2) = \mathfrak{R}[f(z_1 + z_2),\ f'(z_1 + z_2)]. \tag{2}$$

Andererseits hat man:

$$f(z_1 + z_2) = r[f(z_1),\ f'(z_1),\ f(z_2),\ f'(z_2)], \tag{3}$$

sowie auch

$$f'(z_1 + z_2) = \frac{\partial r}{\partial z_1} = r_1[f(z_1),\ f'(z_1),\ f(z_2),\ f'(z_2)], \tag{4}$$

wobei die Elimination von $f''(z_1)$ aus $\partial r/\partial z_1$ vermöge der Relation:

$$[f'(z)]^2 = G[f(z)] \tag{5}$$

geschieht, indem man diese nach z differentiiert. Trägt man noch

die Werte von $f(z_1+z_2)$, $f'(z_1+z_2)$ aus (3), (4) in (2) ein, so kommt:

$$\varphi(z_1+z_2) = \Re_1[f(z_1), f'(z_1), f(z_2), f'(z_2)]. \tag{6}$$

Hierbei sind alle die Funktionen $\Re$, r, r_1, $\Re_1$ rational, während G außerdem ganz ist. Der Beweis des ersten Teils des Satzes erfolgt nun einfach dadurch, daß man die Relationen (1) und (5) einmal für $z = z_1$, sodann auch für $z = z_2$ anschreibt, um darauf noch aus diesen vier Gleichungen nebst (6) die vier Funktionen $f(z_1)$, $f'(z_1)$, $f(z_2)$, $f'(z_2)$ zu eliminieren:

$$G[\varphi(z_1+z_2), \varphi(z_1), \varphi(z_2)] = 0,$$

wo G ein Polynom bedeutet. Daß diese letzte Gleichung nicht illusorisch werden kann, indem $G(w_1, w_2, w_3)$ identisch verschwindet oder von weniger als drei Argumenten abhängt, folgt schon daraus, daß jene fünf Gleichungen, welche wir uns zuvörderst auf die Form von algebraischen Gleichungen gebracht denken wollen, bei willkürlich vorgegebenen Werten von $w_1 = \varphi(z_1)$ und $w_2 = \varphi(z_2)$ im allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Bestimmungen der dritten Größe $w_3 = \varphi(z_1+z_2)$ zulassen, falls sie gleichzeitig bestehen sollen.

Um den zweiten Teil des Satzes festzustellen, knüpft man an den 8. Satz an, indem man laut desselben $f(z)$, sowie $f'(z)$ rational durch $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ ausdrückt und dann die so gewonnenen Werte von $f(z_1)$, $f'(z_1)$, $f(z_2)$, $f'(z_2)$ in (6) einträgt.

Wir wollen jetzt die Umkehrung des soeben bewiesenen Satzes besprechen.

11. Satz.[1]) *Eine eindeutige Funktion $\varphi(z)$, welche sich überall im Endlichen, von Polen abgesehen, analytisch verhält und außerdem ein algebraisches Additionstheorem besitzt:*

$$G[\varphi(z_1+z_2), \varphi(z_1), \varphi(z_2)] = 0,$$

ist entweder

1) *eine rationale Funktion von z; oder*

2) *eine rationale Funktion von $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$; oder endlich*

3) *eine rationale Funktion von $f(z)$, $f'(z)$, wo $f(z)$ eine doppeltperiodische Funktion der am Eingang des § 1 näher bezeichneten Art ist.*

---

1) Weierstraß, *Vorlesungen.*

Wir bemerken vor allem, daß jede rationale Funktion ein algebraisches Additionstheorem besitzt, und können deshalb davon absehen, daß $\varphi(z)$ rational ist. In jedem anderen Falle hat $\varphi(z)$ eine wesentliche Singularität im Punkte ∞. Das hat nun aber unter den Voraussetzungen des Satzes zur Folge, daß $\varphi(z)$ periodisch ist. In der Tat sei m der Grad von G im ersten Argument. Dem 11. Satze von Kap. 7, § 6 zufolge gibt es eine Zahl C_2, wofür die Gleichung

$$C_2 = \varphi(z_2)$$

$m+1$ getrennte Wurzeln $z_2 = a_0, a_1, \ldots, a_m$ hat. Wir wollen ζ so annehmen, daß sich $\varphi(z)$ in jedem der Punkte $\zeta + a_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$, sowie auch im Punkte $z = \zeta$, analytisch verhält. Sei $C_1 = \varphi(\zeta)$. Bildet man nun die Größen:

$$\varphi(\zeta + a_0), \quad \varphi(\zeta + a_1), \ldots, \varphi(\zeta + a_m),$$

so sind diese sämtlich Wurzeln des Polynoms: $G(W, C_1, C_2)$. Darum müssen auch mindestens zwei davon einander gleich sein.

Wir wollen jetzt zeigen, daß für zwei der obigen Größen a_i die Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \varphi(z + a_k) = \varphi(z + a_l)$$

allgemein gilt. Beschränkt man nämlich z zunächst auf die Nachbarschaft des Punktes ζ, so folgt aus der Gleichung

$$G[\varphi(z + a_i), \varphi(z), C_2] = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m,$$

daß für jeden Punkt dieser Umgebung die Gleichung

$$\varphi(z + a_\varkappa) = \varphi(z + a_\lambda)$$

bestehen muß. Indessen könnten $\varkappa$ und λ, soviel man sieht, für verschiedene Punkte z verschieden ausfallen. Da es aber nur eine endliche Anzahl von Paaren $(\varkappa, \lambda)$ gibt, während die Anzahl der in Betracht kommenden Punkte z doch unendlich ist, so muß es mindestens ein bestimmtes Paar: $\varkappa = k$, $\lambda = l$, geben, wofür obiger Gleichung durch unendlich viele Punkte der Nachbarschaft von ζ, und daher auch durch alle Punkte derselben genügt wird. Hieraus folgt, daß $\varphi(z + a_k)$ und $\varphi(z + a_l)$ eben ein und dieselbe monogene analytische Funktion sind, und darum läßt $\varphi(z)$ die Periode $a_k - a_l$ zu.

Ist $\varphi(z)$ doppeltperiodisch, so subsumiert sich $\varphi(z)$ damit auf Grund des 8. Satzes unter 3). Es bleibt deshalb nur noch der Fall zu erledigen übrig, daß $\varphi(z)$ einfach periodisch ist. Zu beweisen ist,

daß $\varphi(z)$ sich dann rational durch $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$ ausdrücken läßt. Sollte das nicht angehen, so müßte $\varphi(z)$ mindestens in einem Endpunkte des Periodenstreifens eine wesentliche singuläre Stelle im Sinne von § 2 haben. Infolgedessen könnte man durch eine ähnliche Überlegung wie die obige zeigen, daß es sogar im Periodenstreifen, den wir ja als primitiv annehmen wollen, zwei Punkte a_k und a_l gibt, wofür allgemein

$$\varphi(z + a_k) = \varphi(z + a_l)$$

ist. Demgemäß läßt aber $\varphi(z)$ noch eine Periode $a_k - a_l$ zu, welche kein ganzzahliges Vielfaches der dem Streifen entsprechenden primitiven Periode ω ist. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis des Satzes erbracht.

Phragmén[1]) hat eine Verallgemeinerung dieses Satzes bewiesen, welche folgendermaßen lautet: Besteht zwischen drei Elementen einer monogenen analytischen Funktion $\varphi(z)$:

$$\varphi_1(z_1), \quad \varphi_2(z_2), \quad \varphi_3(w),$$

deren Definitionsbereich die Punkte $z_1 = c_1$, $z_2 = c_2$, $w = c_1 + c_2$ umfaßt, eine algebraische Relation:

$$G[\varphi_1(z_1), \quad \varphi_2(z_2), \quad \varphi_3(z_1 + z_2)] = 0,$$

so ist $\varphi(z)$ entweder

1) eine algebraische Funktion von z; oder

2) eine algebraische Funktion von $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$; oder endlich

3) eine algebraische Funktion von $f(z)$, wo $f(z)$ eine eindeutige doppeltperiodische Funktion ist, welche keine anderen Singularitäten im Endlichen als Pole besitzt.

Aufgabe 1. Man beweise das Additionstheorem für Funktionen zweiter Ordnung, indem man auf Grund der diesem Paragraphen vorausgehenden Entwicklungen die Funktion $f(z + \gamma)$ durch $f(z)$ und $f'(z)$ explizite auswertet. Dabei darf man zunächst annehmen, daß $f(z)$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 2. Sei $\varphi(z)$ eine eindeutige Funktion von z, welche im Endlichen keine anderen singulären Stellen als Pole hat und

1) *Acta mathematica*, Bd. 7 (1885), S. 33. Der Satz rührt von Weierstraß her; Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen*, § 1.

außerdem einer Differentialgleichung von der Form:

$$G[\varphi'(z), \ \varphi(z)] = 0$$

genügt, wo G ein irreduzibeles Polynom ist. Man zeige, daß $\varphi(z)$ dann entweder rational oder periodisch ist, und zwar, im Fall $\varphi(z)$ nur einfach periodisch ist, daß $\varphi(z)$ dann keine wesentliche singuläre Stelle im Fundamentalraume besitzt.

§ 8. Eine auf den Fundamentalbereich fußende Definition der periodischen Funktionen.

Aus den vorstehenden Entwicklungen ist deutlich hervorgegangen, welche einschneidende Bedeutung der Begriff des Fundamentalbereiches für die Theorie der periodischen Funktionen besitzt. Auf diesen Begriff gründet sich auch die Theorie der automorphen Funktionen, wie sie im Sinne der Riemannschen Funktionentheorie entwickelt worden ist. Wir wollen noch zum Schluß einen Satz beweisen, wonach die Definition einer periodischen Funktion auf Grund ihres Verhaltens im Fundamentalraume ohne Bezug auf angrenzende Gebiete getroffen werden kann.

Theorem. *Verhält sich die Funktion $f(z)$ in jedem inneren Punkte eines Parallelstreifens bzw. eines Parallelogramms analytisch, wofern man bloß von etwaigen Polen absieht, und nähert sich $f(z)$ ferner in jedem eigentlichen Randpunkte einem Grenzwerte; stimmen endlich diese Randwerte paarweise in kongruenten Randpunkten überein, so ist $f(z)$ eine periodische Funktion, deren Singularitäten, sofern sich $f(z)$ nicht auf eine Konstante reduziert, lediglich aus den im Fundamentalbereiche gelegenen Polen nebst den damit kongruenten Punkten der Ebene und einer wesentlichen singulären Stelle im Punkte ∞ bestehen.*

Der Satz gilt selbst dann noch, wenn $f(z)$ in isolierten Randpunkten unendlich wird, sonst aber den vorstehenden Bedingungen genügt.

Der Einfachheit halber führen wir den Beweis bloß für das Parallelogramm. Man konstruiere das Parallelogrammnetz, dessen eine Masche das vorgelegte Parallelogramm bildet, und definiere die Funktion $f(z)$ in jedem Punkte der Ebene durch den Wert, welchen sie im kongruenten Punkte des Ausgangsparallelogramms $\mathfrak{F}$ erhält. In einem Randpunkte von $\mathfrak{F}$ wird $f(z)$ der zugehörige Grenzwert beigelegt. Dann braucht man nur zu zeigen, daß sich $f(z)$ in den Randpunkten von $\mathfrak{F}$ analytisch verhält. Zunächst folgt aus den Voraus-

setzungen des Satzes, daß $f(z)$ in den Randpunkten von $\mathfrak{F}$, höchstens mit Ausnahme von isolierten Randpunkten, stetig ist. Daher läßt sich der 12. Satz von Kap. 7, § 6 in Anwendung bringen, und hiermit ist der Beweis fertig.

Wir wenden das soeben erhaltene Theorem zum Beweise des folgenden Satzes an.

Satz. *Das unbestimmte Integral einer ungeraden periodischen Funktion $f(z)$, deren Residuen sämtlich verschwinden, ist eine gerade periodische Funktion.*

Daß das Integral $F(z)$ vor allem eine gerade Funktion ist, folgt aus dem Theorem von Kap. 9, § 6, denn $F(z)$ ist offenbar in der Nähe des Punktes $z = 0$ gerade. Ferner ist $F(z)$ eindeutig, da diese Funktion keine anderen Singularitäten im Endlichen als Pole hat. Es handelt sich also nur noch um den Beweis, daß

$$F(\zeta + \omega_1) = F(\zeta) \tag{1}$$

ist, wo ζ und $\zeta + \omega_1$ zwei beliebige kongruente Randpunkte bedeuten, in welchen $F(z)$ endlich bleibt. Sei $\omega_1 = \omega$; der Fall $\omega_1 = \omega'$ wird ähnlich behandelt. Indem wir $F(z)$ durch ein bestimmtes Integral ausdrücken:

$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz + C,$$

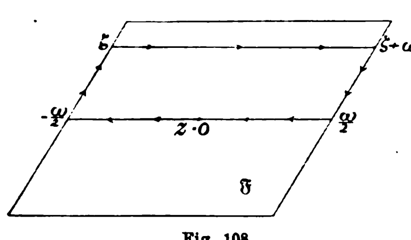


Fig. 108.

geht (1) dann in

$$\int_\zeta^{\zeta+\omega} f(z)\,dz = 0 \tag{2}$$

über, wobei der Integrationsweg nur durch keinen Pol gehen darf, sonst aber willkürlich verläuft. Wir wollen $\mathfrak{F}$ so annehmen, daß der Punkt $z = 0$ den Mittelpunkt von $\mathfrak{F}$ bildet, und den Fall vorwegnehmen, daß $z = -\frac{1}{2}\omega$ kein Pol, und $\zeta = -\frac{1}{2}\omega$ ist. Hier ist, sofern $z = 0$ auch kein Pol ist,

$$\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} f(z)\,dz = \int_{-\frac{\omega}{2}}^{0} + \int_0^{\frac{\omega}{2}} = -F\left(-\frac{\omega}{2}\right) + F\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

Ist nun $\zeta \neq -\frac{1}{2}\omega$, so führen wir das Integral

$$\int f(z)\,dz$$

über dasjenige Parallelogramm, dessen Ecken in den Punkten ζ, $\zeta+\omega$, $\frac{1}{2}\omega$, $-\frac{1}{2}\omega$ liegen, indem wir zunächst voraussetzen, daß sich keine Pole am Rande desselben befinden. Der Wert des Integrals ist gleich der Summe der Residuen von $f(z)$ in den im Parallelogramme befindlichen Polen dieser Funktion, also $=0$. Nun heben sich zunächst die von den Strecken $(-\frac{1}{2}\omega, \zeta)$, $(\zeta+\omega, \frac{1}{2}\omega)$ herrührenden Bestandteile des Integrals wegen der Periodizität von $f(z)$ gegenseitig auf. Ferner ist

$$\int\limits_{\frac{1}{2}\omega}^{-\frac{1}{2}\omega} f(z)\,dz = 0.$$

Daher bleibt nur noch der von der Seite $(\zeta, \zeta+\omega)$ des Parallelogramms herrührende Teil des Integrals übrig, womit denn der Beweis für diesen Fall erbracht ist.

Sollte nun ein Pol auf dem Rande des Parallelogramms liegen, so kann man demselben durch geeignete Abänderung des Parallelogrammrandes stets ausweichen, sofern er nicht gerade im Punkte $z=0$ oder $z=\pm\frac{1}{2}\omega$ liegt. In diesem Falle wird man einen kleinen Kreis um den Pol als Mittelpunkt legen und einen passenden Bogen desselben dann mit in den Integrationsweg aufnehmen. Da nun die Funktion $f(z)$ ungerade ist, so folgt (§ 6, Aufgabe, S. 487), daß der Hauptteil eines jeden solchen Poles derselben auch nur ungerade Potenzen von $1/(z-a)$ enthält. Ferner verschwindet das Residuum nach Voraussetzung, und hieraus ergibt sich, daß der von diesen Hauptteilen herrührende Beitrag zum Integral fortfällt.

Aufgabe. Sei $f(z)$ eine beliebige doppelt periodische Funktion, deren Residuen sämtlich verschwinden, und sei $F(z)$ ein unbestimmtes Integral derselben. Man zeige, daß

$$F(z+\omega) = F(z) + \eta, \quad F(z+\omega') = F(z) + \eta'$$

ist, wo η, η' Konstante bedeuten, die insbesondere verschwinden können.

§ 9. Über gewisse Funktionen, welche mit den doppeltperiodischen Funktionen verwandt sind.

A) *Funktionen mit multiplikativer Periode.* Indem wir die früher zur Untersuchung der einfach periodischen Funktionen vielfach be-

nutzte Transformation

(1) $$w = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$$

hier wieder in Anwendung bringen, geht eine doppelt periodische Funktion $f(z)$ mit den Perioden ω, ω', wobei ja $\Re\left(\frac{1}{i}\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0$ sein soll, in eine eindeutige Funktion von w:

$$f(z) = \varphi(w)$$

über, welche, von den beiden Punkten $w = 0$, ∞ abgesehen, keine anderen Singularitäten als Pole aufweist. Bei näherer Betrachtung der durch (1) definierten konformen Abbildung erkennen wir, daß

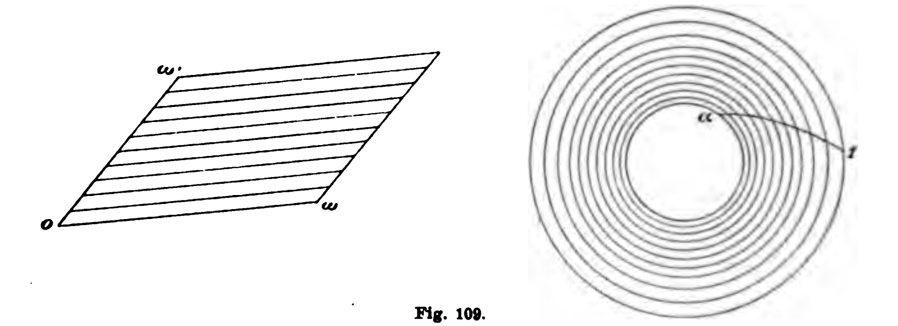


Fig. 109.

das Periodenparallelogramm (Fig. 109) in einen Kreisring der w-Ebene übergeführt wird, wobei der Strecke $(0, \omega)$ die aus dem Einheitskreise der w-Ebene bestehende äußere Begrenzung desselben entspricht, während die beiden anstoßenden Seiten in einen Bogen einer logarithmischen Spirale transformiert werden. Der Periodizität hinsichtlich der zweiten Periode ω' steht hier die Funktionalgleichung

$$\varphi(\alpha w) = \varphi(w), \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i \omega'}{\omega}},$$

gegenüber. Wir erhalten mithin einen Fundamentalbereich für $\varphi(w)$, indem wir einen Kreisring:

$$R' \leqq |w| < R, \qquad R' = |\alpha| R,$$

nehmen, wobei R willkürlich ist. Der Bedingung $\Re\left(\frac{1}{i}\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0$ zufolge ist $|\alpha| < 1$. Endlich nimmt $\varphi(w)$ gleiche Werte in denjenigen Paaren von Randpunkten an, in welchen der Rand durch die Individuen einer Schar logarithmischer Spiralen getroffen wird. Stellt

man nämlich die Punkte des Periodenparallelogramms in der Form dar:

$$z = \lambda\omega + t\omega', \qquad 0 < \lambda \leqq 1,\ 0 < t \leqq 1,$$

und setzt man noch

$$\frac{\omega'}{\omega} = a + bi, \qquad b > 0,$$

$$w = Re^{\Phi i},$$

so findet man aus (1):

$$R = e^{-2\pi b t}, \quad \Phi = 2\pi(\lambda + at).$$

Hieraus erkennt man insbesondere, daß die geradlinige Strecke $\lambda = \lambda_0$:

$$z = \lambda_0\omega + t\omega', \qquad 0 < t \leqq 1,$$

in einen derartigen Spiralbogen übergeht.

Umgekehrt kann man von der Funktionalgleichung

$$\varphi(\alpha w) = \varphi(w), \qquad |\alpha| \neq 1,$$

ausgehen und diejenigen derselben genügenden eindeutigen Funktionen untersuchen, welche im Endlichen, vom Punkte $z = 0$ abgesehen, keine anderen Singularitäten als Pole besitzen. Von dieser Funktionsklasse aus gelangt man dann wieder zu den doppeltperiodischen Funktionen vermöge der zu (1) inversen Transformation:

$$z = \frac{\omega}{2\pi i}\log w.$$

Wegen einer eingehenden Untersuchung dieser Funktionsklasse vergleiche man Rausenberger, *Periodische Funktionen.*

Aufgabe. Ist $|\alpha| = 1$, so zeige man, daß es im allgemeinen keine eindeutige Funktion $\varphi(w)$ gibt, welche der Funktionalgleichung

$$\varphi(\alpha w) = \varphi(w)$$

genügt und sich nicht auf eine Konstante reduziert. Wenn dagegen insbesondere

$$\alpha = e^{\frac{2p\pi i}{q}}$$

ist, wo p, q relativ teilerfremde ganze Zahlen sind und $q > 1$ ist, so liefert jede eindeutige Funktion von w^q, welche von $w = 0, \infty$ abgesehen nur Pole hat, eine Lösung. Man erweitere diese letzte Bedingung. Ist hier überhaupt irgend eine Voraussetzung nötig?

B) *Funktionen mit Periodizitätsmodul resp. mit vortretendem Faktor.* Aus den Entwicklungen des voraufgehenden Paragraphen folgt, daß das Integral einer doppeltperodischen Funktion $f(z)$ mit verschwindenden Residuen zu einer eindeutigen Funktion

$$F(z) = \int f(z)\,dz$$

führt, welche in kongruenten Randpunkten des Periodenparallelogramms Periodizitätsmoduln η, η' aufweist:

$$\text{(A)} \qquad \left.\begin{aligned} F(z+\omega) &= F(z) + \eta, \\ F(z+\omega') &= F(z) + \eta'. \end{aligned}\right\}$$

Umgekehrt ist die Ableitung einer Funktion, welche im Endlichen keine anderen Singularitäten als Pole hat und den Funktionalgleichungen (1) genügt, doppeltperiodisch. Indem man das Integral $\int F(z)\,dz$ über den Rand des Parallelogramms führt, stellt sich heraus, daß

$$\text{(2)} \qquad \eta\omega' - \eta'\omega = 2\pi i\,\Sigma\varrho$$

ist, wobei $\Sigma\varrho$ die Summe der Residuen von $F(z)$ im Parallelogramm bedeutet und, wie gewöhnlich, $\Re\left(\frac{1}{i}\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0$ ist. Wäre dagegen $\Re\left(\frac{1}{i}\frac{\omega'}{\omega}\right) < 0$, so müßte in (2) rechter Hand das Minuszeichen stehen. Hiermit ist eine notwendige Bedingung ermittelt, woran die drei Größen η, η', $\Sigma\varrho$ geknüpft sind. Daß es umgekehrt stets eine Funktion $F(z)$ gibt, welche willkürliche Pole und Periodizitätsmoduln besitzt, sofern nur dieser Bedingung genügt wird, folgt aus der Existenz und den Eigenschaften der sogleich zu besprechenden ζ-Funktion.

Sei $f(z)$ insbesondere eine Funktion zweiter Ordnung mit zusammenfallenden Polen. Dann hat $F(z)$ bloß einen einzigen Pol erster Ordnung. Eine solche Funktion werden wir im folgenden Kapitel des näheren betrachten, nämlich $f(z) = -\wp(z)$, $F(z) = \zeta(z)$. Die Partialbruchzerlegung einer beliebigen doppeltperiodischen Funktion $\Phi(z)$ vermöge einer derartigen Funktion $F(z)$ nebst deren Ableitungen könnte schon an dieser Stelle vorgenommen werden. Wir empfehlen dies dem Leser als eine gute Übung.

Eine andere Funktionsklasse erhalten wir, wenn wir aus einer doppeltperiodischen Funktion $\mathfrak{f}(z) = f(z)$ resp. aus dem Integral einer solchen $\mathfrak{f}(z) = F(z) = \int f(z)\,dz$ die Funktion

$$\Phi(z) = e^{\int \mathfrak{f}(z)\,dz}$$

bilden. Soll $\Phi(z)$ eindeutig ausfallen, so müssen zunächst alle Residuen von $f(z)$ und $\mathfrak{f}(z)$ ganzzahlig sein, und außerdem muß, falls $\mathfrak{f}(z) = \int f(z)\,dz$ ist, jedes Residuum von $f(z)$ verschwinden. Andererseits wird man zur Vermeidung wesentlicher singulärer Punkte im Endlichen verlangen, daß alle Pole von $\mathfrak{f}(z)$ einfach seien. Wir wollen in der Tat voraussetzen, daß diese Bedingungen alle erfüllt sind. Dann genügt $\Phi(z)$, wie eine leichte Rechnung zeigt, den Funktionalgleichungen

$$\text{(B)} \qquad \left.\begin{aligned} \Phi(z+\omega) &= e^{\eta z + c}\,\Phi(z), \\ \Phi(z+\omega') &= e^{\eta' z + c'}\,\Phi(z). \end{aligned}\right\}$$

Umgekehrt sei $\Phi(z)$ eine Funktion, welche im Endlichen bis auf Pole analytisch ist und den Funktionalgleichungen (B) genügt. Dann genügt deren logarithmische Ableitung den Relationen (A).

Während die elliptischen Funktionen notwendig Pole haben mußten, sofern sie sich nicht auf eine Konstante reduzierten, kann sowohl $F(z)$ als $\Phi(z)$ eine ganze Funktion sein. In der Tat genügt jede lineare ganze Funktion den Funktionalgleichungen (A); andererseits erhält man in $e^{g(z)}$, wo $g(z)$ ein beliebiges Polynom 2ten Grades ist, eine Lösung von (B). Diejenigen Lösungen von (B), welche ganze Funktionen sind, heißen *Jacobische Funktionen*. Nimmt man $\mathfrak{f}(z)$ als doppeltperiodisch, so daß also $\eta = \eta' = 0$ wird, so gehen die Funktionalgleichungen (B) in folgende über:

$$\text{(C)} \qquad \left.\begin{aligned} \Phi(z+\omega) &= \mu\,\Phi(z) \\ \Phi(z+\omega') &= \mu'\,\Phi(z) \end{aligned}\right\}.$$

Hiermit erhält man eine Klasse von Funktionen mit multiplikativen Periodizitätsmoduln, welche von Hermite untersucht ist.

Aus der Funktion $\Phi(z)$ entsteht eine verwandte Funktion $\Psi(z)$, welche die Periode ω besitzt, indem man

$$\Psi(z) = e^{\alpha z^2 + \beta z}\,\Phi(z)$$

setzt und über die Koeffizienten α, β passend verfügt. Doch wollen wir diese allgemeinen Betrachtungen hiermit abbrechen.[1])

---

1) Näheres hierüber bei Burkhardt, *Elliptische Funktionen*, § 28, sowie 5. Abschn. Es sei fernerhin auf die einleitenden Kapitel von Weber, *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen* verwiesen. Im übrigen werden die Existenzbeweise für die hier besprochenen Funktionen durch die Entwicklungen des folgenden Kapitels geliefert.

Aufgabe 1. Hat eine Funktion, welche den Funktionalgleichungen (A) genügt, gar keine Pole, so muß sie notwendig eine lineare Funktion von z sein.

Aufgabe 2. Ist $F_1(z)$ eine Lösung von (A), so wird die allgemeine Lösung durch die Formel:

$$F(z) = F_1(z) + f(z)$$

gegeben, wo $f(z)$ eine zum Parallelogramm (ω, ω') gehörige doppeltperiodische Funktion ist.

Aufgabe 3. Man zeige, daß eine Funktion der Klasse (C) ebenso viele Nullpunkte α_i als Pole β_i im Periodenparallelogramm hat. Was kann man hier über die Differenz:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

aussagen?

Elftes Kapitel.

Reihen- und Produktentwicklungen.

§ 1. Partialbruchzerlegung der Funktionen $\csc^2 z$, $\cot z$, usw.

Die Funktion $\cot z$ wird durch die Formel definiert:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}}. \tag{1}$$

Sie hat einen Pol erster Ordnung in den Punkten $z = n\pi$, wo $n = 0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$ ist, und zwar ist das Residuum der Funktion in jedem dieser Pole gleich 1. Ferner hat sie die Periode π, so daß man als Periodenstreifen etwa den Bereich:

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{\pi}{2}, \qquad -\infty < y < \infty$$

nehmen kann. In den beiden Endpunkten des Streifens bleibt sie endlich und nähert sich im Punkte $y = +\infty$ dem Grenzwerte $-i$ im Punkte $y = -\infty$ dem Grenzwerte $+i$. Sie hat deshalb im ganzen Streifen nur den einen Pol $z = 0$, und darum bildet die Periode π in der Tat eine primitive Periode.

In jedem eigentlichen Punkte der Ebene hat die Funktion $\cot z$ also den Charakter einer rationalen Funktion, d. h. sie verhält sich dort im allgemeinen analytisch und hat keine anderen Singularitäten als nur Pole. Im übrigen läßt sie in der Nähe eines Poles die Darstellung zu:

$$\cot z = \frac{1}{z - n\pi} + \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ sich im Pole $z = n\pi$ analytisch verhält. Indem wir nun an die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen anknüpfen, werfen wir die Frage auf, ob nicht auch hier, und zwar im Großen, eine analoge Darstellung bestehe, dergestalt, daß die Funktion im wesentlichen durch die Hauptteile in ihren verschiedenen Polen ausgedrückt wird.

Entwicklung von $\csc^2 z$ Zur Behandlung der soeben aufgeworfenen Frage empfiehlt es sich, von der Ableitung der Funktion auszugehen:

$$\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z = \frac{4}{(e^{zi} - e^{-zi})^2}. \tag{2}$$

Diese Funktion hat in den Punkten $z = n\pi$ einen Pol zweiter Ordnung, dessen Hauptteil den Wert

$$-\frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

hat. Wenn man die Summe dieser Hauptteile für alle Pole bildet, so wird man auf die unendliche Reihe geführt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \tag{3}$$

Unterwerfen wir dieselbe einer näheren Untersuchung. Daß sie, von den Polen der einzelnen Terme abgesehen, für jeden Wert von z absolut konvergiert, geht aus Vergleich mit der konvergenten Reihe positiver Terme:[1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ohne weiteres hervor, denn es ist sowohl für positive als für negative Werte von n

$$\lim_{n=\infty} \frac{(z - n\pi)^{-2}}{n^{-2}} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Darum ist jede der beiden gewöhnlichen Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \qquad \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z + n\pi)^2}, \tag{4}$$

aus denen sich die Reihe (3) zusammensetzt, absolut konvergent.

---

1) Wir berufen uns hier auf den folgenden leicht zu beweisenden Reihensatz: Ist

$$u_1 + u_2 + \cdots$$

eine auf Konvergenz hin zu prüfende Reihe komplexer Glieder, und ist

$$a_1 + a_2 + \cdots \qquad (a_n \neq 0, \quad n \geq m)$$

eine absolut konvergente Reihe; nähert sich ferner das Verhältnis u_n/a_n einem Grenzwerte (oder bleibt dasselbe bloß endlich), wenn n ins Unendliche wächst, so konvergiert die vorgelegte Reihe absolut.

Sei S ein beliebiger endlicher Bereich der z-Ebene. Innerhalb und auf der Begrenzung desselben liegt dann höchstens eine endliche Anzahl von Punkten, in welchen die einzelnen Glieder der Reihe unendlich werden. Läßt man diese Glieder fort, so entsteht dadurch eine neue Reihe, deren beide der Zerlegung (4) entsprechende Bestandteile allen Forderungen des Weierstraßschen Satzes von Kap. 7, § 5 (5. Satz) genügen. Ihre Glieder sind nämlich sämtlich analytisch in S, und die Teilreihen konvergieren außerdem zufolge des Weierstraßschen Kriteriums von Kap. 3, § 4 gleichmäßig, denn es ist

$$\left|\frac{1}{(z-n\pi)^2}\right| < \frac{1}{(n\pi - A)^2}, \qquad n > A/\pi,$$

wo A so gewählt werden soll, daß für alle Punkte z des Bereiches S $|z| \leq A$ ist. Daher definiert jene Reihe eine in S analytische Funktion.

Hieraus schließt man, daß die Reihe (3) eine eindeutige Funktion $f(z)$ definiert:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2},$$

welche sich im allgemeinen in jedem endlichen Punkte der Ebene analytisch verhält und nur in den Ausnahmepunkten $z = n\pi$ einen Pol besitzt, dessen Hauptteil im übrigen durch das entsprechende Glied der Reihe, $(z-n\pi)^{-2}$, gegeben ist.

Die Funktion hat fernerhin die Periode π. In der Tat, ersetzt man z in der Reihe (3) durch $z + \pi$:

$$z = z' + \pi,$$

so geht dieselbe in sich über. Da $f(z)$ andererseits keine Pole im Endlichen als nur die Punkte $z = n\pi$ hat, so ist π auch eine primitive Periode.

In allen Haupteigenschaften bis auf eine stimmt also $f(z)$ schon mit $\csc^2 z$ überein. Wir haben nämlich das Verhalten von $f(z)$ in den Endpunkten des Periodenstreifens noch nicht untersucht. Läßt man z nach einer bestimmten Richtung hin ins Unendliche wachsen, ohne den Periodenstreifen zu verlassen, so nähert sich dabei jedes Glied der Reihe (3) dem Grenzwerte 0, und darum liegt die Vermutung nahe, daß auch die Funktion $f(z)$ demselben Grenzwerte zustrebe.[1]) Daß dem wirklich so ist, überzeugen wir uns leicht auf

1) Dies ist indessen keineswegs selbstverständlich, und trifft sogar bei der Entwicklung (III) von $\cot z$ (vgl. unten) nicht zu.

folgende Weise. Wir fassen denjenigen Teil des Streifens $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ ins Auge, wofür $y \geqq 1$ ist, und unterwerfen ihn der linearen Transformation[1] $z' = 1/z$. Dadurch geht er in einen endlichen Bereich über, welchen wir dann durch Hinzufügung des Punktes $z' = 0$ zu einem abgeschlossenen Bereich S ergänzen. Indem wir andererseits den Gliedern der transformierten Reihe ihren Grenzwert 0 im Punkte $z' = 0$ beilegen, erhalten wir hiermit eine Reihe, deren Glieder in S ausnahmslos stetig sind. Daß letztere Reihe fernerhin in S gleichmäßig konvergiert, erkennt man daraus, daß dies für die ursprüngliche Reihe im entsprechenden Teile des Streifens gilt, wie man vermöge des Weierstraßschen Kriteriums ohne Mühe zeigt. Daher ist die Grenzfunktion stetig in S, womit denn obige Vermutung erwiesen ist.

Wir sind nunmehr in der Lage, die volle Übereinstimmung der beiden Funktionen $f(z)$, $\csc^2 z$ nachzuweisen. Bildet man die Differenz:

$$f(z) - \csc^2 z,$$

so erhält man eine Funktion, welche a) die Periode π hat, b) sich in jedem endlichen Punkte des Periodenstreifens, von hebbaren Singularitäten abgesehen, analytisch verhält, und c) in den beiden Endpunkten desselben endlich bleibt und sogar dem Grenzwert 0 zustrebt. Das kann aber nur eine Konstante sein, und zwar hat diese den Wert 0. Hiermit sind wir zu folgendem Ergebnisse gelangt:

Die Funktion $\csc^2 z$ läßt eine Partialbruchzerlegung von der Form zu:

$$\csc^2 z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \tag{I}$$

Entwicklung von $\cot z$. Aus der soeben erhaltenen Darstellung für $\csc^2 z$ geht nun durch gliedweise Integration der Reihe eine analoge Partialbruchzerlegung für die Funktion $\cot z$ hervor. Sei S ein beliebiger regulärer Bereich der Ebene, welcher den Punkt $z = 0$ im Innern umfaßt, aber keinen der Punkte $z = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, im Innern oder auf der Begrenzung enthält. Wir gehen von der Formel aus:

$$-\csc^2 z + \frac{1}{z^2} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z - n\pi)^2},$$

1) Auf Grund des Reihensatzes von Kap. 12, § 10, ausgesprochen für den Fall, daß m einen beliebigen Punkt des soeben genannten Bereichs bedeutet, ergibt sich der Beweis direkt, also ohne Transformation von z.

wo der am Summenzeichen oben angebrachte Strich anzeigt, daß der Wert $n = 0$ übergangen werden soll. Im Bereiche S konvergiert die Reihe gleichmäßig und gestattet somit die gliedweise Integration längs eines beliebigen, vom Punkte $z = 0$ ausgehenden Weges. Andererseits verhält sich die links stehende Funktion im Punkte $z = 0$ analytisch, sofern man ihr dort ihren Grenzwert beilegt; aber man kann das bestimmte Integral

$$\int_0^z \left(-\csc^2 z + \frac{1}{z^2}\right) dz$$

nicht spalten, da die einzelnen Teile desselben dann nicht konvergieren würden. Indessen hat das unbestimmte Integral den Wert

$$\cot z - \frac{1}{z} + c.$$

Hier muß c so bestimmt werden, daß letztere Funktion beim Grenzübergange $\lim z = 0$ gegen 0 konvergiert. Nun ist $\cot z - 1/z$ eine ungerade Funktion, die im Punkte $z = 0$ nur eine hebbare Unstetigkeit hat. Darum strebt sie dort dem Werte 0 zu, woraus denn folgt, daß $c = 0$ zu setzen ist. Man gelangt somit schließlich zur Formel:

$$\cot z - \frac{1}{z} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \int_0^z \frac{dz}{(z - n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right].$$

Da nun aber der Bereich S so gewählt werden kann, daß er einen beliebig vorgeschriebenen Punkt $z + n\pi$ im Innern enthält, so gilt die Darstellung allgemein, und wir erhalten mithin den

Satz.[1]) *Die Funktion* $\cot z$ *läßt eine unendliche Partialbruchzerlegung von der Form zu:*

$$\text{(II)} \qquad \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right].$$

---

1) Die Reihe (III) findet sich bei Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Bd. 1, 1748, S. 143, welcher dieselbe aus einer mit (II) verwandten Reihe

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right),$$

ableitet. Auch die in den nachstehenden Aufgaben 1—3 gegebenen Reihen rühren von Euler her, *ibid.*, Cap. X. Hierüber vergleiche man ferner Pringsheim und Faber, *Enzyklopädie*, II C 1, Nr. 13.

Dabei konvergiert die Reihe absolut, und läßt sich somit in die Form umsetzen:

$$\text{(III)} \qquad \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

Im übrigen konvergieren beide Reihen gleichmäßig in jedem endlichen Bereich S, aus welchem die Punkte $z = n\pi$ erst ausgestochen sind.

Das allgemeine Glied der Reihe (II) besteht hier nicht mehr, wie bei der früheren Entwicklung für $\csc^2 z$, lediglich aus dem Hauptteil des Poles, es kommt vielmehr noch der Term $1/n\pi$ hinzu, und gerade dieser Term ist es, welcher die Konvergenz der Reihe hervorruft. Läßt man ihn fort, so hat die Reihe keinen Sinn. Das ist eben das neue Moment bei der Partialbruchzerlegung einer transzendenten Funktion. Fassen wir es vorgreifend zu einem Satze zusammen, so können wir sagen:

Bei den eindeutigen transzendenten Funktionen braucht die Reihe der Hauptteile der Pole nicht zu konvergieren. Fügt man aber jedem derselben ein geeignetes Polynom hinzu, — im vorliegenden Falle ist das die Größe $1/n\pi$, — so entsteht eine konvergente Reihe, für deren funktionentheoretisches Verhalten die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen vorbildlich ist, indem die durch diese Reihe definierte Funktion dieselben Pole nebst gleichen Hauptteilen in letzteren hat, wie die ursprüngliche Funktion.

Dieser Satz ist im Mittag-Lefflerschen Satze, § 10, mit einbegriffen.

Wir machen noch auf eine Eigentümlichkeit der soeben erhaltenen Darstellung aufmerksam. Läßt man z, stets im Periodenstreifen verbleibend, gegen einen bestimmen Endpunkt desselben rücken, so nähert sich die Funktion dem Werte i oder $-i$. Dabei konvergiert aber jeder Term der Reihe (III) gegen 0, und hiermit haben wir das merkwürdige Vorkommnis, daß der Grenzwert der Reihe mit der Reihe der Grenzwerte der einzelnen Terme nicht zusammenfällt. Derartige Reihen, welche eben speziell dazu hergestellt werden, um diese Möglichkeit darzutun, sind ja wohlbekannt, hier sind wir aber auch in der Praxis einer solchen Reihe begegnet.

Aufgabe 1. Man leite die Formel:

$$\tan z = \frac{2z}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \frac{2z}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \frac{2z}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \cdots$$

oder

$$\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi z}{2} = \frac{2z}{1-z^2} + \frac{2z}{3^2-z^2} + \frac{2z}{5^2-z^2} + \cdots$$

her, a) indem man so vorgeht, wie oben bei der Aufstellung der entsprechenden Formel für $\cot z$; b) indem man in der Formel (II) z durch $\frac{\pi}{2} - z$ resp. $\frac{\pi - \pi z}{2}$ ersetzt; c) indem man von der Identität ausgeht:

$$\tan z = \cot z - 2\cot 2z.$$

Aufgabe 2. Vermöge der Identität:

$$\frac{1}{\sin z} = \cot\frac{z}{2} - \cot z$$

leite man die Partialbruchzerlegung für $\csc z$ her:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum{}'(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right)$$

oder

$$\frac{\pi}{\sin\pi z} = \frac{1}{z} + \frac{2z}{1-z^2} - \frac{2z}{2^2-z^2} + \frac{2z}{3^2-z^2} - \cdots.$$

Aufgabe 3. Man zeige, daß

$$\frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}} = 4\left\{\frac{1}{1-z^2} - \frac{3}{3^2-z^2} + \frac{5}{5^2-z^2} - \cdots\right\}.$$

§ 2. Herstellung doppeltperiodischer Funktionen durch unendliche Reihen. Die Funktionen $\wp(z)$, $\zeta(z)$.

Seien ω und ω' zwei beliebige, von 0 verschiedene komplexe Zahlen, deren Arcusen nur nicht bis auf Vielfache von π miteinander übereinstimmen. Setzt man also

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + \beta i,$$

so ist $\beta \neq 0$; wir wollen ferner festsetzen, daß $\beta > 0$ sei. In diesem Paragraphen handelt es sich um den Beweis, daß es doppeltperiodische Funktionen zweiter Ordnung gibt, welche diese Größe ω und ω' zu einem primitiven Periodenpaare haben.

Hilfssatz.[1]) *Die Doppelreihe*

1) Eisenstein, *Journ. für Math.*, Bd. 35 (1847), S. 165. — Eine Doppelreihe konvergiert, wenn jede aus den Gliedern derselben gebildete einfache Reihe konvergiert. Demgemäß konvergiert eine, und daher jede letzterer Reihen absolut. Als Wert der Doppelreihe wird der Wert einer dieser einfachen Reihen erklärt. Der Definition zufolge kann eine konvergente Doppelreihe nur absolut konvergieren.

(1) $$\sum{}' \frac{1}{(m\omega + m'\omega')^3}, \qquad m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
konvergiert.

Dabei sollen m und m' alle ganzzahligen Werte annehmen, derart, daß alle möglichen Wertepaare (m, m') mit alleiniger Ausnahme von $(0, 0)$ zu Stande kommen. Die Punkte

$$\Omega = m\omega + m'\omega'$$

liegen in den Ecken eines Parallelogrammnetzes. Man fasse zuerst dasjenige Parallelogramm P_1, welches von den vier an den Punkt $z = 0$ heranreichenden Parallelogrammen gebildet wird, ins Auge. Auf dem Rande desselben liegen 8 Punkte Ω. Um ein bestimmtes Gesetz für die Herstellung einer einfachen Reihe aus den Termen der Doppelreihe herauszugreifen, so wollen wir diese 8 Terme zuerst nehmen, indem wir etwa mit $1/\omega^3$ beginnen und dann den Rand von P_1 in positivem Sinne durchlaufen. Sei l die kleinste Entfernung des Punktes $z = 0$ von einem Randpunkte. Dann wird für jeden dieser 8 Punkte

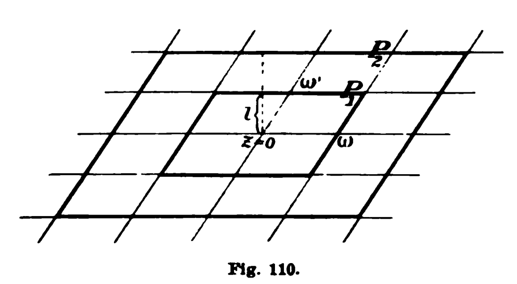


Fig. 110.

$$\left|\frac{1}{\Omega^3}\right| \leqq \frac{1}{l^3}$$

sein, und alle 8 zusammengenommen liefern hiernach einen Beitrag zur Reihe der absoluten Werte:

(2) $$\sum{}' \left|\frac{1}{\Omega^3}\right|,$$

welcher kleiner als $8/l^3$ ist.

Geht man jetzt zu einem zweiten Parallelogramm P_2, welches aus P_1 und allen an P_1 stoßenden Parallelogrammen des Netzes besteht, so finden sich $8 \cdot 2 = 16$ Punkte Ω auf dessen Rande. Diesen Punkten entsprechend, schreiben wir 16 weitere Terme der Reihe an. Für jeden derselben gilt die Relation:

$$\left|\frac{1}{\Omega^3}\right| \leqq \frac{1}{(2l)^3},$$

so daß sie also insgesamt einen Beitrag zur Reihe (2) liefern, welcher kleiner als $8 \cdot 2/(2l)^3$ ist.

Indem man so fortfährt, beweist man, daß die Anzahl der Punkte auf dem Rande von P_n gleich $8n$ ist. Darum beträgt die Summe der

entsprechenden Glieder aus der Reihe (2) weniger als $8n/(nl)^3$, woraus dann erhellt, daß die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern aus dieser Reihe den Wert der konvergenten Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{(nl)^3} = \frac{8}{l^3}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right]$$

niemals übersteigt. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß ein kleinerer ganzzahliger Exponent nicht genügt hätte, die Reihe

$$\sum{}' \frac{1}{\Omega^2}$$

konvergiert nicht. In der Tat sei L die größte Entfernung eines Randpunktes von P_1 vom Punkte $z = 0$. Dann ist für jeden der dem Rande von P_n entsprechenden $8n$ Terme der Reihe

$$\left|\frac{1}{\Omega^2}\right| \geqq \frac{1}{(nL)^2},$$

und infolgedessen kann man stets genug Terme nehmen, damit die Summe ihrer absoluten Beträge die Summe einer beliebig vorgegebenen Anzahl von Termen aus der divergenten Reihe

$$\sum \frac{8n}{(nL)^2} = \frac{8}{L^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right]$$

übersteigt.

Herstellung einer doppeltperiodischen Funktion dritter Ordnung. Auf Grund des voraufgeschickten Hilfssatzes können wir ohne weiteres eine Reihe hinschreiben, welche eine doppeltperiodische Funktion mit einem Pole dritter Ordnung im Periodenparallelogramm definiert. Die Reihe lautet folgendermaßen:

$$(3) \qquad Q(z) = \sum \frac{1}{(z-\Omega)^3}, \qquad \Omega = m\omega + m'\omega',$$

wo m und m' alle positiven und negativen ganzzahligen Werte inkl. 0 annehmen, welche zu verschiedenen Wertepaaren (m, m') führen.

Daß die Reihe (3) in jedem Punkte der Ebene, in welchem kein Nenner verschwindet, absolut konvergiert, schließt man aus dem Konvergenzsatze, § 1, Anm., indem man als Hilfsreihe Σa_n die soeben untersuchte Reihe (1) nimmt. Daß sie ferner in jedem endlichen Bereiche S gleichmäßig konvergiert, sofern man vorerst alle Terme fortläßt, welche einen Pol in S haben, (resp. sofern man vorerst alle

Punkte von S fortläßt, in denen ein Nenner verschwindet), beweist man ebenfalls im Anschluß an jene Reihe. Sei nämlich ϱ der größte Wert von $|z|$ in den Punkten von S inkl. des Randes. Dann ist

$$|z - \Omega| \geqq |\Omega| - |z| \geqq |\Omega| - \varrho.$$

Läßt man daher diejenigen Glieder der Reihe (3) fort, wofür $|\Omega| \leqq \varrho$ ist, so findet man für die übrigen Glieder dieser Reihe:

$$\left|\frac{1}{(\Omega - z)^3}\right| \leqq \frac{1}{(|\Omega| - \varrho)^3}.$$

Um also das Weierstraßsche Konvergenzkriterium, Kap. 3, § 4, anzuwenden, braucht man nur $M_n = [|\Omega| - \varrho]^{-3}$ zu setzen.

Hiermit ist gezeigt, daß die Funktion $Q(z)$ in jedem der Punkte Ω inkl. des Punktes $z = 0$ einen Pol mit dem Hauptteil $(z - \Omega)^{-3}$ aufweist, sich aber sonst analytisch verhält. Daß sie endlich die Perioden ω, ω' besitzt, sieht man ja der Reihe sofort an.

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion. An die Entwicklungen von Kap. 10, § 8, anknüpfend leiten wir noch aus $Q(z)$ durch Integration eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung, die Weierstraßsche $\wp$-Funktion, her, und zwar definieren wir sie als dasjenige Integral von $-2Q(z)$:

a) $$\wp(z) = \int -2Q(z)\,dz,$$

wofür

b) $$\lim_{z=0}\left[\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right] = 0$$

ist. Schreibt man das unbestimmte Integral in der Form an:

$$\int -2Q(z)\,dz = \int_\alpha^z -2Q(z)\,dz + C,$$

$$\alpha \neq 0, \quad |\alpha| < |\omega|, \ |\omega'|,$$

und ersetzt man dann rechter Hand $Q(z)$ durch die zugehörige Reihe, so kommt:

$$\int_\alpha^z \frac{-2}{z^3}\,dz + \left(\int_0^z + \int_\alpha^0\right)\sum{}' \frac{-2}{(z-\Omega)^3}\,dz + C$$

$$= \frac{1}{z^2} + \int_0^z \sum{}' \frac{-2}{(z-\Omega)^3}\,dz$$

$$- \frac{1}{\alpha^2} + \int_\alpha^0 \sum{}' \frac{-2}{(z-\Omega)^3}\,dz + C.$$

Die Bedingung b) hat nun zur Folge, daß die ganze letzte Zeile hier fortfällt. Durch gliedweise Integration erhält man also schließlich die Formel:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right]. \tag{4}$$

Die solchergestalt definierte Funktion $\wp(z)$ erweist sich nach dem Satze von Kap. 10, § 8 als doppeltperiodisch, was auch durch eine geschickte Umformung der Reihe (4) direkt an den Tag tritt. Wir haben somit eine dem willkürlich angenommenen Periodenpaar (ω, ω') entsprechende doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung mit einem doppelten Pole im Punkte $z = 0$ gewonnen. Sie ist fernerhin eine gerade Funktion von z, sowie eine homogene Funktion der drei Argumente z, ω, ω' von der -2ten Dimension. Nach den Entwicklungen von Kap. 10, § 5 genügt sie einer Differentialgleichung von der Form

$$\wp'(z)^2 = G[\wp(z)],$$

wo G ein Polynom dritten Grades mit den Wurzeln

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad e_2 = \wp\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right), \qquad e_3 = \wp\left(\frac{\omega'}{2}\right)$$

bedeutet. Um die Koeffizienten von G zu berechnen, bedient man sich der Reihenentwicklung (4) von $\wp(z)$ in der Nähe von $z = 0$. Es ist

$$\frac{1}{(z-\Omega^2)} = \frac{1}{\Omega^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)^2} = \frac{1}{\Omega^2}\left[1 + 2\,\frac{z}{\Omega} + 3\,\frac{z^2}{\Omega^2} + \cdots\right],$$

$$\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} = 2\,\frac{z}{\Omega^3} + 3\,\frac{z^2}{\Omega^4} + 4\,\frac{z^3}{\Omega^5} + \cdots.$$

Aus dem Reihensatze von Kap. 7, § 14 folgt also, da offenbar allgemein $\Sigma' 1/\Omega^{-2n-1}$ verschwindet,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3\left(\sum{}' \frac{1}{\Omega^4}\right)z^2 + 5\left(\sum{}' \frac{1}{\Omega^6}\right)z^4 + \cdots \tag{5}$$

oder, indem wir mit Weierstraß

$$g_2 = 60\sum{}' \frac{1}{\Omega^4}, \qquad g_3 = 140\sum{}' \frac{1}{\Omega^6} \tag{6}$$

setzen:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \cdots. \tag{7}$$

Hiernach ist

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \frac{g_2}{10}z + \frac{g_3}{7}z^3 + \cdots. \tag{8}$$

Bildet man nunmehr die doppeltperiodische Funktion

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z),$$

so zeigt die Rechnung, daß sie keinen Pol im Punkte $z = 0$ und mithin überhaupt keinen Pol hat. Infolgedessen muß sie eine Konstante sein, deren Wert sich fernerhin durch den Grenzübergang $z = 0$ als $-g_3$ erweist. Hiermit haben wir die in Aussicht gestellte Differentialgleichung für die $\wp$-Funktion gewonnen:

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3. \tag{9}$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \tfrac{1}{2}g_2, \qquad \wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z).$$

Aus der letzten Beziehung ergibt sich allgemein, daß die Koeffizienten der Entwicklung (5):

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^{2n-2},$$

sämtlich Polynome in c_2 und c_3, also auch in g_2 und g_3 sind. In der Tat: entwickelt man beide Seiten jener Beziehung nach aufsteigenden Potenzen von z und vergleicht man beiderseits die Koeffizienten, so kommt:

$$c_n = \frac{3}{(n-3)(2n+1)}\left\{c_2 c_{n-2} + c_3 c_{n-3} + \cdots + c_{n-2} c_2\right\}, \quad n > 3.$$

Die Funktion $\zeta(z)$. In ähnlicher Weise leitet man wieder aus $\wp(z)$ durch Integration $\zeta(z)$ her:

$$\text{a}_1) \qquad \zeta(z) = \int -\wp(z)\,dz = \int_a^z -\wp(z)\,dz + C,$$

mit der Nebenbedingung:

$$\text{b}_1) \qquad \lim_{z=0}\left[\zeta(z) - \frac{1}{z}\right] = 0.$$

Dies gibt:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum{}'\left[\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2}\right]. \tag{10}$$

Die Funktion $\zeta(z)$ ist ungerade, wie man sowohl aus dem Integral als auch aus der Reihe (10) erkennt, indem man in letzterer z durch $-z$ und zugleich Ω durch $-\Omega$ ersetzt. Sie ist ferner eine homogene Funktion der drei Argumente z, ω, ω' von der -1ten Dimension. Endlich genügt sie den beiden Funktionalgleichungen (vgl.

Kap. 10, § 8):

$$(11)\qquad \left.\begin{aligned}\zeta(z+\omega)&=\zeta(z)+\eta,\\ \zeta(z+\omega')&=\zeta(z)+\eta',\end{aligned}\right\},$$

wo η, η' Konstante bedeuten, welche sicher nicht beide verschwinden, denn $\zeta(z)$ hat ja nur einen einzigen Pol erster Ordnung im Periodenparallelogramm und kann darum nicht doppeltperiodisch sein. Da die Summe der Residuen von $\zeta(z)$ im Parallelogramme gleich 1 ist, so hat man die Legendresche Relation

$$(12)\qquad \eta\omega'-\eta'\omega=2\pi i.$$

Hätten wir dagegen ω und ω' vorhin so genommen, daß $\Re\left(\frac{1}{i}\frac{\omega'}{\omega}\right)<0$ wäre, so müßte dem rechten Gliede dieser Gleichung das entgegengesetzte Vorzeichen zukommen.

Wir heben noch die Tatsache hervor, daß

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+z^2\varphi(z),$$

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+z^3\psi(z)$$

ist, wo $\varphi(z)$, $\psi(z)$ beide im Punkte $z=0$ analytisch sind.

Aufgabe. Man zeige, daß

$$(13)\qquad \frac{\eta}{2}=\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad \frac{\eta'}{2}=\zeta\left(\frac{\omega'}{2}\right),$$

sowie daß

$$(14)\qquad \zeta(z)=\frac{1}{z}-\frac{g_2}{60}z^3-\frac{g_3}{140}z^5+z^7\chi(z),$$

wo $\chi(z)$ sich im Punkte $z=0$ analytisch verhält.

§ 3. Darstellung doppeltperiodischer Funktionen mittels der ζ- und der $\wp$-Funktion.

In der Umgebung der Stelle $z=0$ hat man

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+z^3\varphi_1(z),$$

$$-\zeta'(z)=\wp(z)=\frac{1}{z^2}+z^2\varphi_2(z),$$

$$\frac{1}{2}\zeta''(z)=-\frac{1}{2}\wp'(z)=\frac{1}{z^3}+z\;\varphi_3(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\zeta^{(n-1)}(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\wp^{(n-2)}(z)=\frac{1}{z^n}+\varphi_n(z),$$

wo sich jede der Funktionen $\varphi_n(z)$ im Punkte $z = 0$ analytisch verhält. Auf Grund dieser Relationen erhält man eine Art Partialbruchzerlegung der doppeltperiodischen Funktionen, welche durch den folgenden Satz des näheren erklärt wird.

Satz. *Die allgemeinste doppeltperiodische Funktion $f(z)$ läßt sich als eine lineare Kombination von $\zeta(z-\beta_i)$ und ihren Ableitungen darstellen, wobei $\beta_1, \ldots \beta_m$ die im Periodenparallelogramm belegenen Pole von $f(z)$ bedeuten.*

Sei nämlich der Hauptteil von $f(z)$ im Pole β

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(z-\beta)^i}.$$

Zieht man dann von $f(z)'$ die Summe ab:

$$A_1 \zeta(z-\beta) + \sum_{i=2}^{n} A_i \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \zeta^{(i-1)}(z-\beta),$$

so hat die also entstandene Differenz keinen Pol mehr im Punkte β. Indem man bei jedem Pole auf diese Weise verfährt, gelangt man schließlich zu einer Differenz $\Phi(z)$, welche gar keinen Pol im ganzen Periodenparallelogramm mehr aufweist und außerdem doppeltperiodisch ist. In der Tat sind alle Ableitungen von $\zeta(z)$ ohnehin doppeltperiodisch. Bezeichnet man die Residuen von $f(z)$ mit $C_1, \ldots C_m$, so folgt aus § 2, (11), daß

$$\Phi(z+\omega) - \Phi(z) = -C_1\eta - C_2\eta - \cdots - C_m\eta,$$
$$\Phi(z+\omega') - \Phi(z) = -C_1\eta' - C_2\eta' - \cdots - C_m\eta'$$

ist. Da aber die Summe der Residuen von $f(z)$ für das ganze Parallelogramm verschwindet, so haben die Ausdrücke rechter Hand den Wert 0, und die Behauptung erweist sich damit als richtig. Hiernach kann $\Phi(z)$ nichts anderes als eine Konstante sein, womit denn der Beweis erbracht ist.

1. Aufgabe. Man zeige, daß jede doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung in einer der beiden Formen geschrieben werden kann:

$$A\wp(z-\beta) + B,$$
$$\frac{A}{\wp(z-\gamma) - \wp(\beta-\gamma)} + B.$$

Im zweiten Falle ist γ der Halbierungspunkt der die beiden Pole

β, β' miteinander verbindenden Strecke:

$$\gamma = \frac{\beta + \beta'}{2}.$$

2. Aufgabe. Hat eine doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung getrennte Pole, wovon der eine im Punkte $z = 0$, der andere in $z = -\alpha$ liegt, so läßt sie sich in der Form ausdrücken:

$$A \frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} + B.$$

3. Aufgabe. Im Anschluß an das Ergebnis der 2. Aufgabe beweise man die Relation:

$$\zeta(z + \alpha) - \zeta(z) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} + \zeta(\alpha),$$

oder, anders geschrieben:

$$\zeta(u + v) - \zeta(u) - \zeta(v) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)},$$

wobei u, v unabhängige komplexe Argumente bedeuten.

Fingerzeig. Man bediene sich der am Eingange des Paragraphen stehenden Beziehungen.

Aufgabe 4. Hat die Funktion $F(z)$ im Endlichen keine anderen Singularitäten als Pole, und genügt $F(z)$ den Funktionalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} F(z + \omega) &= F(z) + \mathsf{H} \\ F(z + \omega') &= F(z) + \mathsf{H}' \end{aligned}\right\}$$

so ist dafür notwendig, daß

$$\mathsf{H} = \eta \Sigma \varrho + a\omega, \quad \mathsf{H}' = \eta' \Sigma \varrho + a\omega'$$

seien, wo η, η' durch die Formeln (13), § 3 gegeben sind, a eine Konstante bedeutet, und $\Sigma\varrho$ die Summe der Residuen von $F(z)$ im Periodenparallelogramm ist.

Nimmt man umgekehrt m Pole (inkl. ihrer Hauptteile) im Periodenparallelogramm willkürlich an, wofür also die Summe der Residuen $\Sigma\varrho$ ebenfalls einen beliebigen Wert hat, und versteht man unter a eine weitere willkürliche Konstante, so gibt es eine Funktion $F(z)$, welche die genannten Pole zuläßt, sich sonst analytisch verhält, und den obigen Funktionalgleichungen genügt, wobei H, H' durch die vorstehenden Formeln gegeben sind.

Demgemäß erweist sich die in Kap. 10, § 9, Formel (2) erhaltene notwendige Bedingung,

$$\mathsf{H}\omega' - \mathsf{H}'\omega = 2\pi i \Sigma \varrho,$$

auch als hinreichend.

§ 4. Die σ-Funktion.

Indem wir an die Relationen:

a) $$\int \cot z\, dz = \log \sin z + C, \qquad \sin z = e^{\int \cot z\, dz},$$

b) $$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

anknüpfen, lassen wir jetzt aus $\zeta(z)$ eine Funktion $\sigma(z)$ in derselben Weise entstehen, wie diesen Relationen gemäß die Funktion $\sin z$ aus $\cot z$ hervorgegangen ist. Sei also

a') $$\sigma(z) = e^{\int \zeta(z)\, dz},$$

b') $$\lim_{z=0} \frac{\sigma(z)}{z} = \sigma'(0) = 1.$$

Hiermit erhalten wir die Weierstraßsche σ-Funktion. Wie man sieht, ist

(1) $$\sigma(z) = z\, e^{\int\limits_0^z \left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) dz}.$$

Daraus folgt, daß sie ungerade ist, denn der Exponent ist ja eine gerade Funktion.

1. Satz. *Die Funktion $\sigma(z)$ ist eine ganze transzendente Funktion, welche in den Punkten $z = m\omega + m'\omega'$ eine einfache Wurzel hat, sonst aber nirgends verschwindet.*

In der Tat sei S ein beliebiger endlicher Bereich der z-Ebene. Dann kann man $\zeta(z)$ in der Form schreiben:

$$\zeta(z) = \sum_{(n)} \frac{1}{z - \Omega} + \varphi(z),$$

wobei sich die Summe nur über eine endliche Anzahl von Termen er-

streckt, und $\varphi(z)$ sich in S analytisch verhält. Daraus findet man:

$$\sigma(z) = \Pi_{(n)}(z - \Omega)\, e^{\psi(z)},$$

wo $\psi(z)$ sich ebenfalls in S analytisch verhält. Infolgedessen hat $\sigma(z)$ keine singuläre Stelle im Endlichen, während andererseits die Punkte $z = \Omega$ einfache Wurzeln der Funktion abgeben, w. z. b. w. Im übrigen ist $\sigma(z)$ homogen von der 1ten Dimension in den drei Argumenten z, ω, ω'.

Der Gebrauch mehrdeutiger Funktionen läßt sich hier vermeiden, indem man vorerst folgenden Satz formuliert und beweist: In einem einfach zusammenhängenden Bereiche S sei $f(z)$ eindeutig und analytisch, sofern von den Punkten $a_1, \dots a_n$ abgesehen wird. Ferner habe $f(z)$ in jedem jener Punkte einen einfachen Pol mit einem ganzzahligen Residuum m_i, $i = 1, \dots n$. Dann wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = f(z)\, w \tag{2}$$

eine Schar in S eindeutiger Funktionen $w = F(z)$ definiert, deren jede nicht identisch verschwindende im Punkte a_i einen Nullpunkt oder Pol von der $|m_i|^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt, je nachdem m_i positiv oder negativ ist. In allen anderen Punkten von S verhält sich diese Funktion analytisch und hat überdies einen von 0 verschiedenen Wert.

Zum Beweise setze man

$$f(z) = \frac{m_1}{z - a_1} + \cdots + \frac{m_n}{z - a_n} + \varphi(z),$$

wobei sich $\varphi(z)$ in S analytisch verhält. Dann liefert die Funktion:

$$F_1(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n}\, e^{\int\limits_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz}$$

eine Lösung, wie man sofort nachrechnet.

Sei jetzt $F(z)$ eine beliebige Lösung von (2), welche sich in einem Punkte $b \neq a_i$ von S analytisch verhält, ohne dort zu verschwinden. Dann ist in der Nähe von $z = b$:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = f(z) = \frac{F_1'(z)}{F_1(z)}.$$

Bildet man andererseits die Funktion $F(z)/F_1(z)$, so zeigt sich, daß

in der genannten Nachbarschaft:

$$\frac{d}{dz}\frac{F(z)}{F_1(z)} = \frac{\frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{F_1'(z)}{F_1(z)}}{F_1(z)} F(z) = 0$$

wird. Infolgedessen ist dort

$$\frac{F(z)}{F_1(z)} = C \neq 0, \quad \text{also} \quad F(z) = CF_1(z).$$

Demnach läßt sich $F(z)$ über den ganzen Bereich S, von den Polen von $F_1(z)$ natürlich abgesehen, analytisch fortsetzen, und zwar stimmen alle dergestalt gewonnenen Werte von $F(z)$ mit $CF_1(z)$ überein. Indem wir nun nachträglich der Konstanten C in der letzten Formel gestatten, auch den Wert 0 anzunehmen, erhalten wir hiermit die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (2) im genannten Bereich.

2. Satz. *Die σ-Funktion genügt den beiden Funktionalgleichungen:*

(3)
$$\begin{cases} \sigma(z+\omega) = -e^{\eta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}\sigma(z), \\ \sigma(z+\omega') = -e^{\eta'\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}\sigma(z), \end{cases}$$

wo

$$\frac{\eta}{2} = \zeta\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad \frac{\eta'}{2} = \zeta\left(\frac{\omega'}{2}\right).$$

Der Satz subsumiert sich unter die Formeln (B) des § 9 von Kap. 10.

Mittels der ζ-Funktion ergab sich eine der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen analoge Darstellung für die doppeltperiodischen Funktionen. Mit Hilfe der σ-Funktion kann man auch die Produktformel der rationalen Funktionen auf die doppeltperiodischen Funktionen übertragen.

3. Satz. *Die allgemeinste nicht konstante doppeltperiodische Funktion $f(z)$ läßt sich als Quotient zweier σ-Produkte ausdrücken:*

(4)
$$f(z) = C\frac{\sigma(z-\alpha_1)\cdots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\cdots\sigma(z-\beta_n)},$$

wobei

(5)
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i$$

ist.

Erinnern wir uns vor allem des 5. Satzes von Kap. 10, § 5, wonach

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \beta_i \pmod{\omega, \omega'}$$

ist. Dabei lagen alle die Punkte α, β in einem bestimmten Periodenparallelogramm. Die Kongruenz drückt eine Bedingung für diese Punkte aus, derart, daß man höchstens $2n-1$ davon willkürlich annehmen darf, die $2n^{\text{te}}$ wird dann dadurch eindeutig bestimmt.[1]) Wir wollen jetzt diesen letzten Punkt nötigenfalls durch denjenigen außerhalb des Parallelogramms gelegenen kongruenten Punkt ersetzen, wofür die Kongruenz in die Gleichung (5) übergeht. Alsdann folgt aus dem 2. Satze, daß die Funktion

$$\frac{\sigma(z-\alpha_1)\cdots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\cdots\sigma(z-\beta_n)}$$

doppeltperiodisch ist, und da ihre Nullpunkte und Pole überdies beziehungsweise mit den Nullpunkten und Polen von $f(z)$ zusammenfallen, so kann sie sich nur durch eine multiplikative Konstante von $f(z)$ unterscheiden.

In der Weierstraßschen Funktionenlehre bildet die durch ein unendliches Produkt definierte σ-Funktion (vgl. § 8) geradezu den Ausgangspunkt für die Behandlung der doppeltperiodischen Funktionen. Vermöge der Sätze der algebraischen Analysis werden dann in umgekehrter Reihenfolge, und zwar auf rechnerischem Wege, die Funktionaleigenschaften der σ- und der verwandten Funktionen hergeleitet. So hat man in jener Theorie zur Definition der ζ- und $\wp$-Funktion:

(6) $$\zeta(z) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

(7) $$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{\sigma'(z)^2 - \sigma''(z)\sigma(z)}{\sigma(z)^2}.$$

Aufgabe 1. Man zeige, daß

(8) $$\wp(z) - \wp(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha - z)\sigma(\alpha + z)}{\sigma(\alpha)^2\sigma(z)^2}.$$

Dies entspricht der trigonometrischen Relation:

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin(\alpha - z)\sin(\alpha + z)}{\sin^2\alpha\,\sin^2 z}.$$

1) Damals wußten wir noch nicht, ob es stets erlaubt ist, irgend $2n-1$ dieser Punkte beliebig im Parallelogramm anzunehmen. Daß dies nun in der Tat angeht, folgt auch erst aus dem gegenwärtigen Satze.

Aufgabe 2. Man zeige, daß

$$\sigma(z) = z - \frac{g_2}{240} z^5 - \frac{g_3}{840} z^7 + z^9 \chi(z) \tag{9}$$

ist, wo $\chi(z)$ sich im Punkte $z = 0$ analytisch verhält.

Aufgabe 3. Das Integral einer beliebigen doppeltperiodischen Funktion setzt sich aus folgenden Bestandteilen zusammen:

a) einer doppeltperiodischen Funktion;

b) einer linearen Funktion;

c) einer Summe von ζ-Funktionen;

d) einer Summe von Logarithmen von σ-Funktionen.

§ 5. Additionstheoreme.

Wir sind bereits einmal am Ende des § 3 der Funktionalgleichung begegnet[1]):

$$\zeta(u + v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}. \tag{1}$$

Hierdurch wird die ζ-Funktion, gebildet für die Summe zweier Argumente, durch Funktionen der einzelnen Argumente ausgedrückt. Eine derartige Funktionalgleichung heißt allgemein ein *Additionstheorem*. Differentiiert man (1) partiell nach u, so kommt

$$\wp(u + v) = \wp(u) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}, \tag{2}$$

oder nach Umformung mittels der Relationen

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2 \wp(u) - g_3, \tag{3}$$

$$\wp''(u) = 6\wp(u)^2 - \tfrac{1}{2} g_2, \tag{4}$$

$$\wp(u + v) = \frac{2[\wp(u)\wp(v) - \frac{1}{4} g_2][\wp(u) + \wp(v)] - g_3 - \wp'(u)\wp'(v)}{2[\wp(u) - \wp(v)]^2}. \tag{5}$$

Indem man $\wp'(u)$ und $\wp'(v)$ noch mittels der Relation (3) aus dieser Gleichung fortschafft, ergibt sich, daß $\wp(u + v)$, $\wp(u)$, $\wp(v)$ durch eine algebraische Gleichung miteinander verknüpft sind:

$$G[\wp(u + v), \wp(u), \wp(v)] = 0.$$

1) In diesem Paragraphen bedeuten u, v zwei unabhängige komplexe Argumente.

Demnach besitzt die Funktion $\wp(z)$, in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Ergebnisse von Kap. 10, § 7, ein *algebraisches Additionstheorem.*

Aus (2) oder (5) erhält man ferner durch partielle Differentiation nach u oder v das Additionstheorem für $\wp'(z)$.

Man kann aber auch von der σ-Funktion aus zum Additionstheorem für die $\wp$-Funktion gelangen. Nach § 4, (8) ist

$$\wp(u) - \wp(v) = \frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma(v)^2\,\sigma(u)^2}.$$

Differentiiert man hier beiderseits logarithmisch nach u, sowie auch nach v, und addiert, so erhält man die Relation (1).

Endlich sei noch bemerkt, daß das Additionstheorem (5) direkt aus dem 7. Satze von Kap. 10, § 6 abgeleitet werden kann, ohne die ζ- und σ-Funktionen überhaupt zu definieren, wie ja auch in der ersten Aufgabe des § 7 ebenda bereits hervorgehoben ist. Sei nämlich $\alpha \neq 0$ ein beliebiger Punkt des Periodenparallelogramms, und man bilde die Funktion $\wp(z+\alpha)$, welche dann in eine gerade und eine ungerade Funktion gespalten werden möge:

$$\wp(z+\alpha) = \tfrac{1}{2}[\wp(z+\alpha) + \wp(z-\alpha)] + \tfrac{1}{2}[\wp(z+\alpha) - \wp(z-\alpha)].$$

Die gerade Funktion ist von der 4ten Ordnung und läßt sich daher als der Quotient zweier quadratischer Polynome in $\wp(z)$ ausdrücken. Ferner überzeugt man sich leicht, daß das Nennerpolynom (von einem konstanten Faktor abgesehen) nichts anderes sein kann als $[\wp(z)-\wp(\alpha)]^2$. Setzt man also die Gleichung an:

$$\tfrac{1}{2}[\wp(z+\alpha) + \wp(z-\alpha)] = \frac{a\wp(z)^2 + b\wp(z) + c}{[\wp(z) - \wp(\alpha)]^2},$$

wo a, b, c unbestimmte Konstante bedeuten, und entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von z, so ergibt der Vergleich der Koeffizienten der ersten drei Terme genügende Bestimmungsgleichungen für diese Konstanten.

Indem man weiterhin mit der Funktion

$$\frac{\tfrac{1}{2}[\wp(z+\alpha) - \wp(z-\alpha)]}{\wp'(z)}$$

in ähnlicher Weise verfährt, gewinnt man schließlich das gewünschte Resultat.

§ 6. Unendliche Produkte.

Unter einem unendlichen Produkte versteht man eine unbegrenzte Folge reeller oder komplexer Größen,

$$f_1, f_2, \dots,$$

womit man folgendermaßen verfahren soll: man bilde das Produkt

$$p_n = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$$

und lasse dann n ins Unendliche wachsen. Nun liegt es nahe, in Anlehnung an die Definition einer unendlichen Reihe, zu sagen: nähert sich p_n dabei einem Grenzwerte, so soll das Produkt konvergent, sonst aber divergent heißen. Durch diese Definition würden indessen Produkte als konvergent zugelassen werden, welche, ohne irgend einem nützlichen Zwecke zu dienen, sowohl die Beweise als auch die Sätze umständlich machen würden und aus diesem Grunde durch spätere Festsetzungen wieder ausgeschieden werden müßten. Solche Produkte wollen wir lieber von vornherein nicht aufnehmen, und darum fassen wir unsere Definition der Konvergenz, wie folgt.

Definition. Verschwindet höchstens eine endliche Anzahl der Größen f_n und konvergiert das Produkt

$$f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdot \dots \cdot f_{m+r},$$

wo $f_n \neq 0$ für $n > m$ ist, bei festem m und unbegrenzt wachsendem r gegen einen von 0 verschiedenen Grenzwert P_m, so heißt das vorgelegte unendliche Produkt *konvergent*, und wir legen ihm den Wert

$$P = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_m \cdot P_m = \lim_{n=\infty} p_n$$

bei; in allen anderen Fällen heißt es *divergent*. Man schreibt das Produkt, sei es konvergent oder divergent, in der Form:

$$f_1 \cdot f_2 \cdots \quad \text{bzw.} \quad \prod_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Beispiele. Das Produkt

$$\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdots$$

konvergiert gegen den Wert $\frac{1}{2}$. Dagegen divergiert das Produkt

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots$$

gegen 0.

Ein unendliches Produkt hat hiernach mit endlichen Produkten die Eigenschaft gemeinsam, daß es nur dann verschwindet, wenn einer seiner Faktoren verschwindet. Dagegen wäre es ein Irrtum zu glauben, daß umgekehrt jedes unendliche Produkt, welches einen verschwindenden Faktor enthält, den Wert 0 hätte. Dazu muß ja das Produkt erst überhaupt konvergieren.

Die theoretischen Entwicklungen über unendliche Produkte[1]) stützen sich wohl am einfachsten auf den folgenden grundlegenden Lehrsatz.

Satz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines unendlichen Produkts*

$$f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots$$

besteht bei passender Wahl des Wertes von $\log f_n$ *in der Konvergenz der Hilfsreihe*

$$\log f_{m+1} + \log f_{m+2} + \cdots,$$

wo $f_n \neq 0$ *für* $n > m$ *ist. Im Falle der Konvergenz ist außerdem noch*

$$\log P_m = \log f_{m+1} + \log f_{m+2} + \cdots,$$

wo

$$P_m = f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdot \cdots$$

a) Die Bedingung ist notwendig. Nach Voraussetzung konvergiert hier das Produkt, und $P_m \neq 0$. Man setze

$$p_{m,r} = f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdot \cdots \cdot f_{m+r}$$

und lege $\log P_m$ einen bestimmten Wert $\xi + \eta i$ bei. Um den Punkt $z = P_m$ beschreibe man ferner einen den Punkt $z = 0$ nicht umfassenden Kreis K. Dann liegen die Punkte $p_{m,r}$, $r \geqq r_0$, bei passender Wahl von r_0 alle in K, und infolgedessen läßt arc $p_{m,r}$ eine Bestimmung η_r zu, welche sich dem absoluten Betrage nach von η um weniger als $\pi/2$ unterscheidet. Dementsprechend wird man die Bestimmung bevorzugen:

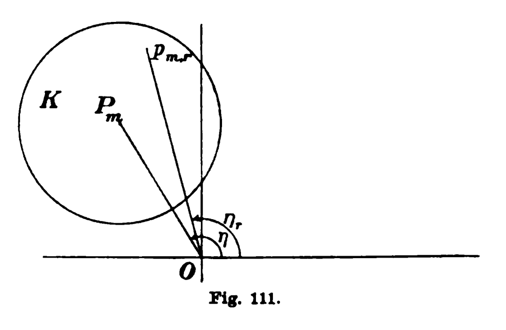


Fig. 111.

1) Allgemeine Kriterien für die Konvergenz und die Divergenz der unendlichen Produkte hat zuerst Cauchy gefunden, indem er sich, wie auch hier im Texte geschieht, der Hilfsreihe $\Sigma \log f_n$ bediente, *Analyse algébrique,* 1821, S. 561, Note IX. Weierstraß gab eine direkte Behandlung, ohne eine transzendente

$$\log p_{m,r} = \log |p_{m,r}| + \eta_r i, \qquad r > r_0,$$

und im übrigen $\log f_n$ so wählen, daß

$$\log p_{m,r} = \log f_{m+1} + \cdots + \log f_{m+r}, \qquad r \geqq 1,$$

wird. Nun behaupte ich: die linke Seite dieser Gleichung nähert sich beim Grenzübergange $r = \infty$ einem Grenzwerte und zwar dem Werte $\log P_m = \xi + \eta i$:

$$\lim_{r=\infty} \log p_{m,r} = \log \left(\lim_{r=\infty} p_{m,r}\right) = \xi + \eta i.$$

In der Tat bildet diejenige Bestimmung von

$$\log z = \log |z| + i \operatorname{arc} z$$

in den inneren Punkten von K, wofür

$$\eta - \frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} z < \eta + \frac{\pi}{2}$$

ist, eine in K eindeutige stetige Funktion von z. Die in Rede stehenden Bestimmungen von $\log p_{m,r}$ und $\log P_m$ fallen aber gerade mit den Werten dieser Funktion in den Punkten $z = p_{m,r}$ und $z = P_m$ zusammen, womit denn die Richtigkeit der Behauptung dargetan ist. Demgemäß konvergiert auch die bewußte Reihe und es ist

$$\log P_m = \log f_{m+1} + \log f_{m+2} + \cdots,$$

w. z. b. w. Dabei ist dem $\log f_{m+r}$, $r > r_0$, der Hauptwert beigelegt worden, d. h. es ist $-\pi < \Re\left(\frac{1}{i}\log f_{m+r}\right) < \pi$.

b) Die Bedingung ist auch hinreichend. Nach Voraussetzung konvergiert also hier die Reihe. Sei

$$S_{m,r} = \log f_{m+1} + \cdots + \log f_{m+r},$$

$$S_m = \log f_{m+1} + \cdots.$$

Dann ist

$$e^{S_{m,r}} = f_{m+1} \cdots f_{m+r},$$

und da e^z eine eindeutige stetige Funktion ist, so muß

$$\lim_{r=\infty} e^{S_{m,r}} = e^{\lim\limits_{r=\infty} S_{m,r}} = e^{S_m}$$

Funktion heranzuziehen, *Journ. für Math.*, Bd. 51 (1856), S. 18 = *Werke*, Bd. 1, S. 173; hierüber vergleiche man auch Tannery et Molk, *Fonctions elliptiques*, Bd. 1. Geschichtliches über die unendlichen Produkte, welche auf Vieta, 1646, zurückgehen, findet man bei Pringsheim, *Enzyklopädie*, I A 3, Nr. 41, S. 111.

sein. Darum konvergiert das unendliche Produkt, und es ist

$$f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdots = e^{S_m}.$$

Zusatz. *Damit ein unendliches Produkt konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim p_{n,r} = 1$$

sei, wenn n ins Unendliche wächst und r sich dabei in völlig willkürlicher Weise ändert.

Der Zusatz ist eine unmittelbare Folge des Lehrsatzes nebst Theorem 2 von Kap. 1, § 7.

Indem man

$$f_n = 1 + a_n$$

setzt, ergibt sich hiermit für die Konvergenz eines Produkts als notwendig, daß

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

sei.

2. Satz. *Die Reihen*

a) $$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots, \qquad a_{m+r} \neq -1,$$

b) $$\log(1 + a_{m+1}) + \log(1 + a_{m+2}) + \cdots,$$

wobei dem $\log(1 + a_{m+r})$ *stets der Hauptwert beigelegt wird, konvergieren gleichzeitig absolut.*

In der Tat ist, sofern die Reihen nicht schon mit einer endlichen Anzahl von Termen abbrechen,

$$\lim_{a_n=0} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1,$$

wobei wir uns alle Terme aus beiden Reihen fortgelassen denken, wofür $a_n = 0$ ist. Konvergiert also eine dieser Reihen absolut, so gilt dies auch von der anderen (vgl. S. 504, Anm.), w. z. b. w.

Zusatz. *Das unendliche Produkt*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots$$

konvergiert stets dann, wenn die Reihe

$$a_1 + a_2 + \cdots$$

absolut konvergiert.

Mit Hilfe der Relation

$$\log p_{m,r} = \sum_{i=m+1}^{m+r} \log(1 + a_i)$$

ergibt sich leicht der Beweis folgenden Satzes.

Satz 3. *Sind die Größen a_n alle reell und von einerlei Vorzeichen, und divergiert ferner die Reihe*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

so divergiert auch das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n),$$

und zwar gegen $+\infty$, falls $a_n \geqq 0$ ist, aber gegen 0, falls $-1 < a_n \leqq 0$ ist.

Definition. Das unendliche Produkt

$$(1 + a_1)\ (1 + a_2)\cdots$$

heißt *absolut konvergent,* wenn das Produkt

$$(1 + |a_1|)\ (1 + |a_2|)\cdots$$

konvergiert. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe

$$a_1 + a_2 + \cdots$$

absolut konvergiert.

4. Satz. *Die Faktoren eines unendlichen Produkts können dann und nur dann beliebig umgestellt werden, ohne den Wert des Produkts zu ändern, wenn das Produkt absolut konvergiert.*

Der Beweis ergibt sich sofort mittels der logarithmischen Hilfsreihe.

Bezüglich des Produkts zweier oder mehrerer, auch einer unendlichen Anzahl unendlicher Produkte gelten analoge Sätze, wie bei der Summe mehrerer unendlicher Reihen. Ebenso läßt sich der Satz betreffend das Einsetzen bzw. Weglassen von Klammern bei den Reihen sofort auf die Produkte übertragen.

§ 7. Fortsetzung: funktionentheoretische Eigenschaften.

Wir wenden uns jetzt zu der Betrachtung unendlicher Produkte, deren Faktoren von einer komplexen Veränderlichen z abhängen.

Definition. Sei

$$f_1(z)\, f_2(z)\cdots$$

ein unendliches Produkt, dessen Faktoren alle in einem Bereich S eindeutig erklärt sind. Dann heißt das Produkt *gleichmäßig konvergent*, falls das Teilprodukt

$$p_{n,r}(z) = f_{n+1}(z) \cdots f_{n+r}(z)$$

bei wachsendem n und willkürlich sich änderndem r gleichmäßig gegen den Grenzwert 1 konvergiert. M. a. W. soll einem beliebig vorgegebenen positiven ε stets eine feste natürliche Zahl m entsprechen, derart, daß

$$|f_{n+1}(z) \cdots f_{n+r}(z) - 1| < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $n \geqq m$ ist, gleichviel welchen Wert r auch annehmen und welcher Punkt z auch von S sein möge.[1])

An Stelle des Bereiches S kann selbstverständlich jede andere Punktmenge treten.

Daß die gleichmäßige Konvergenz schon die schlichte Konvergenz nach sich zieht, erkennt man unmittelbar aus dem Zusatze unter dem 1. Satze, § 6.

Nimmt man $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und bezeichnet man einen zugehörigen Wert von m mit μ, so konvergiert das Teilprodukt

$$f_{n+1}(z)\, f_{n+2}(z) \cdots$$

für jeden festen Wert von $n \geqq \mu$ gegen einen nicht verschwindenden Grenzwert, $P_n(z)$. Wir wollen auch zeigen, daß die Veränderliche

$$s(z, r) = f_{\mu+1}(z) \cdots f_{\mu+r}(z)$$

bei wachsendem r im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig konvergiert In der Tat ist

$$s(z, r') - s(z, r) = p_{\mu,r}(z)\ [p_{\mu+r,\, r-r'}(z) - 1], \qquad r' > r.$$

Nun ist aber

$$|p_{\mu,r}(z) - 1| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{also} \quad |p_{\mu,r}(z)| < \tfrac{3}{2},$$

sowie

$$|p_{\mu+r,\, r'-r}(z) - 1| < \varepsilon, \qquad \mu + r \geqq m,$$

wobei nun ε wieder beliebig klein genommen ist und m eine zugehörige

---

1) Weierstraß, *Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1876, § 2 = *Werke*, Bd. 2, S. 199.

Zahl bedeutet. Daraus folgt, daß

$$|s(z, r') - s(z, r)| < \tfrac{3}{2}\varepsilon, \quad m - \mu \leqq r, r',$$

ist, womit denn die Richtigkeit der Behauptung dargetan ist.

1. Satz. *Sind die Faktoren eines unendlichen Produkts*

$$f_1(z) f_2(z) \cdots$$

in einem Bereiche S analytisch, und konvergiert das Produkt gleichmäßig in S, so stellt es eine in S analytische Funktion $F(z)$ vor.

In der Tat subsumiert sich nach dem Vorausgeschickten die Veränderliche

$$s(z, r) = f_{\mu+1}(z) \cdots f_{\mu+r}(z),$$

wo μ die obige Bedeutung beibehält, unter den 6. Satz von Kap. 7, § 5. Demnach verhält sich die Grenzfunktion

$$\lim_{r=\infty} s(z, r) = P_\mu(z) = f_{\mu+1}(z) f_{\mu+2}(z) \cdots$$

analytisch in S, und zwar verschwindet $P_\mu(z)$ nirgends in S, da

$$|p_{\mu, r}(z) - 1| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{also} \quad \tfrac{1}{2} < |p_{\mu, r}(z)|, \quad \tfrac{1}{2} \leqq |P_\mu(z)|$$

ist. Hieraus ergibt sich sowohl der soeben ausgesprochene Satz als auch der folgende

2. Satz. *Zu den Voraussetzungen des 1. Satzes trete noch die weitere hinzu, daß kein Faktor $f_n(z)$ identisch verschwinde. Dann werden die in S gelegenen Wurzeln von $F(z)$ sowohl der Lage als auch der Ordnung nach durch die Wurzeln der einzelnen Faktoren des unendlichen Produkts bestimmt.*

3. Satz. *Ist $f_n(\zeta)$ für die Punkte einer beliebigen Punktmenge $\{\zeta\}$ mit der Häufungsstelle $\bar{\zeta} = \lim \zeta$ definiert, und nähert sich $f_n(\zeta)$ für jeden festen Wert von n einem Grenzwert U_n, wenn ζ dem Punkte $\bar{\zeta}$ zustrebt:*

$$\lim_{\zeta=\bar{\zeta}} f_n(\zeta) = U_n;$$

konvergiert ferner das unendliche Produkt

$$f_1(\zeta) f_2(\zeta) \cdots$$

gleichmäßig in $\{\zeta\}$; so konvergiert das unendliche Produkt

$$U_1 U_2 \cdots$$

und es ist

$$\lim_{\zeta=\overline{\zeta}} f_1(\zeta) f_2(\zeta) \cdots = U_1 U_2 \cdots .$$

Da für einen bestimmten Wert von n: $n = \mu$, S. 529 das Teilprodukt

$$s(\zeta, r) = f_{\mu+1}(\zeta) f_{\mu+2}(\zeta) \cdots f_{\mu+r}(\zeta)$$

im gewöhnlichen Sinne gleichmäßig konvergiert, so folgt der Satz nach dem Theorem von Kap. 12, § 10 zunächst für letzteres, und nun geht man ohne Schwierigkeit zum ursprünglichen Produkt über.

4. Satz. *Sei*

$$f_1(z) f_2(z) \cdots$$

ein unendliches Produkt, dessen Faktoren in einem Bereiche S, von einer endlichen Anzahl derselben abgesehen, von 0 verschieden bleiben; analytisch, oder gar stetig brauchen sie nicht zu sein. Damit dann das Produkt gleichmäßig in S konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe

$$\sum_{n=N}^{\infty} \log f_n(z)$$

gleichmäßig in S konvergiert, wobei N so groß genommen wird, daß für $n \geqq N$ der Faktor $f_n(z) \neq 0$ ist.

a) Die Bedingung ist notwendig. Aus der Voraussetzung

$$|f_{n+1}(z) \cdots f_{n+r}(z) - 1| < \varepsilon, \qquad n \geqq m,$$

folgt nämlich, sofern man nur $\varepsilon < 1$ annimmt, da der Punkt

$$w = f_{n+1}(z) \cdots f_{n+r}(z)$$

im Kreise $|w - 1| < \varepsilon$ liegt, daß $f_n(z) \neq 0$ ist. Bei geeigneter Wahl der Bestimmung von $\log f_n(z)$ wird also nach Kap. 6, § 15, Aufgabe 5, S. 256

$$|\log f_{n+1}(z) + \cdots + \log f_{n+r}(z)| = |\log w| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \arcsin \varepsilon$$

ausfallen, und hiermit ist dieser Fall erledigt.

b) Die Bedingung ist hinreichend. Nach Voraussetzung ist jetzt

$$|\log f_{n+1}(z) + \cdots + \log f_{n+r}(z)| < \eta, \qquad n \geqq m.$$

Nun ist

$$f_{n+1}(z) \cdots f_{n+r}(z) = e^{\log f_{n+1}(z) + \cdots + \log f_{n+r}(z)}.$$

Die Funktion e^Z ist aber stetig und hat den Wert 1 im Punkte $Z = 0$.

Demnach entspricht einem beliebig vorgegebenen positiven ε eine zweite positive Größe η, derart, daß

$$|e^Z - 1| < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $|Z| < \eta$ genommen wird.

Das Weierstraßsche Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer unendlichen Reihe, Kap. 3, § 4 überträgt sich auf unendliche Produkte, wie folgt.

5. Satz. Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. *Sei*

$$f_1(z) f_2(z) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + a_n(z)], \qquad f_n(z) = 1 + a_n(z),$$

ein unendliches Produkt, dessen Faktoren in einem Bereiche S eindeutig erklärt sind. Genügt dann die Reihe

$$a_1(z) + a_2(z) + \cdots$$

dem Weierstraßschen Kriterium:

$$|a_n(z)| \leqq M_n, \qquad n \geqq m,$$

wo ΣM_n eine konvergente Reihe positiver Konstanten ist, so konvergiert das unendliche Produkt gleichmäßig in S.

An Stelle von S darf eine beliebige Punktmenge treten.

Zum Beweise bedienen wir uns des vorhergehenden Satzes und haben also nachzuweisen, daß die Reihe

$$(6) \qquad \sum_{n=N}^{\infty} \log f_n(z)$$

gleichmäßig konvergiert. Man nehme $m \geqq N$ so groß, daß

$$M_n < 1, \qquad n \geqq m,$$

ausfällt, und verstehe ferner unter $\log[1 + a_n(z)]$, $n \geqq m$, stets den Hauptwert. Dann wird nach Kap. 6, § 15, Aufgabe 5

$$|\log(1 + a_n(z))| < \frac{M_n}{1 - M_n} + \text{arc sin } M_n = \mathfrak{M}_n, \qquad n \geqq m.$$

Des weiteren konvergiert die Reihe positiver Konstanten:

$$(7) \qquad \mathfrak{M}_m + \mathfrak{M}_{m+1} + \cdots,$$

denn $\mathfrak{M}_n : M_n$ nähert sich ja einem Grenzwerte, wenn $n = \infty$ wird.

Infolgedessen läßt sich das Weierstraßsche Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (6) anwenden, indem man sich eben der Reihe (7) bedient.

Zusatz. *Unter den Voraussetzungen des Satzes konvergiert das unendliche Produkt auch absolut.*

In der Tat genügt das Produkt den Bedingungen des 2. Satzes von § 6.

Aufgabe. Man beweise den folgenden Satz: Konvergiert das unendliche Produkt

$$F(z) = f_1(z) f_2(z) \cdots,$$

dessen Faktoren in einem Bereiche S analytisch sind und nicht identisch verschwinden, gleichmäßig in S, so ist dort, abgesehen von etwaigen Wurzeln der Funktion $F(z)$,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} + \cdots.$$

§ 8. Unendliche Produkte für sin z, $\sigma(z)$, usw.

Aus der Partialbruchzerlegung für $\cot z$, § 1, erhält man durch Integration ein unendliches Produkt für $\sin z$:

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum{}' \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right],$$

$$\int \cot z\, dz = \log \sin z = \log z + \int_0^z \sum{}' \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right] dz + C$$

$$= \log z + \sum{}' \left[\log(z - n\pi) - \log(-n\pi) + \frac{z}{n\pi}\right] + C.$$

Dabei denken wir uns einen endlichen einfach zusammenhängenden, den Punkt $z = 0$ im Innern enthaltenden Bereich S, welcher keinen der Punkte $z = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$, umfaßt. Die Funktionen $\log \sin z$, $\log z$ sind in S mehrdeutig, während die übrigen in der letzten Formel auftretenden Funktionen, welche ja aus den Integralen der entsprechenden Terme der früheren Reihe bestehen sollen, in S eindeutig und analytisch sind. Im übrigen ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz letzterer Reihe in S direkt aus der gleichmäßigen Konvergenz der ursprünglichen Reihe in S.

Die vorstehende Relation ist gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\sin z = kz \prod{}' \left[1 - \frac{z}{n\pi}\right] e^{\frac{z}{n\pi}}$$

wo es nur noch übrig bleibt, den Wert von $k = e^C$ zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten mittels der Relation

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Da nämlich das unendliche Produkt nach § 7, 4. Satz in S gleichmäßig konvergiert, so schließt man daraus, daß $k = 1$ ist.

Im übrigen konvergiert das Produkt absolut. Schreibt man nämlich den allgemeinen Faktor in der Form $1 + a_n$ und vergleicht man die Reihe Σa_n mit der Reihe $\Sigma 1/n^2$, so stellt sich heraus, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{1/n^2}$$

existiert. Demgemäß kann man die Faktoren des Produkts so umordnen, daß die Exponentialfaktoren sich gegenseitig aufheben. Hierdurch gelangt man zu den definitiven Formeln:[1])

$$\sin z = z \prod{}' \left[1 - \frac{z}{n\pi}\right] e^{\frac{z}{n\pi}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right].$$

Ersetzt man noch z durch πz, so kommt

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod{}' \left[1 - \frac{z}{n}\right] e^{\frac{z}{n}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Wie beim Beweise des 1. Satzes, § 4, so kann man auch hier mehrdeutiger Funktionen entraten.

Das unendliche Produkt für $\sigma(z)$. Verfährt man in ähnlicher Weise mit der Reihe für $\zeta(z)$, § 2, so erhält man zunächst:

$$\int \zeta(z)\, dz = \log z + \sum{}' \left[\log(z - \Omega) - \log(-\Omega) + \frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2}\right] + C,$$

$$\sigma(z) = e^{\int \zeta(z)\, dz} = kz \prod{}' \left[1 - \frac{z}{\Omega}\right] e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2}}.$$

---

1) Die zweite Form des unendlichen Produkts findet sich bei **Euler**, *Inroductio in analysin infinitorum*, Bd. 1, 1748, Nr. 158. S. 120.

Das unendliche Produkt konvergiert absolut für jeden Wert von z, und in jedem endlichen Bereiche S konvergiert es außerdem noch gleichmäßig. Beides beweist man ohne Mühe mit Hilfe der absolut konvergenten Reihe $\Sigma\Omega^{-3}$, vgl. § 2. Aus der Bedingung

$$\lim_{z=0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1$$

findet man ferner $k = 1$. Hiermit erhält man als definitive Formel:

$$(1) \qquad \sigma(z) = z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2}}.$$

Im voraufgehenen Kapitel habe ich mir es angelegen sein lassen, die theoretische Grundlage für die periodischen Funktionen zu schaffen. Dem Leser sei es jetzt als eine wertvolle Übung empfohlen, sich selbständig die Theorie der ellipitischen Thetafunktionen zu entwickeln, und zwar von ihrer funktionentheoretischen Definition, nicht von den Reihen und Produkten aus.[1]) Dabei wird man direkt zu jenen Formeln geführt, welche die Jacobischen Theta- mit den Weierstraßschen Sigmafunktionen verbinden.[2]) Im übrigen sei auf die mannigfachen Reihen- und Produktentwicklungen für die trigonometrischen Funktionen verwiesen, wie sie sich beispielsweise bei Biermann, *Analytische Funktionen*, Kap. 6 finden.

Aufgabe. Man zeige, daß die Funktion $\cos z$ sich durch das unendliche Produkt darstellen läßt:[3])

$$\cos z = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(n+\frac{1}{2})\pi}\right) e^{\frac{z}{(n+\frac{1}{2})\pi}} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right).$$

§ 9. Die Weierstraßsche Abhandlung vom Jahre 1876.[4])

In der Algebra lernt man eine ganze rationale Funktion in ein Produkt linearer Faktoren zerlegen. Die soeben besprochenen Entwicklungen von $\sin z$ und $\sigma(z)$ in unendliche Produkte lassen sich

1) In dieser Hinsicht vergleiche man wieder das Buch von Weber, *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen.*

2) Man vergleiche hierüber H. A. Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen.*

3) Euler, ibid.

4) „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen", *Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1876; *Werke*, Bd. 2, S. 77.

als eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf ganze transzendente Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen ansehen. Dabei besteht indessen der allgemeine Faktor nicht mehr, wie bei den Polynomen, aus einer linearen Funktion, sondern es tritt noch ein Exponentialfaktor hinzu:

$$\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}, \qquad \left(1-\frac{z}{\Omega}\right)e^{\frac{z}{\Omega}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2}}.$$

Dieser letzte Faktor ist es eben, welcher die Konvergenz des Produkts erzeugt.

Von dieser Bemerkung ausgehend[1]) warf Weierstraß die Frage auf, ob es nicht allgemein bei einer beliebig vorgeschriebenen Verteilung der Nullstellen, vorausgesetzt nur, daß sich dieselben nirgends im Endlichen häufen, stets eine transzendente Funktion gibt, deren Wurzeln dieser Verteilung entsprechen. Auch die Ordnung der einzelnen Nullstellen soll willkürlich vorgegeben werden. Es stellte sich heraus, daß die Frage in der Tat zu bejahen ist. Das Ergebnis sprechen wir, wie folgt, aus.

Der Weierstraßsche Satz. *Gegeben sei eine unendliche Punktmenge* $a_1, a_2, \ldots, \lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$. *Jedem Punkte* a_n *derselben werde eine natürliche Zahl* μ_n *zugeordnet. Dann gibt es stets eine ganze transzendente Funktion* $G(z)$, *welche im Punkte* a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *eine Wurzel* μ_n^{ter} *Ordnung besitzt und sonst nirgends verschwindet. Im übrigen wird die allgemeinste derartige Funktion* $\Gamma(z)$ *durch die Formel gegeben:*

$$\Gamma(z) = e^{g(z)}\, G(z),$$

wo $G(z)$ *eine spezielle Funktion von der genannten Beschaffenheit und* $g(z)$ *eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion ist.*

Es handelt sich hier vor allem um einen Existenzsatz. Indem wir uns die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ so geordnet denken, daß $|a_{n+1}| \geq |a_n|$

---

1) Dieser Gedanke geht auf Gauß zurück, welcher sich zur Definition der Γ-Funktion folgender Formel bedient hatte:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-z} = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z\log\frac{n+1}{n}};$$

„Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\,\beta}{1\,\gamma}x+\cdots$“, *Commentationes soc. reg. sci. Gott. rec.*, Bd. 2 (1812) = *Werke*, Bd. 3 (1866), S. 145; Übersetzung ins Deutsche von H. Simon. Wie Pringsheim, *Enzyklopädie*, I A 3, S. 112, bemerkt hat, findet sich das vorstehende Produkt bereits bei Euler, Brief an Goldbach, 13. Okt. 1729.

ist, nehmen wir eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ derart an, daß die Reihe

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{m_n}}{a_n^{\;m_n+1}}$$

für alle Werte von z absolut konvergiert.[1]) Im Falle $a_{2k+1} = k\pi$, $a_{2k} = -k\pi$ ist, genügt es, wie wir bereits gesehen haben, durchweg $m_n = 1$ zu setzen, während für $a_n = \Omega = m\omega + m'\omega'$, $m_n = 2$ genommen werden darf. Bei allen Verteilungen der Nullstellen, welche in der Praxis eine Rolle spielen, kommt man schon, wie hier, mit einem festen Werte $m_n = m$ aus. Hingegen wird m_n im allgemeinen Falle, wo sich die Nullstellen in der Nähe des Punktes ∞ stärker verdichten, zugleich mit n ins Unendliche wachsen müssen. Man erhält offenbar stets eine brauchbare Reihe von Zahlen m_n, indem man einfach $m_n = n$ setzt, denn es wird dann

$$\lim_{n=\infty} \frac{z^{m_{n+1}}/a_{n+1}^{m_{n+1}+1}}{z^{m_n}/a_n^{m_n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{z}{a_{n+1}} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n+1} = 0,$$

womit denn die Konvergenz erwiesen ist.

Gehen wir jetzt zur Aufstellung einer speziellen Funktion $G(z)$ über, so wird eine solche durch das unendliche Produkt:

$$(2) \qquad G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{g_n(z)}$$

definiert, wo

$$g_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$$

ist. Dabei denken wir uns zunächst μ_n durchweg gleich 1. Dieses Produkt konvergiert nach § 7 für jeden Wert von z absolut und außerdem in jedem endlichen Bereiche S gleichmäßig. Erinnern wir uns nämlich der Reihenentwicklung:

$$\log(1 - Z) = -Z - \frac{Z^2}{2} - \frac{Z^3}{3} - \ldots -, \qquad |Z| < 1,$$

bezeichnen ferner mit ϱ die obere Grenze von $|z|$ für die Punkte von S, und nehmen endlich N so, daß

$$|a_n| > \varrho, \qquad n \geqq N,$$

---

1) Sollte insbesondere $a_1 = 0$ sein, so möge die Summe mit $n = 2$ beginnen. Beim Produkte wird man dann ebenfalls mit $n = 2$ anfangen und zugleich den Faktor z^{μ_1} davor setzen.

ist, so erkennen wir, daß der Hauptwert von $\log f_n(z)$, $n \geqq N$, durch die Formel gegeben wird:

$$\log f_n(z) = \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + g_n(z)$$
$$= -\frac{1}{m_n+1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+1} - \frac{1}{m_n+2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n+2} - \cdots.$$

Es handelt sich um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum \log f_n(z)$, und dies wird, wie gewöhnlich, vermöge des Weierstraßschen Kriteriums festgestellt. In der Tat ist

$$|\log f_n(z)| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_n+k}\left(\frac{\varrho}{a_n}\right)^{m_n+k}$$
$$< \frac{1}{m_n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{a_n}\right)^{m_n+k} = \frac{\left(\frac{\varrho}{a_n}\right)^{m_n+1}}{(m_n+1)\left(1-\frac{\varrho}{a_n}\right)}.$$

Setzt man daher das letzte Glied dieser Relation gleich M_n, so konvergiert die Reihe ΣM_n, wie aus Vergleich mit der absolut konvergenten Reihe (1), geschrieben für $z = \varrho$, unmittelbar hervorgeht.[1]

Ist endlich $\mu_n > 1$, so wird man den Punkt a_n μ_n-fach zählen. Oder man darf ihn auch bloß einmal zählen, indem man die Größen m_n so wählt, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n z^{m_n}}{a_n^{m_n+1}} \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n z^{m_n}}{(m_n+1)\, a_n^{m_n+1}}$$

beständig konvergiert. Dann wird man noch $G(z)$ und $g_n(z)$ durch die Ausdrücke des nachstehenden Zusatzes zu ersetzen haben.

Hiermit ist bewiesen, daß durch das unendliche Produkt (2) eine ganze Funktion $G(z)$ definiert wird, wie sie der Satz verlangt. Sei jetzt $\Gamma(z)$ eine beliebige Funktion, welche den Bedingungen des Satzes genügt, und man bilde das Verhältnis $\Gamma(z)/G(z)$. Dadurch wird eine neue ganze Funktion $\mathfrak{G}(z)$ definiert, welche überdies im Endlichen nirgends verschwindet. Demgemäß erweist sich $\mathfrak{G}'(z)/\mathfrak{G}(z)$

---

1) Wie man sieht, genügt es schon, wenn man die Größen m_n so nimmt, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{m_n}}{(m_n+1)\, a_n^{m_n+1}}$$

beständig konvergiert. Im Falle m_n endlich bleiben darf, ist diese Bedingung mit der früheren gleichbedeutend.

ebenfalls als eine ganze Funktion, und daher läßt sich $\mathfrak{G}(z)$ in der Form $e^{g(z)}$ schreiben.

Hieran schließt sich noch der folgende Darstellungssatz. Dabei wird die Funktion $G(z)$ als schon von vornherein vorhanden angesehen, und es handelt sich bloß um einen durch einen bestimmten unendlichen Prozeß gegebenen Ausdruck für dieselbe.

Zusatz. *Jede ganze Funktion $G(z)$ läßt sich durch ein unendliches Produkt darstellen:*[1]

$$G(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\mu_n} e^{g_n(z)},$$

$$g_n(z) = \mu_n \left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}\right],$$

wo μ_n die Ordnung der Wurzel a_n und m_n eine geeignete natürliche Zahl bedeuten. Das Produkt konvergiert absolut für jeden Wert von z und gleichmäßig in jedem endlichen Bereiche der Ebene.

Aus dem soeben bewiesenen Hauptsatze schließt Weierstraß weiter:[2]

Gegeben seien zwei unendliche Punktmengen: $a_1, a_2, \ldots, \lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ $b_1, b_2, \ldots, \lim\limits_{n=\infty} b_n = \infty$; dabei soll nur kein Punkt der ersten Menge mit einem Punkte der zweiten Menge zusammenfallen. Ferner sei jedem Punkte a_n, b_n eine natürliche Zahl μ_n resp. ν_n zugeordnet. Dann gibt es stets eine eindeutige Funktion, welche im Punkte a_n einen Nullpunkt μ_n^{ter} und in b_n einen Pol ν_n^{ter} Ordnung besitzt, und sich sonst im Endlichen analytisch verhält und nicht verschwindet.

Die allgemeinste derartige Funktion $f(z)$ wird durch die Formel gegeben:

$$f(z) = e^{g(z)} \frac{G_1(z)}{G_2(z)},$$

wo $g(z)$, $G_1(z)$, $G_2(z)$ ganze Funktionen sind. Dabei liegen die Wurzeln von $G_1(z)$ und $G_2(z)$ in den Punkten a_n resp. b_n, und weisen dort je die Multiplizität μ_n resp. ν_n auf.

§ 10. Der Mittag-Lefflersche Satz.

Nachdem Weierstraß also gezeigt hatte, daß die Nullpunkte und Pole einer eindeutigen Funktion, welche im Endlichen keine

1) Man vgl. die vorletzte Anmerkung.

2) Eine oder auch beide dieser Punktmengen dürfen endlich sein.

höhere Singularität als Pole besitzt, beliebig vorgeschrieben werden können, indem er die Funktionen durch unendliche Produkte wirklich aufstellte, übertrug Mittag-Leffler den Satz von der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktionen auf transzendente Funktionen, wie folgt.

Der Mittag-Lefflersche Satz.[1] *Vorgelegt sei eine unendliche Punktmenge* $a_1, a_2, \ldots, \lim_{n=\infty} a_n = \infty$, *sowie, dem Punkte* a_n *entsprechend, ein beliebiges Polynom in* $1/(z - a_n)$:

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \frac{A_1^{(n)}}{z-a_n} + \cdots + \frac{A_{\nu_n}^{(n)}}{(z-a_n)^{\nu_n}}, \quad 1 \leqq \nu_n, \quad A_{\nu_n}^{(n)} \neq 0.$$

Dann gibt es stets eine eindeutige Funktion $f(z)$, *welche im Punkte* a_n *einen Pol mit dem Hauptteil* g_n *besitzt und sich sonst im Endlichen analytisch verhält.*

Eine solche Funktion wird durch die unendliche Reihe gegeben:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \gamma_n(z)\right]$$

wo $\gamma_n(z)$ *ein geeignetes Polynom in* z *bedeutet. Die allgemeinste derartige Funktion* $F(z)$ *erhält man dann, indem man*

$$F(z) = f(z) + G(z)$$

setzt, wo $G(z)$ *eine beliebige ganze Funktion ist.*

Es handelt sich hier wiederum vor allem um einen Existenzsatz. Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ denken wir uns so geordnet, daß $|a_{n+1}| \geqq |a_n|$ ist. Sei

$$R_1 < R_2 < \cdots, \qquad \lim_{n=\infty} R_n = \infty,$$

eine Folge positiver reeller Zahlen und sei ferner

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

eine konvergente Reihe positiver Konstanten. Der springende Punkt beim Beweise ist nun der, daß man eine unendliche Folge von Polynomen:

$$\gamma_1(z), \quad \gamma_2(z), \ldots$$

1) *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, Bd. 34 (1877). Den Beweis hat Weierstraß vereinfacht, *Monatsberichte der Berliner Akad.*, Aug. 1880 = *Werke*, Bd. 2, S. 189.

so bestimmen kann, daß die Reihe

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \gamma_n(z)\right]$$

für jeden Wert $z \neq a_n$ konvergiert und zwar so, daß, wenn man einen beliebigen endlichen Bereich S ins Auge faßt und diejenigen Terme von (1) fortläßt, welche in S unstetig werden, die dadurch erhaltene Reihe in S ausnahmslos analytischer Funktionen gleichmäßig in S konvergiert. Dies geschieht, indem man nachweist, daß die Terme von (1), von einer bestimmten Stelle an, dem Weierstraßschen Kriterium genügen:

$$\left|g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \gamma_n(z)\right| < M_n, \qquad n \geqq m,$$

so daß also der durch die Reihe (1) definierten Funktion die Singularitäten der einzelnen Terme aufgeprägt werden.

Um jetzt den Beweis ins einzelne durchzuführen, sei k eine beliebige natürliche Zahl, und man fasse diejenigen Punkte a_n ins Auge, wofür

$$R_k < |a_n| \leqq R_{k+1}$$

ist. Nun kann man g_n in eine Potenzreihe entwickeln:

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

welche im Kreise $|z| < |a_n|$ konvergiert und daher überdies im Kreise $|z| \leqq R_k$ gleichmäßig konvergiert. Dementsprechend spalte man so viele Terme von der letzten Reihe ab,

$$\gamma_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_p z^p,$$

daß der Rest

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \gamma_n(z) = c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \cdots$$

im Kreise $|z| \leqq R_k$ betrachtet, dem absoluten Betrage nach kleiner als M_n bleibt. Sollten Terme vorhanden sein, wofür $|a_n| \leqq R_1$ ist, so werden diese ja nur in endlicher Anzahl auftreten, und da werde denn das entsprechende Polynom $\gamma_n(z)$ identisch gleich 0 gesetzt. Läßt man k jetzt sukzessive die Werte $1, 2, \ldots$ annehmen, so erhält man dadurch eine unendliche Folge von Polynomen der gewünschten Beschaffenheit. Denn, sei S ein beliebiger endlicher Bereich, und man nehme m so groß, daß S im Kreise $|z| \leqq R_m$ liegt. Bildet man dann

die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\gamma_n(z)\right]=\sum_{n=1}^{N-1}(g_n-\gamma_n)+\sum_{n=N}^{\infty}(g_n-\gamma_n),$$

wo N so gewählt wird, daß $|a_N| > R_m$ ist, so verhalten sich die Terme der rechter Hand auftretenden Reihe sämtlich analytisch in S, und die Reihe konvergiert überdies daselbst gleichmäßig. Darum stellt sie eine in S analytische Funktion vor. — Der letzte Teil des Satzes ist evident.

Wie beim Weierstraßschen Satze ein Konvergenz erzeugender Faktor $e^{g_n(z)}$ sich zu dem linearen Faktor $1-\frac{z}{a_n}$ gesellte, so tritt auch hier zum Hauptteil $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ ein Konvergenz erzeugender Term $\gamma_n(z)$ hinzu.

Aus dem Mittag-Lefflerschen Satze kann man den Weierstraßschen Satz herleiten, indem man

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)=\frac{\mu_n}{z-a_n}$$

setzt und den Ausdruck bildet:

$$e^{\int_0^z f(z)\,dz}$$

wo

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mu_n}{z-a_n}-\gamma_n(z)\right],$$

$$\gamma_n(z)=-\mu_n\sum_{k=1}^{m_n}\frac{z^{k-1}}{a_n^{k}}$$

An den Mittag-Lefflerschen Existenzsatz, wie er oben ausgesprochen ist, schließt sich noch der folgende Darstellungssatz.

Zusatz. *Sei $f(z)$ eine eindeutige analytische Funktion von z, welche im Endlichen keine anderen Singularitäten als Pole hat. Dann läßt $f(z)$ eine Partialbruchzerlegung von der Form zu:*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\gamma_n(z)\right]+G(z),$$

wo g_n den Hauptteil des Poles a_n, γ_n ein Polynom, und G eine ganze Funktion bedeuten.

Im Falle der Funktion $\cot z$ kann man beispielsweise $a_{2m} = m\pi$; $a_{2m+1} = -m\pi$ setzen. Dann wird

$$g_{2m}\left(\frac{1}{z-a_{2m}}\right) = \frac{1}{z-m\pi}, \quad \gamma_{2m}(z) = -\frac{1}{m\pi}, \quad m > 0;$$

$$g_{2m+1}\left(\frac{1}{z-a_{2m+1}}\right) = \frac{1}{z+m\pi}, \quad \gamma_{2m+1}(z) = \frac{1}{m\pi}, \quad m > 0;$$

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = \frac{1}{z}, \quad \gamma_1(z) = 0,$$

und es bleibt nur noch übrig, die Funktion $G(z)$ zu bestimmen, um eine neue Herleitung des Entwicklungssatzes, § 1, (II), zu gewinnen. Nun kann man zunächst leicht zeigen, daß die Reihe rechter Hand die Periode π zuläßt, woraus denn folgt, daß die ganze Funktion $G(z)$ auch diese Periode besitzt. In den beiden Endpunkten des Periodenstreifens bleibt fernerhin die Reihe endlich. Denn es ist für $|y| > \pi/2$, $|x| \leqq \pi/2$, und $n \geqq 1$, auf Grund der Relation (III), S. 210

$$\begin{aligned} |z^2 - n^2\pi^2| &= |n\pi - x - iy|\,|n\pi + x + iy| \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(n\pi - x + |y|)\,\frac{1}{\sqrt{2}}(n\pi + x + |y|), \end{aligned}$$

woraus denn folgt, daß

$$\left|\frac{z}{z^2 - n^2\pi^2}\right| < \frac{|y| + \frac{\pi}{2}}{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(n\pi - \frac{\pi}{2} + |y|\right)\right]^2} = 2\,\frac{Y+\pi}{(n\pi + Y)^2},$$

wo $Y = |y| - \pi/2$ ist. Nach einem bekannten Cauchyschen Konvergenzsatz betreffend eine Reihe positiver Terme ist ferner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y+\pi}{(n\pi+Y)^2} < \int_0^{\infty} \frac{Y+\pi}{(\pi x + Y)^2}\,dx = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{Y}.$$

Da auch $\cot z$ in jenen Endpunkten endlich bleibt, so reduziert sich $G(z)$ hiermit auf eine Konstante, und diese hat den Wert 0, weil sowohl die Reihe als auch $\cot z$ ungerade Funktionen sind.

§ 11. Verallgemeinerungen der vorhergehenden Sätze.

Die Sätze der beiden voraufgehenden Paragraphen beziehen sich auf eindeutige Funktionen mit einer einzigen wesentlichen singulären Stelle, welche in den Punkt $z = \infty$ verlegt wurde. Eine erste Verall-

gemeinerung erhält man, wenn man eine eindeutige Funktion mit einer endlichen Anzahl wesentlicher singulärer Stellen in Betracht zieht. Dieser Fall ist auch zugleich von Weierstraß in der genannten Abhandlung von 1876 behandelt worden, sofern wenigstens Quotientendarstellungen in Betracht kommen. Nachdem Picard, Mittag-Leffler u. a. spezielle Fälle untersucht hatten, wo die Anzahl der wesentlichen singulären Punkte ins Unendliche steigt, gelangte sodann Mittag-Leffler zu einer möglichst weitgehenden Verallgemeinerung seines, sowie auch des Weierstraßschen Satzes, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden wollen.

Der verallgemeinerte Mittag-Lefflersche Satz.[1]) *Vorgelegt sei eine isolierte unendliche Punktmenge* $\{a\}$: $a_1, a_2, \ldots$, *deren Ableitung mit* $\{c\}$ *bezeichnet werde.*[2]) *Jedem Punkte* a_n *werde ferner ein Polynom*[3]) *in* $1/(z-a_n)$:

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),$$

willkürlich zugeordnet. Dann gibt es stets eine eindeutige Funktion $f(z)$, *welche in jedem den beiden Mengen* $\{a\}$ *und* $\{c\}$ *nicht angehörigen Punkte* z *analytisch ist und im Punkte* a_n *einen Pol mit dem Hauptteil* $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ *besitzt. Die Funktion* $f(z)$ *wird durch eine unendliche Reihe von der Gestalt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\gamma_n(z)\right]$$

definiert, wobei $\gamma_n(z)$ *eine rationale Funktion von* z *ist.*

Wird die Ebene durch die Menge $\{c\}$ *zerstückelt, so stellt* $f(z)$ *Stücke verschiedener*[4]) *monogener analytischer Funktionen vor.*

---

1) *Acta mathematica*, Bd. 4 (1884), S. 32.

2) Es läßt sich leicht zeigen, daß eine isolierte Menge notwendig abzählbar sein muß. Unter der *Ableitung* einer Punktmenge versteht man die Menge ihrer Häufungsstellen.

3) Allgemeiner kann eine beliebige ganze transzendente Funktion von $1/(z-a_n)$ an Stelle des Polynoms treten. Die Funktion $f(z)$ wird sich dann in der Nähe von a_n als die Summe dieser Funktion und einer in a_n analytischen Funktion darstellen lassen.

4) Im allgemeinen werden wenigstens die Funktionen voneinander verschieden sein. Die Frage, ob im besonderen Falle zwei derartige Stücke nicht doch eventuell ineinander analytisch fortgesetzt werden können, sowie auch ob ein solches Stück nicht am Ende einer mehrdeutigen monogenen analytischen Funktion angehört, mag dahingestellt bleiben.

Der Beweis des ursprünglichen Mittag-Lefflerschen Satzes von § 10 überträgt sich auf diesen Satz, indem man die Cauchy-Taylorsche Reihe einer linearen Transformation unterwirft. An die Entwicklungen von Kap. 6, § 17 anknüpfend, zeichnen wir zwei Punkte $z = \zeta$, c auf, welche beide im Endlichen liegen mögen, und üben dann die lineare Transformation:

(1) $$Z = \frac{z - \zeta}{z - c}$$

aus. Dadurch geht die Kreisschar ii) in die Schar konzentrischer Kreise

(2) $$|Z| = \lambda$$

über, und zwar so, daß das Innere letzteren Kreises demjenigen der beiden Gebiete, in welche die z-Ebene durch den Kreis

(3) $$\left|\frac{z - \zeta}{z - c}\right| = \lambda$$

zerlegt wird, entspricht, in welchem der Punkt $z = \zeta$ liegt.

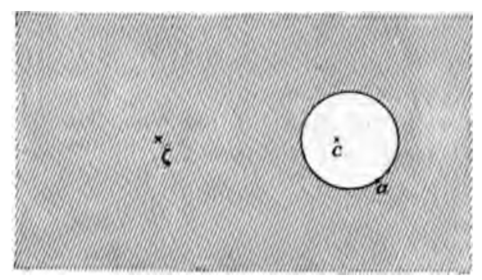


Fig. 112.

Ist nun andererseits eine Funktion $\varphi(z)$ vorgelegt, welche sich im Punkte $z = \zeta$ analytisch verhält, so wird diese in eine Funktion $\Phi(Z)$ übergeführt, welche in $Z = 0$ analytisch ist und sich mithin durch die Cauchy-Taylorsche Reihe darstellen läßt:

(4) $$\Phi(Z) = C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2 + \cdots.$$

Hieraus folgt:

(5) $$\varphi(z) = C_0 + C_1 \frac{z - \zeta}{z - c} + C_2 \left(\frac{z - \zeta}{z - c}\right)^2 + \cdots.$$

Des weiteren kann man den Geltungsbereich letzterer Reihe sofort ablesen. Läßt man nämlich λ, von 0 ausgehend, stetig wachsen, so fegt der Kreis (3) einen Bereich der z-Ebene aus, worin sich $\varphi(z)$ eine Zeitlang analytisch verhält. Wenn $\varphi(z)$ aber einen von c verschiedenen singulären Punkt besitzt, so wird es einen bestimmten Kreis K: $\lambda = \bar{\lambda}$, dieser Schar geben, welcher den Konvergenz- vom Divergenzbereiche der Reihe (5) trennt, wie man aus der konformen Abbildung (1) erkennt. Im Gebiete

(6) $$\left|\frac{z - \zeta}{z - c}\right| < \bar{\lambda}$$

wird dann die Reihe absolut konvergieren, sie wird außerdem gleichmäßig in jedem Bereiche S konvergieren, welcher nebst seinen Randpunkten ganz innerhalb dieses Gebietes liegt. Insbesondere darf S den Punkt $z = \infty$ umfassen, falls dieser Punkt im genannten Gebiete liegt.

Wir haben vorausgesetzt, daß ζ und c beide im Endlichen liegen. Um nun nachträglich die Sonderstellung des Punktes $z = \infty$ aufzuheben, ersetzen wir die Transformation (1) durch die allgemeinere lineare Transformation:

$$Z = k\frac{z-\zeta}{z-c}.$$

Soll jetzt $z = \infty$ an Stelle von $z = \zeta$ treten, so können wir dies durch einen Grenzübergang erreichen, indem wir

$$Z = \frac{k}{-\zeta}\,\frac{\frac{z}{-\zeta}+1}{z-c}$$

setzen und $k = -\zeta$ nehmen. Lassen wir ζ hier unendlich werden, so stellt sich als Grenzfall die Transformation

$$Z = \frac{1}{z-c}$$

ein. — In ähnlicher Weise findet man für $c = \infty$

$$Z = z - \zeta.$$

Hiermit erscheinen uns die beiden Reihenentwicklungen von Kap. 7, § 13 unter einem neuen Gesichtswinkel. Es sind das eben diejenigen speziellen Fälle der hier betrachteten Entwicklungen, wofür einer der Punkte ζ, c im Unendlichen liegt.

Wir sind nunmehr in der Lage, an den eigentlichen Beweis des Satzes zu gehen. Wir wollen annehmen, daß die Menge $\{c\}$ im Endlichen liegt und daß der Punkt $z = \infty$ der Menge $\{a\}$ nicht angehört, — beides ist ja stets durch eine lineare Transformation zu erreichen. Alsdann sei der Bestimmtheit wegen $\zeta = \infty$; wesentlich ist dabei nur, daß ζ weder der Menge $\{a\}$ noch der Menge $\{c\}$ angehört. Dementsprechend wird in der Reihenentwicklung (5)

$$\frac{1}{z-c} \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{z-\zeta}{z-c}$$

treten, während der Mittelpunkt des Kreises K in c zu liegen kommt.

Der Angelpunkt des Beweises besteht nun darin, daß man eine Reihe

$$(7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\gamma_n(z)\right]$$

von folgender Beschaffenheit bildet:

a) $\gamma_n(z)$ soll eine rationale Funktion von z sein, deren Pole in den Punkten von $\{c\}$ liegen;

b) sei S ein beliebiger Bereich, dessen innere und Randpunkte nur sämtlich von den Punkten der Menge $\{c\}$ verschieden sind; dann wird sich die Reihe (7) in zwei Teile zerlegen lassen:

$$(8)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\gamma_n(z)\right]=\left(\sum_{n=1}^{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}\right)\left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-\gamma_n(z)\right],$$

derart, daß die Terme der letzten Reihe sich alle in S analytisch verhalten, und nun soll diese Reihe außerdem gleichmäßig in S konvergieren. Hiernach stellt sie eine in S analytische Funktion vor. Da nun S so gewählt werden kann, daß es einen beliebigen Punkt a_n umfaßt, so folgt, daß die durch (7) definierte Funktion einen Pol mit dem Hauptteil g_n in a_n hat, sich aber in jedem weder $\{a\}$ noch $\{c\}$ angehörigen Punkte analytisch verhält.

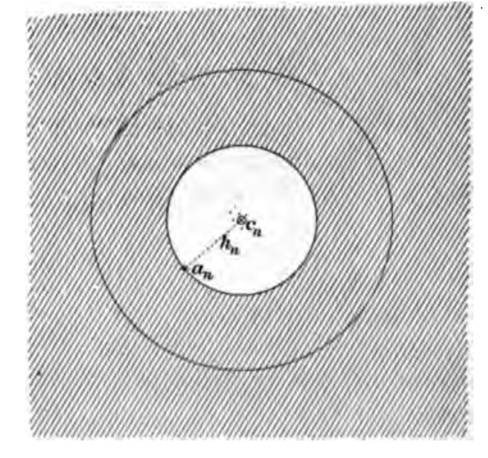


Fig. 113.

Gehen wir jetzt zur wirklichen Aufstellung der Reihe (7) über. Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

eine konvergente Reihe positiver Konstanten. Man fasse ferner einen beliebigen Punkt a_n der Menge $\{a\}$ ins Auge und bezeichne mit c_n denjenigen Punkt der Menge $\{c\}$ (bzw. einen davon, falls es mehrere geben sollte), welcher a_n am nächsten liegt. Dabei brauchen die Punkte c_n selbstredend nicht alle voneinander verschieden zu sein. Sei endlich

$$a_n - c_n = h_n.$$

Wie man sieht, ist

$$\lim_{n=\infty} h_n = 0.$$

Die Funktion g_n werde nun in die Reihe:

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = C_0 + \frac{C_1}{z-c_n} + \frac{C_2}{(z-c_n)^2} + \cdots$$

entwickelt. Nach dem voraufgeschickten Satze konvergiert letztere außerhalb des Kreises $|z-c_n| = h_n$, sie konvergiert fernerhin gleichmäßig außerhalb des Kreises $|z-c_n| = 2h_n$. Demzufolge kann man so viele Terme von ihr abspalten:

$$\gamma_n(z) = C_0 + \frac{C_1}{z-c_n} + \cdots + \frac{C_p}{(z-c_n)^p},$$

daß die Differenz $g_n - \gamma_n$ für alle außerhalb des letztgenannten Kreises befindlichen Punkte z dem absoluten Betrage nach kleiner als M_n bleibt:

$$\left| g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \gamma_n(z) \right| < M_n. \tag{9}$$

Bildet man daher die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \gamma_n(z) \right],$$

so genügt sie den in Rede stehenden Bedingungen. Denn sei H die kleinste Entfernung eines Randpunktes von S von einem Punkte der Menge $\{c\}$. Dann ist $H > 0$, und man braucht nur N so groß zu nehmen, daß

$$2h_n < H, \qquad n \geqq N,$$

bleibt. Für solche Werte von n wird S dann innerhalb des Bereiches liegen, für welchen die Relation (9) besteht, und die rechter Hand stehende Reihe der Zerlegung (8) genügt somit in S dem Weierstraßschen Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.

An den verallgemeinerten Mittag-Lefflerschen Satz schließt sich noch eine analoge Verallgemeinerung des Weierstraßschen Satzes, welche folgendermaßen lautet.[1])

Der verallgemeinerte Weierstraßsche Satz. *Vorgelegt sei eine isolierte unendliche Punktmenge* $\{a\}$: $a_1, a_2, \ldots$; *ihre Ableitung werde mit* $\{c\}$ *bezeichnet. Jedem Punkte* a_n *derselben werde eine natür-*

1) Mittag-Leffler a. a. O.

liche Zahl μ_n zugeordnet.[1]) *Dann gibt es stets eine eindeutige Funktion $F(z)$, welche in jedem von den Punkten der Menge $\{c\}$ verschiedenen Punkte z analytisch ist und überdies im Punkte a_n eine Wurzel μ_n-ter Ordnung besitzt, sonst aber nirgends verschwindet.*

Die Funktion $F(z)$ wird durch ein unendliches Produkt von der Gestalt definiert:

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n - c_n}{z - c_n}\right)^{\mu_n} e^{\mathfrak{g}_n\left(\frac{1}{z - c_n}\right)},$$

$$\mathfrak{g}_n\left(\frac{1}{z - c_n}\right) = \mu_n \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k}\left(\frac{a_n - c_n}{z - c_n}\right)^k,$$

wo c_n einen bestimmten Punkt der Menge $\{c\}$ und m_n eine geeignete natürliche Zahl bedeutet.

Wird die Ebene durch die Menge $\{c\}$ zerstückelt, so stellt $F(z)$ Stücke verschiedener[2]) *analytischer Funktionen vor.*

Man bilde nämlich die Funktion $f(z)$, welche der verallgemeinerte Mittag-Lefflersche Satz für die Punkte a_n und für

$$g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) = \frac{\mu_n}{z - a_n}$$

liefert. Hier wird

$$\gamma_n(z) = \mu_n \sum_{k=1}^{m_n+1} \frac{(a_n - c_n)^{k-1}}{(z - c_n)^k}.$$

Setzt man sodann

$$F(z) = e^{\int_\infty^z f(z)\,dz} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n - c_n}{z - c_n}\right)^{\mu_n} e^{\mathfrak{g}_n\left(\frac{1}{z - c_n}\right)},$$

$$\mathfrak{g}_n\left(\frac{1}{z - c_n}\right) = \mu_n \sum_{k=1}^{m_n} \frac{1}{k}\left(\frac{a_n - c_n}{z - c_n}\right)^k,$$

so wird dadurch allen Forderungen des Satzes genügt.

§ 12. Der Mittag-Lefflersche Anschmiegungssatz.

Aus den im vorhergehenden Paragraphen besprochenen Ergebnissen hat Mittag-Leffler a. a. O. noch eine weitere Verallgemeinerung seines ursprünglichen Satzes hergeleitet, welche den ersten Satz

1) An dem Beweise wird nichts geändert, wenn man unter μ_n auch eine negative ganze Zahl versteht. Läßt man diese Möglichkeit zu, so erhält man zugleich die Verallgemeinerung des letzten Satzes von § 9.

2) Man vgl. die entsprechende Anmerkung zum verallgemeinerten Mittag-Lefflerschen Satze.

jenes Paragraphen als einen speziellen Fall in sich schließt. Das Theorem lautet, wie folgt.

Anschmiegungssatz. *Vorgelegt sei eine isolierte unendliche Punktmenge* $\{a\}: a_1, a_2, \ldots$, *deren Ableitung mit* $\{c\}$ *bezeichnet werde. Jedem Punkte* a_n *der Menge werde ferner eine Funktion*

$$r_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \sum_{k=p_n}^{q_n} A_k^{(n)} (z-a_n)^k, \qquad A_{p_n}^{(n)} \neq 0,$$

zugeordnet, wo q_n *eine natürliche Zahl oder* 0 *und* $p_n \leqq q_n$ *eine ganze Zahl bedeutet. Dann gibt es stets eine eindeutige Funktion* $f(z)$, *welche in jedem den beiden Mengen* $\{a\}$ *und* $\{c\}$ *nicht angehörigen Punkte* z *analytisch ist und sich überdies in der Nähe des Punktes* a_n *so verhält, daß die Differenz*

$$f(z) - r_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

im Punkte a_n *eine Wurzel mindestens* (q_n+1)*-ter Ordnung hat.*

Die Funktion $f(z)$ schmiegt sich also den vorgegebenen Funktionen r_n je bis zum (q_n+1)-ten Grade der Kleinheit in den Punkten a_n an, während man andererseits eine vorgegebene Funktion $F(z)$ durch die beim nachstehenden Beweise explizite dargestellte Funktion $f(z)$ an beliebig vielen isolierten Stellen, in denen sie sich analytisch verhält, je bis zu einem willkürlichen Grade der Kleinheit annähern kann.

Man bilde zunächst nach dem verallgemeinerten Weierstraßschen Satze eine Funktion $\mathfrak{F}(z)$, welche im Punkte a_n eine (q_n+1)-fache Wurzel hat, sonst aber nicht verschwindet, und fasse den Hauptteil g_n des im Punkte a_n befindlichen Poles der Funktion $r_n/\mathfrak{F}$ ins Auge:

$$\frac{r_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)}{\mathfrak{F}(z)} = g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + \omega(z),$$

wo g_n eine ganze rationale Funktion von $1/(z-a_n)$ ist und $\omega(z)$ sich im Punkte $z = a_n$ analytisch verhält. Hierauf stelle man eine Funktion $\mathfrak{f}(z)$ auf, welche den Punkten a_n und den Funktionen g_n nach dem verallgemeinerten Mittag-Lefflerschen Satze entspricht. Dann liefert das Produkt:

$$f(z) = \mathfrak{f}(z)\,\mathfrak{F}(z)$$

die in Aussicht gestellte Funktion $f(z)$. Denn in der Nähe des Punktes a_n ist

$$\mathfrak{F}(z) = (z - a_n)^{q_n+1}\varphi(z), \qquad \mathfrak{f}(z) = g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + \chi(z),$$

wo $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ sich im Punkte a_n analytisch verhalten. Darum wird in der genannten Umgebung

$$f(z) = \mathfrak{F}(z) g_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + \mathfrak{F}(z)\chi(z)$$
$$= r_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + (z - a_n)^{q_n+1}[\chi(z) - \omega(z)]\varphi(z),$$

und hiermit ist der Satz bewiesen.

Dieser Satz läßt sich als eine Verallgemeinerung der *Lagrangeschen Interpolationsformel* ansehen. In der Tat erhält man jene Formel, indem man bloß von einer endlichen Menge (a): $a_1, \ldots a_m$ ausgeht und $p_n = q_n = 0$, $r_n = A_0^{(n)} = A^{(n)}$ setzt. Dann wird

$$\mathfrak{F}(z) = \prod_{n=1}^{m}(z - a_n),$$

$$\frac{r_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)}{\mathfrak{F}(z)} = \frac{A^{(n)}}{\prod\limits_{k=1}^{m}(z - a_k)} = \frac{A^{(n)}/\mathfrak{F}'(a_n)}{z - a_n} + \omega(z),$$

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{n=1}^{m}\frac{A^{(n)}/\mathfrak{F}'(a_n)}{z - a_n}, \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{m}\frac{A^{(n)}}{\mathfrak{F}'(a_n)}\frac{\mathfrak{F}(z)}{z - a_n}.$$

Anwendung. Bei gewissen neueren Untersuchungen über Funktionen, welche durch eine Maclaurinsche Reihe definiert werden, ist folgender Satz von Interesse. Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) z^n$$

eine beliebige (konvergente oder auch beständig divergente) Maclaurinsche Reihe. Dann gibt es stets eine ganze Funktion $g(z)$, welche für $z = 1, 2, \ldots$ den Wert des entsprechenden Koeffizienten der Reihe annimmt. Dieser Satz subsumiert sich als spezieller Fall unter den soeben bewiesenen Satz.

§ 13. Eindeutige Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereiche.

Weierstraß hat den Satz ausgesprochen, daß es zu jedem zweidimensionalen Bereiche T eindeutige Funktionen gibt, welche sich in T analytisch verhalten und in jedem Randpunkte von T eine sin-

guläre Stelle haben. Indem wir vom uneigentlichen Falle absehen, daß T aus der ganzen erweiterten Ebene besteht, wobei denn die betreffende Funktion eine Konstante wäre, bewirken wir nötigenfalls durch eine lineare Transformation, daß der Punkt $z = \infty$ ein innerer Punkt des Bereiches wird.

Auf Grund des verallgemeinerten Weierstraßschen Satzes von § 11 läßt sich nun der Satz, wie folgt, beweisen. Man teile die Ebene nämlich in ein Quadratnetz mit der Seitenlänge 2^{-k} ein und zeichne dann, indem man k zuerst den Wert 1 beilegt, in jedem Quadrate, welches einen Randpunkt von T im Innern oder auf seiner Begrenzung und zugleich auch innere Punkte von T enthält, einen innerhalb T gelegenen Punkt a_n auf. Jetzt schreite man zum Werte $k = 2$ und prüfe jedes der neuen Quadrate, welches innere und Randpunkte von T enthält, darauf hin, ob es bereits einen Punkt a_n umfaßt. Wenn nicht, so zeichne man einen solchen Punkt in ihm auf, d. h. einen Punkt, welcher innerhalb T liegt. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Schrittes gelangt man schließlich zu einer isolierten unendlichen Punktmenge $\{a\}$: $a_1, a_2, \ldots$, welche aus lauter inneren Punkten von T besteht und in jedem Randpunkte von T, sonst aber nirgends eine Häufungsstelle hat.

Bildet man nun eine Funktion $F(z)$ nach dem verallgemeinerten Weierstraßschen Satze, welche eine Wurzel in jedem der Punkte a_n hat und sonst nicht verschwindet, so wird derjenige Teil von $F(z)$, welcher zum Kontinuum T gehört, eine eindeutige monogene analytische Funktion mit dem Definitionsbereiche T ausmachen. Da sich nämlich ihre Nullstellen in jedem Randpunkte von T häufen, so wird von einer analytischen Fortsetzung über T hinaus keine Rede sein können.

§ 14. Über die Entwicklung eines Zweiges einer Funktion nach rationalen Funktionen bezw. Polynomen.

Wir wollen noch zum Schluß dieses Kapitels über eine Untersuchung von Runge[1]) referieren, welche sich durch die Einfachheit der Methoden, sowie durch die Tragweite der Resultate auszeichnet.

Satz von Runge. *Sei T ein beliebiger Bereich der erweiterten z-Ebene, und sei $f(z)$ eine Funktion, welche sich bis auf Pole analytisch in T verhält. Dann läßt sich $f(z)$ in eine Reihe rationaler*

1) „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen“, *Acta Mathematica*, Bd. 6 (1884), S. 229.

Funktionen von z entwickeln, welche in jedem ganz innerhalb T gelegenen, keine Pole von $f(z)$ umfassenden abgeschlossenen Bereiche S gleichmäßig konvergiert. Dabei liegen die Pole der rationalen Funktionen in den Polen von $f(z)$ resp. außerhalb T.

Hängt T insbesondere einfach zusammen, ohne den Punkt ∞ im Inneren zu enthalten, so lassen sich besagte rationale Funktionen durch Polynome ersetzen.

Wir wollen den Fall vorwegnehmen, daß $f(z)$ Pole in T besitzt, indem wir laut des Mittag-Lefflerschen Satzes, § 11, eine solche Funktion

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - \gamma_n),$$

von $f(z)$ abziehen, daß die Differenz

$$F(z) = f(z) - \varphi(z)$$

unter geeigneter Definition von $F(z)$ in den hebbaren Singularitäten ausnahmslos in T analytisch wird. Dabei bedeutet g_n den Hauptteil des Poles a_n, während γ_n eine rationale Funktion von z vorstellt, deren Pole nicht in T liegen. Ist nun der Satz einmal für die Funktion $F(z)$ bewiesen, so ergibt sich ohne weiteres, daß er auch für die ursprüngliche Funktion gilt. Demgemäß dürfen wir uns auf den Fall beschränken, daß $f(z)$ keine Pole in T hat.[1])

Runge geht von der Entwicklung des Bereiches T, welcher zunächst den Punkt ∞ nicht im Inneren enthalten soll, — diese Einschränkung kann ja nachträglich durch eine lineare Transformation aufgehoben werden, — in Teilbereiche T_n, wie dies in Kap. 5, § 3 des näheren besprochen wurde, aus und stellt $f(z)$ zunächst im Bereiche T_n durch die Cauchysche Integralformel dar:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(t)\,dt}{t - z}.$$

Alsdann bemerkt er, daß dieses Integral nichts anderes als der Grenzwert einer rationalen Funktion,

1) Sollte $f(z)$ in isolierten Randpunkten von T Pole haben, so kann man auch diese Pole mit in die Funktion $\varphi(z)$ aufnehmen. Dies ist indessen nicht notwendig, denn die nachstehenden Entwicklungen büßen selbst in diesem Falle nichts von ihrer Beweiskraft ein. Dementsprechend war es auch nicht notwendig, die Funktion $\varphi(z)$ vorweg zu bilden und von $f(z)$ abzuziehen.

(1) $$s_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\mu}\frac{f(t_k)\,\Delta t_k}{t_k - z},$$

ist, wobei, unter Zugrundelegung eines bestimmten Teilungsgesetzes der Randkurve C_n, μ in bestimmte Abhängigkeit von ν tritt und zugleich mit ν ins Unendliche wächst, und daß außerdem $s_\nu(z)$ im Bereiche T_{n-1} gleichmäßig konvergiert. Darauf ersetzt er $s_\nu(z)$, welches doch Pole in T hat, durch eine neue rationale Funktion, die keine Pole in T hat, während sie in T_{n-1} um beliebig wenig von $s_\nu(z)$ abweicht. Hiermit ist der Beweis des ersten Teils des Satzes geliefert. Wenden wir uns jetzt zur Durchführung der Einzelheiten.

Um also zuerst festzustellen, daß $s_\nu(z)$ in T_{n-1} gleichmäßig konvergiert, nehmen wir etwa als Teilungsgesetz für den Rand C_n von T_n dies, daß für $\nu = 1$ jede der $\varkappa$ Randkurven in zwei Bogen zerlegt werden soll, sowie daß die Teilbogen beim Übergang von ν zu $\nu + 1$ sämtlich halbiert werden sollen. Hiermit erhält μ den Wert $\varkappa\, 2^\nu$.

Der Einfachheit der Darstellung halber nehmen wir $\varkappa = 1$. Demgemäß hat man:

$$s_{\nu+\varrho}(z) - s_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{2^\nu}\left\{\sum_{j=1}^{2^\varrho}\frac{f(t_{k,j})\,\Delta t_{k,j}}{t_{k,j} - z} - \frac{f(t_k)\,\Delta t_k}{t_k - z}\right\},$$

wobei mit $t_{k,j}$, $j = 1, \ldots 2^\varrho - 1$, die $2^\varrho - 1$ Teilungspunkte des Bogens (t_k, t_{k+1}) gemeint sind und $t_{k,2^\varrho} = t_{k+1}$, $t_{\mu+1} = t_1$ ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(t)$ längs C_n entspricht nun einem beliebig kleinen positiven ε eine feste Zahl m, derart, daß für alle in Betracht kommenden Werte von k und j

$$|f(t_{k,j}) - f(t_k)| < \varepsilon$$

bleibt, sobald $\nu \geqq m$ genommen wird. Letztere Relation läßt sich auch, wie folgt, schreiben:

$$f(t_{k,j}) = f(t_k) + \zeta, \quad \text{wobei} \quad |\zeta| < \varepsilon.$$

Zugleich möge m so groß gewählt werden, daß die Länge Δl des Bogens (t_k, t_{k+1}) für alle Werte von k kleiner als ε ausfällt. Dann wird

$$t_{k,j} = t_k + \zeta', \qquad |\zeta'| < \varepsilon.$$

Diesen Festsetzungen gemäß wollen wir nun den obigen Summan-

den umformen. Da

$$\frac{f(t_{k,j})}{t_{k,j}-z} = \frac{f(t_k)+\zeta}{t_k+\zeta'-z}$$

und

$$\frac{1}{t_k+\zeta'-z} = \frac{1}{t_k-z} - \frac{\zeta'}{(t_k-z)(t_k+\zeta'-z)}$$

ist, so findet man:

$$\frac{f(t_{k,j})}{t_{k,j}-z} = \frac{f(t_k)}{t_k-z} + \left[\frac{\zeta}{t_k-z} - \frac{f(t_{k,j})\zeta'}{(t_k-z)(t_{k,j}-z)}\right],$$

also

$$\sum_{j=1}^{2\varrho} \frac{f(t_{k,j})\Delta t_{k,j}}{t_{k,j}-z} = \frac{f(t_k)\Delta t_k}{t_k-z} + \sum_{j=1}^{2\varrho}\left[\frac{\zeta}{t_k-z} - \frac{f(t_{k,j})\zeta'}{(t_k-z)(t_{k,j}-z)}\right]\Delta t_{k,j}.$$

Indem wir noch die kürzeste Entfernung eines Punktes der Kurve C_n von einem Punkte der Kurve C_{n-1} mit D, und zugleich den größten Wert von $|f(t)|$ längs C_n mit M bezeichnen, ergibt sich, daß für einen beliebigen Punkt z von T_{n-1}

$$\left|\frac{\zeta}{t_k-z} - \frac{f(t_{k,j})\zeta'}{(t_k-z)(t_{k,j}-z)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{D} + \frac{M\varepsilon}{D^2}$$

ist, woraus man dann die endgültige Abschätzung gewinnt:

$$|s_{\nu+\varrho}(z) - s_\nu(z)| < \frac{(D+M)l}{2\pi D^2}\varepsilon.$$

Dabei bedeutet l die Gesamtlänge des Randes von T_n. Hiermit ist die gleichmäßige Konvergenz von $s_\nu(z)$ im Bereich T_{n-1} dargetan.

Behufs der Entfernung der Pole von $s_\nu(z)$ aus T stellen wir folgenden Hilfssatz auf.

Hilfssatz. *Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, welche ihre sämtlichen Pole im Innern eines endlichen oder unendlichen Bereiches K hat. Dann gibt es eine zweite rationale Funktion $R_1(z)$, welche ihre sämtlichen Pole in einem beliebigen inneren Punkte $\bar{a}$ von K hat und außerhalb K beliebig wenig von $R(z)$ abweicht.*

Es genügt offenbar, den Satz bloß für einen beliebigen Term der Partialbruchzerlegung von $R(z)$:

$$\frac{C_\alpha}{(z-a)^\alpha},$$

zu beweisen. Zu dem Zwecke verbinde man a mit $\bar{a}$ durch eine inner-

halb K verlaufende Kurve L, vgl. Fig. 114, und bezeichne den geringsten Abstand eines Punktes von L von einem Randpunkte von K mit Δ. Sei $\varepsilon < 1$ eine beliebig kleine positive Größe. Dann kann man einen Punkt a_1 von L so wählen, daß für alle Außenpunkte z von K

$$\left|\frac{a - a_1}{z - a_1}\right| < \varepsilon < 1$$

bleibt. Dabei wollen wir uns L vorläufig als im Endlichen gelegen denken. Außerdem wollen wir L noch durch die Punkte $a_1, \ldots a_{k-1}$ in k Bogen zerlegt denken, deren Länge je kleiner als $\Delta \cdot \varepsilon$ ausfällt. Daher wird stets für alle Außenpunkte z

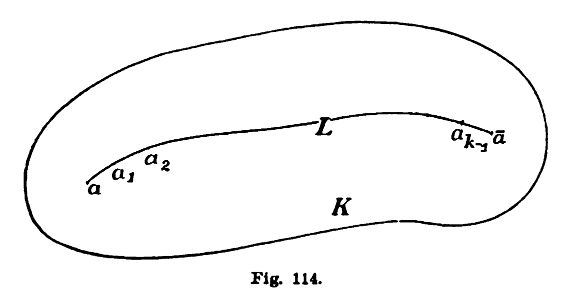


Fig. 114.

$$\left|\frac{a_{i-1} - a_i}{z - a_i}\right| < \varepsilon < 1$$

bleiben.

Es sei uns jetzt gestattet, den Ausdruck

$$C_\alpha \left\{\frac{1}{z - a}\left[1 - \left(\frac{a - a_1}{z - a_1}\right)^{n_1}\right]\right\}^\alpha \tag{2}$$

zu bilden, wo n_1 eine sogleich näher zu bestimmende natürliche Zahl bedeutet. Dann haben wir hierin eine rationale Funktion, welche nur im Punkte $z = a_1$ einen Pol hat und außerhalb K den Wert

$$\frac{C_\alpha}{(z - a)^\alpha}(1 + \zeta_1)$$

annimmt, wobei durch gehörige Wahl von n_1 offenbar erreicht werden kann, daß $|\zeta_1|$ in allen Außenpunkten von K beliebig klein bleibt, so daß also insbesondere in solchen Punkten

$$\left|\frac{C_\alpha}{(z - a)^\alpha}(1 + \zeta_1) - \frac{C_\alpha}{(z - a)^\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{k}$$

bleibt.

Die Partialbruchzerlegung für die rationale Funktion (2) setzt sich wieder aus Termen vom Typus

$$\frac{C_\alpha^{(1)}}{(z - a_1)^\alpha}$$

zusammen. Dem soeben gewonnenen Resultate gemäß kann man jeden derselben durch eine rationale Funktion ersetzen, welche nur in $z = a_2$ einen Pol hat und außerhalb K um weniger als ε/kN_1 von dem betreffenden Terme abweicht, wo N_1 die Anzahl dieser Terme bedeutet. Hiernach weicht die Summe dieser rationalen Funktionen außerhalb K um weniger als $2\varepsilon/k$ von der Ausgangsfunktion $C_\alpha/(z-a)^\alpha$ ab.

Fährt man so fort, so gelangt man schließlich zu einer Funktion, die nur in $z = \bar{a}$ einen Pol hat und außerhalb K um weniger als ε von $C_\alpha/(z-a)^\alpha$ abweicht.

Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen, falls L im Endlichen liegt. Sonst sei z_0 ein innerer Punkt von K, der nicht auf L liegt, und man übe die lineare Transformation:

$$z' = \frac{1}{z - z_0}$$

aus. Dann gilt der Hilfssatz für die transformierten Variabelen, und somit auch für die ursprünglichen.

Aus dem Hilfssatze ergibt sich nunmehr der Beweis des Satzes, indem man als Bereich K das Äußere von T_{n-1} nimmt und die Pole $z = t_k$ von $s_\nu(z)$ in die Randpunkte von T verlegt, wodurch dann $s_\nu(z)$ durch eine rationale Funktion $R_\nu(z)$ ersetzt wird, welche sich in T ausnahmslos analytisch verhält und in T_{n-1} um weniger als etwa $1/\nu$ von $s_\nu(z)$ abweicht.

Im allgemeinen wird der Rand von T aus mehreren getrennten Punktmengen bestehen, so daß also die Glieder der Reihe

$$R_1(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [R_{\nu+1}(z) - R_\nu(z)]$$

notwendig Pole im Endlichen haben müssen. Hängt dagegen T nur einfach zusammen, ohne den Punkt ∞ zu umfassen, so darf man alle Pole gleich in den Punkt $z = \infty$ verlegen, womit denn eine Reihe von Polynomen zu stande kommt.

Zwölftes Kapitel.

Die elementaren Funktionen.

§ 1. Der Logarithmus und dessen Umkehrung.[1])

Zur Definition des Logarithmus führen wir die reelle Funktion der reellen Variabelen x:

(1) $$L(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}, \qquad 0 < x < \infty,$$

ein und entwickeln die Eigenschaften derselben. Wir werden sie dann nachträglich als den natürlichen Logarithmus von x definieren, vor der Hand aber wollen wir nur durch die Bezeichnung L auf das Endresultat hindeuten. — Es ist vor allem

$$L(1) = 0; \quad L(a) > 0, \ a > 1; \quad L(a) < 0, \ 0 < a < 1.$$

Fig. 115.

1. Satz. *Die Funktion $L(x)$ ist für alle positiven Werte von x eindeutig und stetig. Sie hat fernerhin eine Ableitung, welche durch die Formel*

(2) $$L'(x) = \frac{1}{x}$$

gegeben ist.

Der Satz ist bloß ein spezieller Fall des allgemeinen Satzes der

1) Eine systematische Behandlung der Funktion $\log x$ auf Grund der nachstehenden Definition (1), nebst einer Entwicklung der Eigenschaften von a^x und x^n mittels des solchergestalt gewonnenen Logarithmus hat Bradshaw in den *Annals of Mathematics*, 2. Reihe, Bd. 4 (1903) S. 51 gegeben. Wir schließen uns der Bradshawschen Darlegung im wesentlichen an. — Der Gedanke, den Logarithmus zur Definition der Potenzen, sowie der Exponentialfunktion zu Grunde zu legen, ist nicht neu. Es handelt sich bloß um eine einfache und strenge Durchführung der Einzelheiten.

Integralrechnung, wonach das bestimmte Integral einer stetigen Funktion:

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

eine stetige Funktion seiner oberen Grenze, $F(x)$, vorstellt, und im übrigen $F'(x) = f(x)$ ist.

Zusatz. *Aus der Gleichung*

$$L(y) = L(x)$$

folgt, daß

$$y = x$$

ist.

Denn der Mittelwertsatz ergibt, daß

$$L(y) = L(x) + (y - x)\,L'[x + \theta(y - x)]$$

ist, und da die Ableitung von L nie verschwindet, so muß $y - x = 0$ sein.

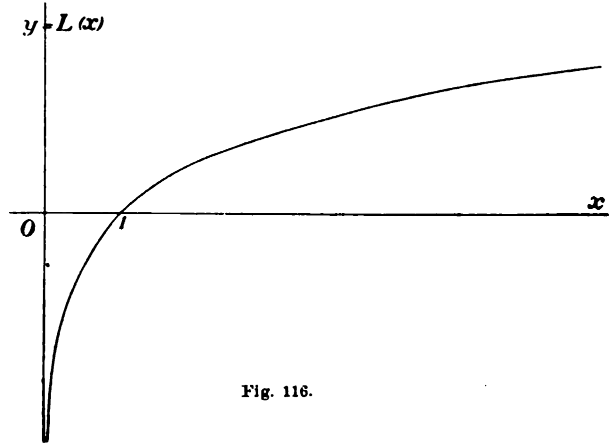


Fig. 116.

Wir können dieses Resultat auch so ausdrücken, daß wir sagen: Die Funktion $L(x)$ ist *monoton*, und zwar nimmt $L(x)$ stets zugleich mit x zu.

2. Satz. *Die Funktion $L(x)$ genügt der Funktionalgleichung:*

(A) $$L(x) + L(y) = L(xy),$$

wo x und y zwei beliebige positive Größen bedeuten.

Man schreibe die linke Seite von (A) in der Gestalt an:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{d\tau}{\tau},$$

und führe darauf im zweiten Integral eine neue Integrationsvariabele

$$t = x\tau$$

ein. So kommt:

$$\int_1^y \frac{d\tau}{\tau} = \int_x^{xy} \frac{dt}{t},$$

woraus sich dann ergibt, daß

$$\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{d\tau}{\tau} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{xy} \frac{dt}{t}$$

ist, w. z. b. w.

1. Zusatz. *Es ist*

(3) $$L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x);$$

(4) $$L(x^n) = nL(x),$$

wo n eine ganze Zahl[1]) *ist; ferner ist*

(5) $$L(+\infty) = +\infty, \quad L(0^+) = -\infty.$$

Setzt man in (A) $y = 1/x$, so ergibt sich (3). Die Relation (4) gilt zunächst für $n = 0, 1$. Vermöge des Schlusses von n auf $n + 1$ beweist man sie dann allgemein für die natürlichen Zahlen, um sie endlich auf die negativen ganzen Zahlen mittels (3) zu erstrecken.

Da $L(x)$ eine monoton zunehmende Funktion ist, so genügt offenbar zur Begründung des ersten Teils von (5), wenn wir bloß feststellen, daß für eine besondere Menge $\{x_n\}$

$$\lim_{n=\infty} L(x_n) = +\infty$$

ist, wobei $x_{n+1} > x_n$ und $\lim x_n = \infty$ ist. Nun ist aber nach (4)

$$L(2^n) = nL(2), \quad L(2) > 0;$$

und man braucht mithin nur $x_n = 2^n$ zu setzen. Unter Benutzung von (3) beweist man jetzt sofort den zweiten Teil von (5).

2. Zusatz. *Die Funktion $L(x)$ nimmt jeden beliebigen Wert einmal an; m. a. W. hat die Gleichung*

$$L(x) = C,$$

wo C beliebig, stets eine und nur eine Wurzel.

---

1) Unter x^{-m} (m, eine natürliche Zahl) soll $1/x^m$ verstanden werden; außerdem soll noch $x^0 = 1$ sein. Die Erklärung einer gebrochenen Potenz setzen wir hier aber nicht voraus.

In der Tat kann man zufolge (5) zwei positive Zahlen a und b finden, wofür

$$L(a) < C < L(b)$$

wird. Nach dem 3. Satze von Kap. 1, § 4 schließt man dann, daß die in Rede stehende Gleichung mindestens eine Wurzel hat, und nach dem Zusatze des 1. Satzes gibt es auch keine zweite.

3. Satz. *Die Umkehrfunktion*

$$y = E(x), \quad wo \quad x = L(y),$$

ist eindeutig und stetig für alle Werte des Arguments: $-\infty < x < \infty$, *und hat durchweg einen positiven Wert. Sie besitzt fernerhin eine Ableitung, welche durch die Formel gegeben ist:*

$$E'(x) = E(x).$$

Dieser Satz ist wieder bloß ein spezieller Fall des bekannten Umkehrsatzes von Kap. 1, § 6, Aufgabe 5.

Zusatz. *Die Funktion $E(x)$ ist monoton, und zwar nimmt sie stets zugleich mit x zu. Daher folgt insbesondere aus*

$$E(x) = E(y),$$

daß

$$x = y$$

ist. Im übrigen nimmt sie jeden positiven Wert einmal an; m. a. W. hat die Gleichung

$$E(x) = C > 0,$$

wo C beliebig, stets eine und nur eine Wurzel. Es ist

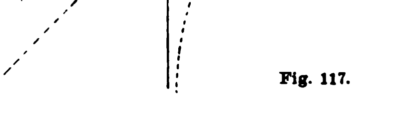


Fig. 117.

$$E(+\infty) = +\infty, \quad E(0) = 1, \quad E(-\infty) = 0.$$

4. Satz. *Die Funktion $E(x)$ genügt der Funktionalgleichung:*

$$E(x)\,E(y) = E(x+y),$$

wo x und y zwei beliebige reelle Zahlen sind.

Sei nämlich

$$\left.\begin{array}{l} E(x) = \xi \\ x = L(\xi) \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} E(y) = \eta \\ y = L(\eta) \end{array}\right\}.$$

Dann ist

$$x + y = L(\xi) + L(\eta) = L(\xi\eta),$$

also

$$E(x+y) = \xi\eta = E(x)E(y),$$

w. z. b. w.

Zusatz. *Es ist*

$$[E(x)]^n = E(nx),$$

wo n eine natürliche Zahl ist.

§ 2. Die q^{te} Wurzel einer positiven Zahl und die allgemeine Potenz.

Unter der q^{ten} *Wurzel* einer Zahl a, wo q eine natürliche Zahl ist, versteht man eine Zahl b, welche, in die q^{te} Potenz erhoben, gleich a wird.

1. Satz. *Jede positive Zahl a läßt eine und nur eine positive q^{te} Wurzel b zu:*[1])

$$a = b^q, \qquad b = \sqrt[q]{a}.$$

Wir wollen zuerst eine notwendige Bedingung für eine q^{te} Wurzel x von a suchen:

$$x^q = a.$$

Eine solche besteht in der Relation:

$$L(x^q) = L(a).$$

Soll x fernerhin positiv sein, so wird nach § 1 (4)

$$qL(x) = L(a),$$

$$x = E\left(\frac{1}{q} L(a)\right). \tag{1}$$

Hiermit ist x eindeutig bestimmt, und daher gibt es höchstens eine positive q^{te} Wurzel von a. Daß es aber auch wirklich eine solche

---

1) Unter dem Symbol $\sqrt{a}$, $\sqrt[q]{a}$, wo a eine positive Zahl ist, versteht man in der elementaren Mathematik sowie in der reellen Funktionentheorie nur die positive Wurzel. So ist beispielsweise

$$\sqrt{x^2} = -x, \quad \text{falls} \quad x < 0$$

ist. In allen Fällen ist

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

gibt, erhellt daraus, daß man jeden der obigen Schritte eindeutig umkehren kann.[1])

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß

$$(2) \qquad L(\sqrt[q]{a}) = \frac{1}{q} L(a), \qquad L(\sqrt[q]{a^p}) = \frac{p}{q} L(a)$$

ist, wo p eine ganze Zahl ist.

Die Funktion x^n, wo n eine natürliche Zahl bedeutet, ist eindeutig und genügt im übrigen den Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1) & a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \\ A_2) & (a^m)^n = a^{mn}; \\ A_3) & a^m \cdot b^m = (ab)^m. \end{array}\right\} \qquad (A)$$

Im Anschluß hieran beweist man in der niederen Algebra, unter Annahme des 1. Satzes, die Hauptgesetze für die Wurzeln:

$$\left.\begin{array}{ll} B_1) & \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p; \\ B_2) & \sqrt[mq]{a^m} = \sqrt[q]{a}; \\ B_3) & \sqrt[q]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mq]{a}; \\ B_4) & \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{ab}; \end{array}\right\} \qquad (B)$$

woraus sich dann die weiteren Reduktionsformeln ergeben:

$$\sqrt[q]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a}};$$

$$\sqrt[q]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[q'p'\varkappa]{a^{p'}b^{q'}}; \quad \sqrt[q]{a}\sqrt[p]{a} = \sqrt[q'p'\varkappa]{a^{p'+q'}},$$

wo $\varkappa$ der größte gemeinsame Teiler von p und q bedeutet. Alsdann stellt man die Frage, ob

$$(3) \qquad a^n = \varphi(a, n),$$

als Funktion des zweiten Arguments aufgefaßt, nicht auch für allgemeine rationale Werte dieses Arguments so erklärt werden kann,

---

1) Den zweiten Teil des Satzes kann man ja auch auf algebraischem Wege beweisen, indem man eine beliebige positive q-te Wurzel von a mit b' bezeichnet und sich dann der Identität:

$$b'^q - b^q = (b' - b)(b'^{q-1} + b'^{q-2} b + \cdots + b^{q-1})$$

bedient. Die spezifische Leistung der Funktion $L(x)$ besteht eben im *Existenzbeweise*, daß es nämlich wenigstens eine q-te Wurzel gibt.

daß die Funktionalgleichungen (A) von diesem Paragraphen bestehen bleiben. (*Prinzip der Erhaltung der formalen Gesetze.*) Dies gelingt bekanntlich vermöge jener Wurzelgesetze. Zur endgültigen Ausdehnung der Funktion (3) auf allgemeine reelle Werte des zweiten Arguments erübrigt dann noch ein Stetigkeitsbeweis, welcher weder der niederen Algebra angehört, noch mit algebraischen Hilfsmitteln ganz einfach ausfällt. Wir gehen jetzt zur Behandlung dieser Fragen, welche sich vermöge der uns zu Gebote stehenden Funktion $L(x)$ und ihrer Umkehrung $E(x)$ äußerst einfach gestaltet.

Gebrochene und irrationale Potenzen.

Die Größe

$$\sqrt[q]{a^p}$$

erscheint zunächst als eine Funktion der drei Argumente a, p, q:

$$\sqrt[q]{a^p} = f(a, p, q).$$

Hinsichtlich dieser Funktion beweisen wir jenes Theorem, worauf sich die Definition der gebrochenen Potenzen gründet.

2. Satz. *Die Größe*

$$f(a, p, q) = \sqrt[q]{a^p},$$

wo a eine beliebige positive, q eine natürliche und p eine ganze Zahl bedeuten, ist eine homogene Funktion der beiden Argumente p und q von der 0ten Dimension:

$$f(a, mp, mq) = f(a, p, q) = \varphi\left(a, \frac{p}{q}\right),$$

wo m eine willkürliche natürliche Zahl ist.

In der Tat ist nach (2)

$$L(\sqrt[q]{a^p}) = \frac{p}{q} L(a),$$

$$\sqrt[q]{a^p} = E\left(\frac{p}{q} L(a)\right) = \varphi\left(a, \frac{p}{q}\right), \tag{4}$$

womit der Satz eben bewiesen ist.

Wir sind jetzt in der Lage, positive und negative gebrochene Potenzen einzuführen. Indem wir nämlich diese Potenzen vermöge der Gleichung

$$\varphi\left(a, \frac{p}{q}\right) = E\left(\frac{p}{q} L(a)\right) = a^{\frac{p}{q}}$$

definieren, weisen wir ohne Mühe nach, daß diese Funktion sich der Eigenschaften (A) erfreut, woraus sich dann die Richtigkeit der Wurzelgesetze (B) schon von selbst ergibt. Aber die gegenwärtige Behandlungsweise leistet noch mehr, sie setzt uns in den Stand, den Potenzbegriff zugleich auf den allgemeinen Fall auszudehnen, daß die Potenz eine beliebige reelle Zahl ist, wobei außerdem noch die Stetigkeit und Differentiierbarkeit der neuen Funktion sofort erkenntlich werden. Wir wollen dies alles in den folgenden Satz zusammenfassen:

3. Satz. *Indem wir die Funktion $\varphi(a, x)$ nunmehr für ein beliebiges reelles x durch die Gleichung:*

$$\varphi(a, x) = E(x L(a)) \tag{5}$$

erklären, erhalten wir eine Funktion, welche unumschränkt den Funktionalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(a, x)\, \varphi(a, y) & = \varphi(a, x+y) \\ \varphi[\varphi(a, x), y] & = \varphi(a, xy) \\ \varphi(a, x)\, \varphi(b, x) & = \varphi(ab, x) \end{array}\right\} \tag{A}$$

genügt, wobei also x und y zwei beliebige, a und b zwei positive, reelle Zahlen bedeuten. Da für jeden rationalen Wert des Arguments $x = p/q$ die Funktion $\varphi(a, p/q)$ mit $\sqrt[q]{a^p}$ zusammenfällt, so subsumieren sich die Wurzelgesetze (B) *als ein spezieller Fall unter* (A). *Im übrigen ist $\varphi(a, x)$ eine stetige Funktion von x.*

Hiermit sind wir berechtigt, $\varphi(a, x)$ als eine Potenz aufzufassen:[1])

$$\varphi(a, x) = a^x.$$

§ 3. Fortsetzung: Folgerungen aus den Hauptsätzen.

An der Definition der Potenz mittels der Funktion $E(x)$, § 2, Formel (5):

$$a^x = E(x L(a))$$

lesen wir alle weiteren Eigenschaften dieser Funktion unmittelbar ab. Insbesondere heben wir noch folgende hervor:

4. Satz. *Die Funktion a^x ist für alle Werte von x positiv, eindeutig und stetig, und läßt eine Ableitung zu, welche durch die Formel:*

---

1) Daß die Gleichungen (A) zur Definition der Potenz a^x genügen, haben wir gesehen. Wie weit diese Gleichungen voneinander unabhängig sind und ob sie auch andere stetige Lösungen zulassen, mag vorläufig dahingestellt bleiben. Hierauf kommen wir noch in § 4 zurück.

(6) $$\frac{da^x}{dx} = a^x L(a)$$

gegeben ist. Sie ist ferner stets monoton, und zwar nimmt sie im Falle $a > 1$ *mit wachsendem* x *beständig zu; die Ableitung ist hier durchweg positiv, und es ist*

$$a^{+\infty} = +\infty, \qquad a^{-\infty} = 0^+.$$

Ist dagegen $0 < a < 1$, *so nimmt die Funktion beständig ab; die Ableitung ist jetzt negativ, und es ist*

$$a^{+\infty} = 0^+, \qquad a^{-\infty} = +\infty.$$

Demgemäß hat die entsprechende Kurve $y = a^x$ *im ersten Falle den Charakter der zur Funktion* $y = E(x)$, Fig. 117 *gehörigen Kurve, während sie sich im zweiten Falle an das Spiegelbild dieser Kurve in der Geraden* $x = 0$ *anlehnt.*

Fahren wir jetzt fort, indem wir die Funktion $E(x)$, als eine Potenz darstellen. Ich behaupte, *daß*

$$L(e) = 1, \qquad E(1) = e$$

ist, wo e, wie üblich, als der limes:

(7) $$e = \lim_{\mu = \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu$$

erklärt wird. Man setze $\mu = 1/x$, $|\mu| > 1$, dann wird

$$\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu = (1+x)^{\frac{1}{x}} = E\left[\frac{L(1+x)}{x}\right].$$

Beim Grenzübergange $\lim x = 0$ konvergiert $L(1+x)/x$ gegen $L'(1) = 1$, und da $E(x)$ stetig ist, so konvergiert auch die ganze rechte Seite der letzten Gleichung gegen einen Grenzwert, und zwar gegen $E(1)$. Hiermit ist die Behauptung bewiesen und zugleich folgender Satz gewonnen:

5. Satz. *Es ist*

$$E(x) = e^x,$$

wo

$$e = \lim_{\mu = \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\mu$$

ist.

Durch diesen Satz hat man auch Anschluß an die gewöhnliche Definition des natürlichen Logarithmus erreicht:

$$x = E(y) = e^y, \qquad y = L(x) = \log x.$$

Daran gliedert sich noch die übliche Definition von $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

(8) $$x = a^y, \qquad y = \log_a x,$$

sowie der Satz:

(9) $$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b,$$

wo auch $b > 0$, $b \neq 1$ ist, nebst dem Zusatze:

(10) $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Im übrigen ist

(11) $$a^x = e^{x \log a},$$

(12) $$\log_a x^y = y \log_a x.$$

Endlich werden die Reihenentwicklungen:

(13) $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

(14) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

nach dem gewöhnlichen Verfahren der Infinitesimalrechnung aufgestellt. Aus der letzten erhält man einen rasch konvergierenden unendlichen Prozeß zur numerischen Berechnung der Zahl e:[1])

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2,718\,281\,828\,\ldots.$$

6. Satz. *Die Funktion*

$$x^n, \qquad 0 < x < \infty,$$

ist positiv, eindeutig und stetig, und es ist

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Die Umkehrfunktion ist folgende, sofern $n \neq 0$ ist:

$$y = x^{\frac{1}{n}}, \quad wo \quad x = y^n.$$

---

1) Der Leser wolle bemerken, daß wir bei allen den bisherigen Entwicklungen niemals nötig hatten, die Zahl e näher zu *berechnen*, — *bestimmt* wurde sie ja schon durch die Formel (7). Eine besondere Untersuchung zur Erhaltung der in Rede stehenden Reihe wäre deshalb überflüssig gewesen. An dieser Stelle ergibt sich die Reihe schon von selbst. Hierin ist auch für den Unterricht in der Infinitesimalrechnung ein Fingerzeig mit enthalten.

Der Satz folgt aus der Definition:

$$x^n = e^{n \log x}.$$

Demnach ist

$$\frac{dx^n}{dx} = e^{n \log x} \cdot \frac{n}{x} = n x^{n-1}.$$

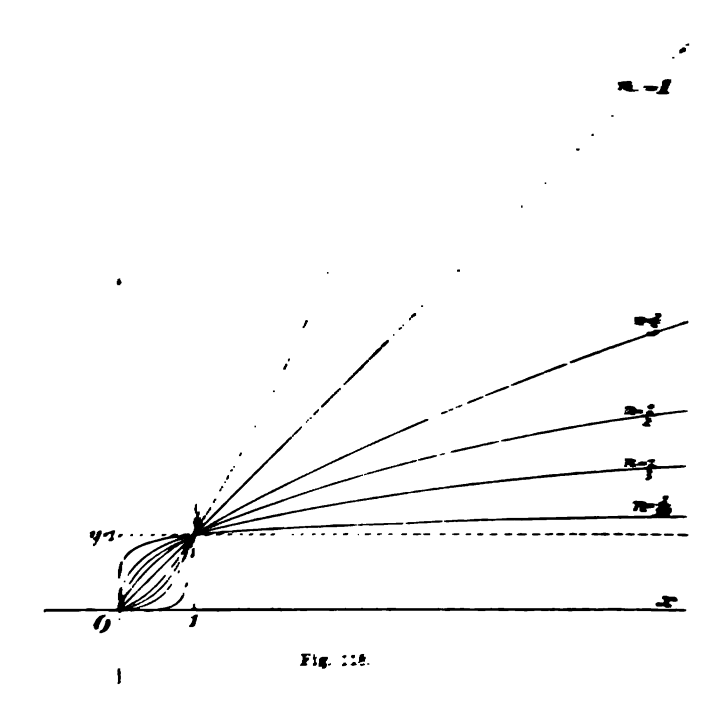


Fig. [illegible]

Zusatz. *Die Funktion x^n, $0 < x < \infty$, ist monoton, und zwar nimmt sie zugleich mit x beständig zu oder ab, je nachdem n positiv oder negativ ist.*

Die Ungleichungen, welche die Funktionen a^x und x^n erfüllen, lassen sich nun nachträglich vermöge des Wertes der Ableitung herleiten.

§ 4. Über Funktionalgleichungen.

Im vorhergehenden Paragraphen sind wir einer Reihe von Funktionalgleichungen begegnet, welchen die Funktionen $\log x$ und a^x genügen. Indem wir jetzt zweien dieser Gleichungen näher treten, beweisen wir das

Theorem.[1]) *Die allgemeinste, in einem einzigen Punkte stetige Lösung der Funktionalgleichung*

$$\text{I.}\qquad f(x)+f(y)=f(xy), \qquad \begin{cases} x>0, \\ y>0, \end{cases}$$

ist

$$f(x)=C\log x;$$

diejenige von

$$\text{II.}\qquad F(x)F(y)=F(x+y), \qquad \begin{cases} -\infty<x<\infty, \\ -\infty<y<\infty, \end{cases}$$

ist

$$F(x)=e^{Cx} \quad \textit{bzw.} \quad F(x)=0.$$

Sei $f(x)$ zunächst eine beliebige Lösung von I. Dann schließt man vor allem, indem man $x=y=1$ setzt, daß

$$f(1)=0$$

ist. Ferner erhält man, ähnlich wie in § 1,

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

$$f(x^n)=nf(x), \qquad f(\sqrt[q]{x})=\frac{1}{q}f(x),$$

wo n eine ganze, q eine natürliche Zahl ist. Setzt man hier $n=p$, $x=\sqrt[q]{a}$, wo $a>0$ ist, so kommt:

$$f(a^{p/q})=\frac{p}{q}f(a).$$

So viel, ohne die Stetigkeit von $f(x)$ zu verlangen. Ist nun $f(x)$ in einem einzigen Punkte $x=y_0$ stetig,

$$\lim_{y=y_0} f(y)=f(y_0),$$

---

1) Cauchy, *Cours d'analyse*, 1821, Chap. 5. Die Forderung der ausnahmslosen Stetigkeit der Funktion durch die geringere Forderung der Stetigkeit in einem einzigen Punkte ersetzt zu haben, ist Darbouxs Verdienst; *Math. Ann.*, Bd. 17 (1880), S. 56.

so folgt daraus, daß $f(x)$ in einem beliebigen Punkte $x = x_1$ auch stetig ist. Denn, sei

$$X y_0 = x_1, \qquad X y = x.$$

Dann wird $X > 0$ sein. Ferner wird

$$f(X) + f(y) = f(Xy) = f(x).$$

Nähert sich x jetzt dem Werte x_1, so strebt y dem Werte y_0 zu, woraus denn folgt, daß

$$\lim_{x = x_1} f(x) = f(X) + \lim_{y = y_0} f(y) = f(X) + f(y_0) = f(x_1).$$

Hiermit ist bewiesen, daß insbesondere die ausnahmslos stetige Funktion $f(e^x)$ für alle rationalen Werte des Arguments x mit der stetigen Funktion $x f(e)$ übereinstimmt, woraus denn folgt, daß allgemein

$$f(e^x) = x f(e), \qquad -\infty < x < \infty,$$

ist. Führt man also noch

$$y = e^x, \qquad x = \log y$$

ein, so wird

$$f(y) = f(e) \log y, \qquad 0 < y, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß $F(x)$ keinen negativen Wert annehmen kann. Denn wäre $F(a) < 0$, so würde die Relation

$$F\left(\frac{a}{2}\right) F\left(\frac{a}{2}\right) = F(a)$$

zu einem Widerspruch führen. Auch zieht das Verschwinden von $F(x)$ für einen einzigen Wert $x = a$: $F(a) = 0$, das identische Verschwinden von $F(x)$ nach sich, da dann

$$0 = F(a) F(x - a) = F(x)$$

wird. Hiermit ist dieser Fall erledigt, und wir dürfen hinfort voraussetzen, daß durchweg

$$F(x) > 0$$

ist.

Wir wollen jetzt neue Variabelen einführen:

$$x = \log \xi, \qquad y = \log \eta,$$

und zugleich auch:

$$F(\log \xi) = \Phi(\xi).$$

setzen. Alsdann geht II. in

$$\Phi(\xi)\,\Phi(\eta) = \Phi(\xi\eta)$$

über. Daraus findet man weiter:

$$\log \Phi(\xi) + \log \Phi(\eta) = \log \Phi(\xi\eta).$$

Dies ist aber nichts anderes als die Relation I., und darum ist:

$$\log \Phi(\xi) = C \log \xi,$$
$$\Phi(\xi) = e^{C \log \xi} = \xi^{C},$$
$$F(x) = e^{Cx}.$$

Hiermit ist der Beweis des Theorems vollständig geführt.

Die Frage, ob die Funktionalgleichungen I. und II. außerdem noch unstetige Lösungen zulassen, ist noch nicht entschieden. Wilson[1]) hat gezeigt, daß, wenn es überhaupt eine Lösung $F_1(x)$ von II. gibt, die nur in einem einzigen Punkte unstetig ist, $F_1(x)$ dann in jeder Umgebung eines jeden Wertes des Arguments jedem vorgegebenen positiven Werte beliebig nahe kommt, so daß also der Ort der Gleichung $y = F_1(x)$ eine in der oberen Halbebene $y > 0$ überall dichte Punktmenge bildet.

Aufgabe.[2]) Die allgemeinste in einem einzigen Punkte stetige Lösung der Funktionalgleichung

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

ist

$$\varphi(x) = Cx,$$

wo C eine Konstante bedeutet.

§ 5. Die trigonometrischen Funktionen.

In der Elementarmathematik werden die trigonometrischen Funktionen vermöge eines rechtwinkligen Dreiecks geometrisch definiert, wodurch denn auch ihre Beziehung zum Kreise von vornherein an die Spitze gestellt wird. Demgegenüber begegnen wir gleich zu Anfang der Mechanik einem Problem der allerersten Wichtigkeit, welches uns ebenfalls zu diesen Funktionen führt. Handelt es sich nämlich

1) *Annals of Math.*, 2. Reihe, Bd. 1 (1899), p. 47. Das wesentliche an diesem Resultat ist bereits in der vorhin zitierten Mitteilung von Darboux enthalten.

2) Cauchy, ibid.

um die kleinen Schwingungen eines materiellen Systems um dessen Gleichgewichtslage, — denken wir etwa an das gewöhnliche Pendel, — so wird in den meisten Fällen eine erste Annäherung zur Bewegung des Systems durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -n^2 y$$

reguliert, wobei t die Zeit und y eine geeignete Koordinate bedeuten. Durch Einführung einer neuen unabhängigen Variabelen,

$$x = nt,$$

geht die Differentialgleichung dann in die Normalform:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + y = 0$$

über. Auf der Theorie letzterer Differentialgleichung ruht daher ein wesentlicher Teil der Mechanik.

Wir wollen eine Lösung von (A) vermöge einer Potenzreihe in x zu gewinnen suchen. Indem wir diese mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen:

$$\text{(1)} \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

erhalten wir zunächst:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 2 \cdot 1\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3 x + 4 \cdot 3\, a_4 x^2 + \cdots,$$

und somit durch Vergleich mit (1) folgende formale Relation zwischen den Koeffizienten:

$$a_n = -(n+1)(n+2)\, a_{n+2},$$

also

$$\left.\begin{array}{lll} a_2 = -\frac{1}{2!}\, a_0, & a_4 = \frac{1}{4!}\, a_0, & a_6 = -\frac{1}{6!}\, a_0, \cdots \\ a_3 = -\frac{1}{3!}\, a_1, & a_5 = \frac{1}{5!}\, a_1, & a_7 = -\frac{1}{7!}\, a_1, \cdots \end{array}\right\}.$$

Hiermit werden wir zu den für alle Werte des Arguments konvergierenden Reihen geführt:

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Daß die hierdurch definierten Funktionen $s(x)$, $c(x)$ der Differential-

gleichung (A) in der Tat Genüge leisten, erkennt man nun sofort.[1]) Fassen wir das Ergebnis in einen Satz zusammen.

1. Satz. *Die Differentialgleichung*

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

läßt zwei spezielle Lösungen zu, welche durch die beständig konvergierenden Reihen:

$$\text{(2)} \qquad \left.\begin{aligned} s(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \\ c(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \end{aligned}\right\}$$

gegeben werden. Daraus setzt sich ferner eine allgemeine Lösung in der Form:

$$\text{(3)} \qquad y = as(x) + bc(x)$$

zusammen, wo a, b willkürliche Konstante bedeuten. Wie man sieht, ist

$$\text{(4)} \qquad s(0) = 0, \qquad c(0) = 1,$$

$$\text{(5)} \qquad s'(x) = c(x), \qquad c'(x) = -s(x),$$

$$\text{(6)} \qquad s(-x) = -s(x), \qquad c(-x) = c(x).$$

Fahren wir fort, indem wir bemerken, daß sich jede der Funktionen $s(x)$, $c(x)$ nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickeln läßt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} s'(x) &= c(x), \\ s''(x) &= -s(x), \\ s'''(x) &= -c(x), \\ s''''(x) &= s(x), \end{aligned}$$

1) Damit hier das Raisonnement mit aller Schärfe hervortritt, sei uns doch folgender kleiner Rückblick gestattet. Wir warfen die Frage auf, ob nicht vielleicht durch eine Potenzreihe eine Lösung zu erzielen sei. Indem wir dann annahmen, daß dies wirklich zuträfe, — daß es also m. a. W. eine konvergente Potenzreihe gäbe, welche, in die linke Seite von (A) eingetragen, diesen Ausdruck identisch zum Verschwinden bringt, — untersuchten wir zunächst, wie die Koeffizienten der Reihe beschaffen sein müßten. Damit stellten sich die beiden Reihen für $s(x)$, $c(x)$ ein, welche augenscheinlich für alle Werte des Arguments konvergieren. Und nun stand uns frei, entweder durch Eintragen in die linke Seite von (A) direkt nachzuweisen, daß dies auch in der Tat Lösungen sind, oder andererseits auf Grund des Umstandes, daß sich diese Reihen nun einmal als konvergent erwiesen haben, uns zu überlegen, daß jeder der obigen Schritte deshalb umkehrbar sei, womit wir denn bereits am Ziele sind.

woraus erhellt, daß bei fortgesetzter Wiederholung der Differentiation diese vier Funktionen sich immer wieder in gleicher Reihenfolge einstellen werden. Sei $x = x_0$ ein beliebiger Punkt, um den wir auch ein willkürliches Intervall $x_0 - h \leqq x \leqq x_0 + h$ legen wollen. Da $s(x)$, $c(x)$ stetig sind, so bleiben sie endlich in diesem Intervalle. Daher konvergiert das Restglied in der Taylorschen Formel:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit wachsendem n gegen 0, wenn $f(x)$ gleich $s(x)$ oder $c(x)$ gesetzt wird. Wir haben mithin folgende Entwicklung gewonnen:

$$\begin{aligned} s(x_0 + h) &= s(x_0) + c(x_0)h - s(x_0)\frac{h^2}{2!} - c(x_0)\frac{h^3}{3!} + s(x_0)\frac{h^4}{4!} + \cdots \\ &= s(x_0)\left[1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots\right] \\ &\quad + c(x_0)\left[h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots\right]. \end{aligned}$$

Die in den Klammern stehenden Reihen sind aber nichts anderes als die Funktionen $c(h)$ und $s(h)$, daher ist

$$s(x_0 + h) = s(x_0)c(h) + c(x_0)s(h).$$

Verfahren wir in ähnlicher Weise mit der Funktion $c(x)$, so gelangen wir zu folgendem Satze:

2. **Satz.** *Die Funktionen $s(x)$, $c(x)$ lassen sich um einen beliebigen Punkt $x = x_0$ nach dem Taylorschen Lehrsatze in eine beständig konvergierende Reihe entwickeln. Sie besitzen fernerhin ein Additionstheorem, welches folgendermaßen lautet:*

$$(7)\qquad \left.\begin{aligned} s(x + y) &= s(x)c(y) + c(x)s(y), \\ c(x + y) &= c(x)c(y) - s(x)s(y). \end{aligned}\right\}$$

Wir wenden uns jetzt zu einer weiteren Eigenschaft dieser Funktionen.

3. **Satz.** *Es ist*

$$(8)\qquad s^2(x) + c^2(x) = 1.$$

In der Tat bilde man die Funktion:

$$\varphi(x) = s^2(x) + c^2(x).$$

Dann ist

$$\varphi'(x) = 2s(x)c(x) - 2c(x)s(x) = 0,$$

also ist

$$s^2(x) + c^2(x) = k.$$

Setzt man noch hierin $x = 0$, so kommt:

$$1 = k,$$

und hiermit ist der Beweis geliefert.[1])

Wir wollen uns jetzt mit der Periodizität dieser Funktionen beschäftigen. Beginnen wir mit $s(x)$. Die dieser Funktion entsprechende Kurve:

$$y = s(x),$$

geht durch den Koordinatenanfang und tritt zunächst in den ersten Quadranten ein. Dabei ist auch wegen (A)

$$s''(x) < 0,$$

woraus man erkennt, daß die Kurve ihre konkave Seite nach unten kehrt. Nun will ich vor allem beweisen, daß $s(x)$ für einen positiven Wert von x ein Maximum erreicht, denn daraus lassen sich alle Periodeneigenschaften leicht herleiten.[2]) Zu dem Zwecke wählen wir eine kleine positive Größe α, wofür zugleich

$$s(\alpha) > 0, \qquad s'(\alpha) = c(\alpha) > 0$$

ist, was ja offenbar angeht. Für Werte von x, die nur wenig größer als α sind, wird dann $s(x) > s(\alpha)$ sein. Dagegen kann $s(x)$ mit wachsendem x nicht beständig größer als $s(\alpha)$ bleiben, wie wir jetzt nachweisen wollen. Nach der Taylorschen Formel ist

$$s(x) = s(\alpha) + c(\alpha)(x - \alpha) - s(X)\frac{(x-\alpha)^2}{2}, \quad \alpha < X < x.$$

Daher würde die Annahme:

$$s(x) > s(\alpha), \qquad\qquad x > \alpha,$$

zur Folge haben, daß

$$0 < s(x) - s(\alpha) < (x - \alpha)\left[c(\alpha) - s(\alpha)\frac{x-\alpha}{2}\right]$$

wäre, und dies trifft augenscheinlich für große Werte von x nicht zu. Daraus geht die Existenz des in Aussicht gestellten Maximums

1) Man erhält die Formel (8) auch dadurch, wie Godefroy bemerkt hat, indem man in der zweiten der Relationen (7) $y = -x$ setzt und sich dann der Relationen (6) bedient; *Théorie élémentaire des séries*, S. 150.

2) Godefroy beweist direkt aus den Reihen (2), daß $s(x)$ im Intervalle $0 \leq x \leq 2$ positiv bleibt, während $c(x)$ dagegen im Punkte $x = 2$ negativ wird.

hervor. In diesem Punkte muß offenbar $s'(x) = c(x)$ verschwinden. Wir wollen mit $p/2$ den kleinsten positiven Wert von x bezeichnen, wofür letzteres eintritt. Dann wird

$$0 < c(x) = s'(x), \quad 0 \leqq x < \frac{p}{2};$$

(9) $$s'\left(\frac{p}{2}\right) = c\left(\frac{p}{2}\right) = 0, \quad s\left(\frac{p}{2}\right) = 1, \quad s''\left(\frac{p}{2}\right) = -s\left(\frac{p}{2}\right) < 0.$$

Demnach haben wir es auch mit einem Maximum im Sinne der Differentialrechnung zu tun. Fassen wir das bisher erlangte Ergebnis in Worte zusammen: *Es gibt ein Intervall* $0 \leqq x \leqq p/2$, *in welchem die Funktion* $s(x)$ *monoton zunimmt, um im Endpunkte* $x = p/2$ *desselben ihren Maximalwert* 1 *zu erreichen. Dabei kehrt die graphische Darstellung der Funktion ihre konkave Seite stets nach unten.*

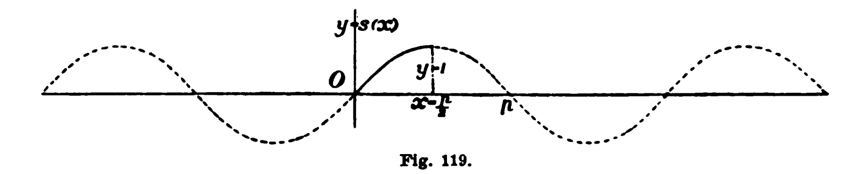


Fig. 119.

Wir wollen jetzt zeigen, daß der weitere Verlauf dieser Kurve im Intervalle $p/2 \leqq x \leqq p$ aus dem Spiegelbilde des soeben besprochenen Bogens in der Geraden $x = p/2$ besteht. Die Bedingung hierfür ist offenbar die, daß

(10) $$s\left(\frac{p}{2} - x\right) = s\left(\frac{p}{2} + x\right)$$

sei. Setzt man nun in (7) $y = p/2$, so kommt:

(11) $$s\left(x + \frac{p}{2}\right) = c(x), \quad c\left(x + \frac{p}{2}\right) = -s(x).$$

Hieraus findet man weiter, indem man $x + p/2$ an Stelle von x treten läßt:

(12) $$s(x+p) = -s(x), \quad c(x+p) = -c(x).$$

Um jetzt (10) zu erhalten, wird man $s(p/2 - x)$ vermöge (6) und (12) umformen:

$$s\left(\frac{p}{2} - x\right) = -s\left(x - \frac{p}{2}\right) = s\left(x + \frac{p}{2}\right), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Aus dem solchergestalt konstruierten, im ersten Quadranten belegenen Bogen stellt man noch eine Fortsetzung in den dritten Quadranten

her, indem man, der Relation (6) gemäß, jenen Bogen im Anfang spiegelt.

Wir sind nunmehr in der Lage, die Frage der Periodizität zu erledigen. Indem wir in (12) $x + p$ an Stelle von x setzen, wird

$$(13) \qquad s(x + 2p) = -s(x + p) = s(x), \qquad c(x + 2p) = c(x).$$

Hiermit erweist sich $2p$ als eine Periode beider Funktionen, und zwar ist $2p$ eine primitive Periode. Sonst gäbe es nämlich eine kleinere positive Periode ω:

$$s(x + \omega) = s(x), \qquad s'(x + \omega) = s'(x), \qquad 0 < \omega < 2p.$$

Das trifft aber nicht zu, wie ein Blick auf die Kurve zeigt. Analytisch kann der Beweis so geführt werden. Aus der ersten der soeben hingeschriebenen Relationen folgt, indem man $x = 0$ setzt, daß

$$s(\omega) = 0$$

ist. $s(x)$ hat aber nur eine positive Wurzel, die kleiner als $2p$ ist, nämlich $x = p$, und diese Größe ist keine Periode, wie aus (12) erhellt.

Da endlich $c(x) = s(x + p/2)$ ist, so ist auch zugleich hiermit die Periodizität von $c(x)$ erledigt. Wir erhalten so den

4. Satz. *Die Funktionen $s(x)$, $c(x)$ sind periodisch mit der primitiven Periode $2p$.*

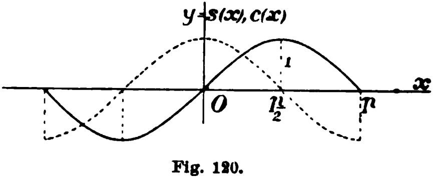


Fig. 120.

Aus den vorangehenden Entwicklungen kann man einen Schluß auf die gegenseitige Änderung von $s(x)$ und $c(x)$ machen. Wir setzen die graphische Darstellung dieser Funktionen im Intervalle $-p \leqq x < p$ her und entnehmen daraus ohne Mühe den folgenden Satz:

5. Satz. *Die Funktionen $s(x)$ und $c(x)$ nehmen jeden willkürlichen Wert $-1 < a < 1$ in zwei getrennten Punkten des Intervalls $-p \leqq x < p$ an, dagegen die Werte 1 und -1 nur in einem einzigen Punkte. Sind ferner a und b irgend zwei an die Bedingung*

$$a^2 + b^2 = 1$$

geknüpfte Zahlen, so lassen die simultanen Gleichungen:

$$s(x) = a, \qquad c(x) = b,$$

stets eine und nur eine Lösung im genannten Intervalle zu.

Der analytische Beweis dieses Satzes wird auch durch jene Kurven nahe gelegt.

Wir wurden zu den Funktionen $s(x)$, $c(x)$ geführt, indem wir Lösungen der Differentialgleichung (A) aufsuchten. Dabei ergab sich, daß die ganze Funktionsklasse

$$y = as(x) + bc(x)$$

Lösungen liefert. Wir wollen jetzt den Beweis erbringen, daß weiter keine Lösungen von (A) vorhanden sind.

6. Satz. *Jede Lösung von* (A) *läßt sich in der Form:*

$$y = as(x) + bc(x)$$

darstellen, wobei a und b Konstante sind.

Erklären wir vor allem, was wir unter einer *Lösung* von (A) verstehen. Wir setzen ein beliebiges Intervall $a \leqq x \leqq b$ und eine darin eindeutige Funktion $f(x)$ voraus. Dann heißt $f(x)$ eine Lösung von (A) in diesem Intervalle, wenn $f(x)$ in jedem Punkte von (A) eine Ableitung erster, sowie eine zweiter Ordnung besitzt, und außerdem der Differentialgleichung (A) in jedem Punkte des Intervalls genügt.

Zum Beweise des Satzes gehen wir von folgendem evidenten Satze aus: Sind $f(x)$, $\varphi(x)$ zwei mit Ableitungen zweiter Ordnung ausgestattete Funktionen, so ist

$$\begin{vmatrix} f''(x) & f(x) \\ \varphi''(x) & \varphi(x) \end{vmatrix} = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f'(x) & f(x) \\ \varphi'(x) & \varphi(x) \end{vmatrix}.$$

Verschwindet daher erstere Determinante in jedem Punkte eines Intervalls, so muß dort ausnahmslos

$$\begin{vmatrix} f'(x) & f(x) \\ \varphi'(x) & \varphi(x) \end{vmatrix} = f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x) = \text{const.}$$

sein. —

Betrachten wir nun eine beliebige Lösung y von (A), und bezeichnen wir noch die speziellen Lösungen $s(x)$, $c(x)$ resp. mit y_1, y_2:

$$y_1 = s(x), \quad y_2 = c(x).$$

Dann folgt aus

$$y'' + y = 0,$$
$$y_2'' + y_2 = 0,$$

daß

$$\begin{vmatrix} y'' & y \\ y_2'' & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist, und hieraus weiter nach der obigen Bemerkung, daß

$$\begin{vmatrix} y' & y \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = y' y_2 - y y_2' = \text{const.} = a$$

ist. Ähnliche Beziehungen finden statt, wenn wir die drei Buchstaben y, y_1, y_2 zyklisch miteinander vertauschen:

$$y_1' y - y_1 y' = b;$$
$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = -1.$$

Multiplizieren wir diese drei Gleichungen resp. mit y_1, y_2, y und addieren dann die so resultierenden Gleichungen zusammen, so kommt:

$$0 = a y_1 + b y_2 - y, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Der Satz ist ein spezieller Fall des allgemeinen Satzes, daß die Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = 0,$$

deren Koeffizienten im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stetig sind, durch Angabe des Wertes der Funktion nebst demjenigen der ersten Ableitung in einem Punkte des Intervalls vollständig bestimmt wird. Hier ist

$$b = y\,|_{x=0}, \qquad a = y'\,|_{x=0}.$$

Im übrigen ist die Behandlungsweise in einem allgemeinen Verfahren enthalten, wonach die lineare Abhängigkeit von n Funktionen aus dem identischen Verschwinden ihrer Wronskischen Determinante geschlossen wird.[1])

Zweiter Beweis des Additionstheorems. Aus dem vorstehenden Satze ergibt sich noch ein zweiter Beweis des Additionstheorems (7). Es ist nämlich offenbar $s(x + \alpha)$ eine Lösung von (A). Nach diesem Satze muß also

$$s(x + \alpha) = a s(x) + b c(x)$$

1) Hierüber vergleiche man Bôcher, „Certain cases in which the vanishing of the Wronskian is a sufficient condition for linear dependence", *Transactions*

und daher ferner

$$s'(x+\alpha) = c(x+\alpha) = a\,c(x) - b\,s(x)$$

sein. Setzt man hierin $x = 0$, so kommt:

$$s(\alpha) = b, \qquad c(\alpha) = a,$$

also:

$$s(x+\alpha) = s(x)\,c(\alpha) + c(x)\,s(\alpha),$$
$$c(x+\alpha) = c(x)\,c(\alpha) - s(x)\,s(\alpha).$$

w. z. b. w.

§ 6. Fortsetzung: Identifizierung der Funktionen $s(x)$, $c(x)$ mit $\sin x$, $\cos x$.

Um die beiden Funktionen, deren Haupteigenschaften wir im vorhergehenden Paragraphen entwickelt haben, mit den trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ zu identifizieren, knüpfen wir an die Definitionen von Strecke, Halbstrahl und Winkel an, wie sie in Kap. 5, § 4 gegeben sind, und ordnen nun einem vorgelegten Winkel als Maß diejenigen Zahlen t zu, welche durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden:

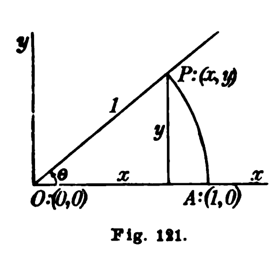


Fig. 121.

$$c(t) = \varkappa \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & -(x_1 - x_0) \\ x_1' - x_0' & y_1' - y_0' \end{vmatrix},$$

$$s(t) = \varkappa \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_1' - x_0' & y_1' - y_0' \end{vmatrix},$$

---

of the American Mathematical Society, Bd. 2 (1901), S. 139, woselbst auch die bezügliche Literatur zitiert wird.

Wir bemerken noch im Vorübergehen, daß in der Mechanik von diesen Eindeutigkeitssätzen vielfach stillschweigend Gebrauch gemacht wird. Bei der Integration der Differentialgleichung, welche das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz zum Ausdruck bringt:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f,$$

— um bloß den einfachsten Fall zu erwähnen, — begnügt man sich nämlich damit, *eine* Lösung aufzustellen, welche den Anfangsbedingungen gerecht wird, indem man dann ohne weiteres annimmt, daß diese Lösung die Bewegung des Systems notwendig regulieren müsse. Könnte indessen eine lineare Differentialgleichung singuläre Lösungen haben, so hätte man doch keinen Beleg dafür, daß gerade diese Lösung diejenige wäre, welche dem vorgelegten Problem entspricht.

wo

$$\varkappa^{-1} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\sqrt{(x_1' - x_0')^2 + (y_1' - y_0')^2}$$

ist. Nimmt man nun insbesondere den in beigesetzter Figur gedeuteten Winkel $\sphericalangle AOP$, so kommt:

$$c(t) = x, \qquad s(t) = y.$$

Nun wird aber andererseits die Länge eines von A aus gemessenen Bogens AP des Einheitskreises

$$x^2 + y^2 = 1$$

durch das Integral

$$\int_{(A)}^{(P)} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{(A)}^{(P)} \sqrt{dt^2} = \pm t$$

gegeben, wobei das obere Zeichen zu nehmen ist, falls die in der Nähe von A gelegenen Punkte des Bogens positiven Werten von t entsprechen; im anderen Falle, das untere. Hiermit fällt t mit derjenigen Zahl θ zusammen, welche in der Trigonometrie dem Winkel $\sphericalangle AOP$ als Maß zugeordnet wird, und zugleich erweisen sich $c(t)$ und $s(t)$ als $\cos t$ und $\sin t$. Nachträglich ergibt sich auch, daß die Periode $2p$ mit der Zahl 2π übereinstimmt, also ist

$$p = \pi.$$

Schlußbemerkungen. Was die übrige Theorie der trigonometrischen Funktionen inklusive der Definitionen:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{usw.}$$

nebst der Besprechung der inversen Funktionen anbetrifft, so ist die übliche Behandlungsweise entweder bereits analytisch oder sie läßt sich doch sofort in eine analytische umsetzen. Hieran schließt sich noch eine Reihe interessanter Fragen, deren Besprechung indessen außerhalb des Rahmens dieses Werkes liegt; es sind das u. a. a) die Zahl π, Transzendenz und Berechnung, sowie auch die Zahl e; b) die Bernoullischen Zahlen und die Reihen $\sum_k k^{-n}$; c) die Eulersche Zahl; d) einiges über die trigonometrischen Reihen; e) die hyperbolischen Funktionen. Wir verweisen deswegen auf die gebräuchlichen Lehrbücher, etwa Godefroy, *Théorie élémentaire des séries*, 4. und 5. Abschn.; Stolz und Gmeiner, *Theoretische Arithmetik*. Dagegen

werden wir uns noch ausführlich mit gewissen Funktionalgleichungen, als hinreichende Bedingungen aufgefaßt, sowie mit einigen Reihen- und Produktentwicklungen zu beschäftigen haben.

§ 7. Über die Bestimmung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ auf Grund ihres Additionstheorems.

Theorem.[1] *Seien $S(x)$, $C(x)$ zwei Funktionen, welche für alle Werte von x eindeutig erklärt sind und das Additonstheorem:*

$$\text{(A)}\qquad \left.\begin{aligned} S(x+y) &= S(x)\,C(y) + C(x)\,S(y), \\ C(x+y) &= C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y), \end{aligned}\right\}$$

besitzen. Gibt es dann einen einzigen Wert von x, wofür beide Funktionen stetig sind, so sind sie ausnahmslos stetig, und zwar ist, sofern sie nicht beide identisch verschwinden,

$$S(x) = e^{ax}\sin\mu x, \quad C(x) = e^{ax}\cos\mu x,$$

wo a und μ Konstante bedeuten.

Verlangt man außerdem noch entweder, daß

$$\text{(B}_1\text{)}\qquad S^2(x) - C^2(x) = 1,$$

oder daß

$$\text{(B}_2\text{)}\qquad C(-x) = C(x),$$

oder endlich, daß

$$\text{(B}_3\text{)}\qquad \lim_{x=0}\frac{C(x)-1}{x} = 0$$

sei, so ist im ersten Falle

$$S(x) = \sin\mu x, \quad C(x) = \cos\mu x.$$

Im zweiten und dritten Falle tritt noch zu dieser Lösung die weitere hinzu, daß beide Funktionen identisch verschwinden. Hiermit sind aber auch alle Lösungen erschöpft.

Wir schicken die Bemerkung voraus, daß das gleichzeitige Verschwinden von $S(x)$ und $C(x)$ für einen einzigen Wert $x = a$ das identische Verschwinden dieser Funktionen nach sich zieht. Zum Beweise braucht man bloß in (A) $y = a$ zu setzen.

---

1) Cf. Tannery, *Fonctions d'une variable,* 1886, S. 147.

Aus dem Additionstheorem schließen wir nun vor allen Dingen, indem wir $x = y = 0$ setzen:

$$[2\,C(0) - 1]\,S(0) - 0,$$
$$C^2(0) - C(0) - S^2(0) = 0,$$

also, da dem Verschwinden des Faktors $2\,C(0) - 1$ keine Lösung der zweiten Gleichung entspricht:

$$(1)\qquad \begin{array}{lll} \text{a)} & S(0) = 0, & C(0) = 1; \\ \text{b)} & S(0) = 0, & C(0) = 0. \end{array}$$

Nach der obigen Bemerkung hat b) das identische Verschwinden von $S(x)$, $C(x)$ zur Folge, womit denn dieser Fall erledigt ist.

Sei $S_1(x)$, $C_1(x)$ ein beliebiges Lösungssystem von (A), wofür beide Funktionen nicht identisch verschwinden. Setzt man

$$S_1^2(x) + C_1^2(x) = f(x),$$

so ergibt sich aus (A), indem man beide Gleichungen ins Quadrat erhebt und sie dann zusammenaddiert, daß

$$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

ist. Da nun außerdem $f(x)$ nie verschwindet und mindestens für einen Wert von x stetig ist, so folgt nach § 4, daß

$$f(x) = e^{2ax}$$

ist.

Aus diesem Lösungssystem bilden wir uns noch ein zweites, wie folgt:

$$S(x) = e^{-ax}\,S_1(x),$$
$$C(x) = e^{-ax}\,C_1(x).$$

Dann läßt das neue Funktionspaar $S(x)$, $C(x)$ ebenfalls das Additionstheorem (A) zu, und außerdem ist

$$(\mathrm{B}_1)\qquad S^2(x) + C^2(x) = 1.$$

Wir wollen zeigen, daß

$$S(x) = \sin \mu x, \qquad C(x) = \cos \mu x$$

ist.

Zu dem Behufe weisen wir zuerst die ausnahmslose Stetigkeit der in Rede stehenden Funktionen $S(x)$ und $C(x)$ nach. Aus dem

Additionstheorem (A) ergeben sich folgende Relationen:

$$(2)\quad \begin{cases} S(x+h) - S(x) = 2\,C\left(x + \frac{h}{2}\right) S\left(\frac{h}{2}\right), \\ C(x+h) - C(x) = -2\,S\left(x + \frac{h}{2}\right) S\left(\frac{h}{2}\right). \end{cases}$$

Verstehen wir hierin zunächst unter x jenen Wert, wofür beide Funktionen $S(x)$, $C(x)$ nach Voraussetzung stetig sind, so finden wir, da wegen (B)

$$|S(x)| + |C(x)| \geq 1$$

ist, daß

$$|S(x+h) - S(x)| + |C(x+h) - C(x)| =$$
$$2\left\{\left|C\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| + \left|S\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|\right\}\left|S\left(\frac{h}{2}\right)\right| \geq 2\left|S\left(\frac{h}{2}\right)\right|$$

ist, und folglich ist

$$\lim_{h=0} S\left(\frac{h}{2}\right) = 0.$$

Aus (2) folgt nun weiter, indem man x jetzt einen beliebigen Wert beilegt und auch dabei der Endlichkeit von $S(x)$, $C(x)$ für alle Werte des Arguments eingedenk wird, daß diese Funktionen ausnahmslos stetig sind.

Fahren wir jetzt weiter. Jedem Werte von x entspricht wegen (B) ein Punkt des Einheitskreises, wodurch dem andererseits der [illegible] bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt wird:

$$S(x) = \sin [illegible], \quad [illegible] = \cos [illegible]$$

Hiernach wird [illegible] als vieldeutige Funktion von x bestimmt und zwar so, daß sich [illegible] Funktionswerte im Kleinen zu einer Reihe von eindeutigen stetigen Funktionen zusammenfassen lassen. Dem [illegible] Satze von [illegible] gemäß [illegible] solche Zusammenfassung auch im Großen für das ganze Intervall $-\infty < x < +\infty$ möglich.

[illegible]

[illegible]

[illegible] verschwindet. Dann wird

$$[illegible] \cos a\,x.$$

[illegible] jetzt

$$\sin\varphi(x+y)=\sin\varphi(x)\cos\varphi(y)+\cos\varphi(x)\sin\varphi(y)=\sin[\varphi(x)+\varphi(y)],$$
$$\cos\varphi(x+y)=\cos\varphi(x)\cos\varphi(y)-\sin\varphi(x)\sin\varphi(y)=\cos[\varphi(x)+\varphi(y)].$$

Hieraus schließt man zunächst, daß

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)+2k\pi$$

ist. Für $x=y=0$ ist aber $k=0$, und wegen der Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)$ muß k diesen Wert beständig beibehalten. Daher ist

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$

woraus sich nun vermöge der Aufgabe von § 4 ergibt, daß

$$\varphi(x)=\mu x.$$

Hiermit ist der Beweis des ersten Teils des Satzes, sowie der Beweis für den Fall (B_1) geliefert.

Zum Beweise des letzten Teils des Satzes bemerken wir vor allem, daß jede nicht identisch verschwindende Lösung von der Form

$$S(x)=e^{ax}\sin\mu x,\qquad C(x)=e^{ax}\cos\mu x$$

ist. Soll nun $C(-x)=C(x)$, also

$$e^{-ax}\cos(-\mu x)=e^{ax}\cos\mu x$$

sein, so folgt daraus, daß $a=0$ sein muß. — Ein ähnlicher Schluß gilt auch im Falle (B_3).

Wie man sieht, umfassen die Funktionalgleichungen (A) sowohl die trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, indem man $a=0$, $\mu=1$ setzt, als auch die Exponentialfunktion e^x, indem man $a=1$, $\mu=0$ setzt.

Van Vleck[1]) hat eine einzige Funktionalgleichung gefunden, nämlich:

$$f(x-y+A)-f(x+y+A)=2f(x)\,f(y),$$

---

1) *Annals of Mathematics*, 2. Reihe, Bd. 11 (1910) S. 161, sowie ibid., Bd. 13 (1912), S. 154. Eine ähnliche Gleichung, nämlich

$$\varphi(y+x)+\varphi(y-x)=2\varphi(x)\varphi(y),$$

kommt schon bei d'Alembert, *Mémoire sur les principes de la mécanique*, 1769, vor und wird auch von Cauchy, *Cours d'analyse*, 1821, behandelt; cf. Pincherle, *Enzyklopädie*, II A 11, S. 789. Diese Gleichung läßt aber außer der Lösung $\cos\mu x$ noch die Lösung $\operatorname{ch}\mu x$ zu, und definiert somit im Bereich der reellen Veränderlichen nicht ausschließlich eine trigonometrische Funktion.

deren allgemeinste stetige Lösung in der sinus-Funktion besteht:

$$f(x) = \sin \mu x,$$

und welche darum eine charakteristische Eigenschaft dieser Funktion ausdrückt.

§ 8. Entsprechendes für $\tan x$.

Theorem. *Sei $f(x)$ eine Funktion, welche für alle Werte von x, höchstens mit Ausnahme isolierter Stellen, eindeutig erklärt ist und das Additionstheorem:*

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

besitzt, wo x, y und $x+y$ irgend drei Punkte des Definitionsbereiches sind. Ist $f(x)$ dann in einem einzigen Punkte stetig und überdies im Punkte $x=0$ definiert, so ist $f(x)$ in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches stetig, und zwar kann $f(x)$, sofern man hebbare Unstetigkeiten ausschließt, nichts anderes als die Funktion $\tan \mu x$ sein:

$$f(x) = \tan \mu x.$$

Den Beweis wollen wir nur kurz andeuten. Zunächst erkennt man, daß

$$f(0) = 0,$$

sowie daß $f(x)$ in jedem Punkte des Definitionsbereichs stetig ist. Ist ferner $f(\omega) = 0$, $\omega \neq 0$, so ist

$$f(x+\omega) = f(x),$$

also ist ω eine Periode. Hieraus folgt, daß, sofern $f(x)$ nicht identisch verschwindet, die Wurzeln von $f(x)$ isoliert sind. — Im übrigen ist $f(x)$ eine ungerade Funktion, wie sich aus der Substitution $y = -x$ in der Funktionalgleichung sofort ergibt.

Damit die Kurve

$$y = \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetig ist, stets konkav nach oben sei, ist notwendig und hinreichend[1]), daß

1) Diese Bedingung findet sich bei Stolz, *Allgemeine Arithmetik*, Bd. 1, S. 193, sowie bei Stolz u. Gmeiner, *Funktionentheorie*, 1. Abteil., S. 61. Beim arithmetischen Beweise wird indessen nur von der Relation (1), als analytische

(1) $$\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h) > 0$$

sei, wo x ein beliebiger Punkt des Intervalls und h nur so beschränkt wird, daß die Punkte $x+h$, $x-h$ auch im Intervalle liegen. Soll die Kurve konkav nach unten sein, so wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt.

Wie eine leichte Rechnung zeigt, ist die vorliegende Kurve,

$$y = f(x),$$

in der Umgebung eines jeden Punktes x, welcher nur keine Wurzel ist, konkav nach oben, falls $f(x) > 0$ ist; im anderen Falle ist die Kurve konkav nach unten.

Hieraus schließt man ferner, daß diese Kurve in der ganzen rechtsseitigen Umgebung des Punktes $x = 0$ konkav nach oben ist, falls $\lim\limits_{x=0^+} f(x) = 0^+$ ist; im anderen Falle ist sie konkav nach unten.

Nun ist es nicht mehr schwer nachzuweisen, daß

$$\lim_{h=0^+} \frac{f(h)}{h}$$

existiert, und da

$$f(-x) = -f(x)$$

ist, so folgt auch ferner, daß

$$\lim_{h=0} \frac{f(h)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert sei mit μ bezeichnet.

Jetzt ergibt sich, daß die Funktion $f(x)$ in jedem Punkte des Definitionsbereichs eine Ableitung zuläßt, sowie daß

$$f'(x) = \mu[1 + f(x)^2]$$

ist, und hiermit ist der Satz bewiesen.

§ 9. Andere Definitionen der elementaren Funktionen.

a) *Algebraische Definition der Exponentialfunktion.* Vor allem gedenken wir der Definition von $a^{p/q}$ und a^x, welche auf der q^{ten} Wurzel der Zahl a beruht. Hierüber vergleiche man die gebräuchlichen Lehrbücher, etwa Stolz und Gmeiner, *Theoretische Arithmetik*;

Beziehung aufgefaßt, nicht aber von der soeben erwähnten geometrischen Deutung derselben, Gebrauch gemacht. Wegen der Einzelheiten des Beweises sei auf die erste Auflage dieses Werkes, Bd. 1, Kap. 12, § 7 verwiesen.

Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 1886, sowie *Leçons d'algèbre et d'analyse*, Bd. 1, 1906. Dabei wird die Kenntnis keines speziellen unendlichen Prozesses vorausgesetzt, was zur Folge hat, daß sich die Behandlung dementsprechend umständlich gestaltet.

b) *Definition der Exponentialfunktion auf Grund des Additionstheorems.*[1]) Es gilt folgendes Theorem: Sei $f(x)$ eine Funktion, die für alle Werte von x eindeutig erklärt ist und das Additionstheorem:

(1) $$f(x+y) = f(x)f(y)$$

besitzt. Indem wir fortan vom besonderen Falle absehen, daß $f(x)$ identisch verschwindet, ist stets $f(x) > 0$, und zwar stimmt $f(x)$ für jeden rationalen Wert $x = p/q$ mit $\sqrt[q]{a^p}$ überein, wo $f(1) = a$ gesetzt ist. Verlangt man überdies, daß $f(x)$ für einen einzigen Wert von x stetig sei[2]), so erweist sich $f(x)$ als ausnahmslos stetig. Sodann nähert sich der Quotient $(f(x) - 1)/x$ einem Grenzwert, wenn x gegen 0 abnimmt:

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)-1}{x} = \mu.$$

Endlich hat $f(x)$ eine Ableitung und genügt der Differentialgleichung

(2) $$f'(x) = \mu f(x). \quad -$$

Um den Existenzbeweis für eine derartige Funktion $f(x)$ zu führen, kann man eine Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und dieselbe dann entweder in (1) oder in (2) eintragen. Dieses Verfahren ist sofort auf den Fall komplexer Veränderlichen anwendbar. Die Abelsche Untersuchung über die binomische Reihe läßt sich auch zu diesem Zwecke verwenden. Man vergleiche ferner unter d).

c) *Die Definitionen von Kap.* 6, §§ 12—15. Diese sind durchaus elementaren Charakters. Sie beruhen auf den bekannten Eigenschaften der reellen elementaren Funktionen und entraten jedes doppelten Grenzüberganges.

---

1) Cauchy, *Cours d'analyse*, Bd. 1, 1821, S. 106.

2) Diese Bedingung kann weiter gefaßt werden. Nach den von Darboux und Wilson erhaltenen Resultaten (§ 4, Ende) genügt es nämlich zu verlangen, daß es einen Wert von x geben solle, in dessen Umgebung $f(x)$ bloß endlich bleibt.

d) *Definition der Exponentialfunktion auf Grund der Differentialgleichung:*

$$\text{(3)} \qquad \frac{dw}{dz} = w.$$

Setzt man in (2):

$$x' = \mu x, \quad f(x) = f\left(\frac{x'}{\mu}\right) = \mathfrak{f}(x'),$$

so wird (2) auf die Normalform

$$\mathfrak{f}'(x') = \mathfrak{f}(x')$$

gebracht. Es liegt jetzt nahe zu fragen, ob diese Differentialgleichung nicht auch für komplexe Werte des Arguments eine Lösung zuläßt. Diese Frage hat Demartres[1]) mit elementaren Hilfsmitteln erledigt. Er setzt

$$w = R(\cos \Phi + i \sin \Phi),$$

wodurch (3) die Gestalt annimmt:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x} + i R \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)(\cos \Phi + i \sin \Phi) = R(\cos \Phi + i \sin \Phi).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R, \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Andererseits findet man aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y},$$

daß

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

ist. So kommt:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 0,$$

also:

$$R = ke^x = e^x,$$

sofern w für reelle Werte von z mit e^z übereinstimmen soll. Ferner schließt man:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1, \quad \Phi = y + c = y + 2n\pi.$$

---

1) Demartres, *Cours d'analyse*, Bd. 2, S. 11. Sein Ausgangspunkt war indessen nicht die Differentialgleichung (3), sondern das Additionstheorem (1), für komplexe Werte geschrieben, woraus er erst jene Differentialgleichung ableitet.

Hiermit ist w eindeutig bestimmt:

$$w = e^x (\cos y + i \sin y),$$

und da bleibt denn nur noch übrig, ebenso wie in Kap. 6, § 13 nachzuweisen, daß diese Funktion in der Tat eine naturgemäße Erweiterung der reellen Funktion e^x für komplexe Werte des Arguments liefert, indem sie der weiteren Funktionaleigenschaften dieser Funktion teilhaftig wird.

e) *Unmotivierte Definitionen vermöge willkürlicher unendlicher Prozesse.* Hierzu zählen wir vor allem die Definitionen von e^x, $\sin x$, $\cos x$ mittels der entsprechenden Potenzreihen. Sodann erwähnen wir die Definitionen:[1])

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \tag{4}$$

$$\lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \log x. \tag{5}$$

Der Grenzübergang (4) ist ja bereits einmal für den Fall eines komplexen Arguments besprochen worden, Kap. 8, § 9. Dieser Formel setzten wir damals auch entsprechende Ausdrücke für $\sin z$ und $\cos z$ an die Seite.

Kehren wir noch zur Definition der Exponentialfunktion vermöge der Potenzreihe zurück und setzen

$$\mathcal{E}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

so erhalten wir zunächst eine ganze transzendente Funktion von z. Diese genügt der Differentialgleichung

$$\mathcal{E}'(z) = \mathcal{E}(z)$$

und läßt fernerhin das Additionstheorem (1) zu:

$$\mathcal{E}(z_1 + z_2) = \mathcal{E}(z_1)\,\mathcal{E}(z_2),$$

wie man nach dem zum Beweise des 2. Satzes von § 5 angewendeten Verfahrens sofort erkennt; denn es ist

$$\mathcal{E}^{(n)}(z) = \mathcal{E}(z), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

---

1) Euler, *Miscellanea Berolensia*, Bd. 7 (1743) S. 177 und *Introductio in analysin infinitorum*, Bd. 1, 1748 Cap. VII.

Setzen wir insbesondere $z_1 = x$, $z_2 = yi$, so kommt:

$$\mathcal{E}(z) = e^x (\cos y + i \sin y),$$

wobei wir die Taylorschen Reihenentwicklungen für die reellen Funktionen e^x, $\sin x$, $\cos x$ als bekannt vorausgesetzt haben. Zur Rechtfertigung der Definition

$$\mathcal{E}(z) = e^z$$

ist jetzt nur noch ein kurzer Schritt.

f) *Definition vermöge Integration durch komplexes Gebiet.* Endlich erwähnen wir noch die Definitionen:[1])

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z}, \quad \operatorname{arc}\tan z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}, \quad \operatorname{arc}\sin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Darnach werden wir die Exponential- und trigonometrischen Funktionen als die Umkehrungen dieser Funktionen anzusehen haben.

Bei der Integration reeller rationaler Funktionen im reellen Gebiete stellt sich neben dem Logarithmus noch die Funktion

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

ein, und zwar kommt man bereits mit diesen beiden Funktionen aus. Darum liegt es nahe, die Theorie letzterer Funktion auf reeller Grundlage vollständig zu entwickeln, was auch nach den vorausgehenden Methoden leicht durchzuführen ist.

§ 10. Über einige Reihen- und Produktentwicklungen. Ein Satz betreffend gleichmäßige Konvergenz.

In Kap. 11 haben wir Reihen- und Produktentwicklungen für die trigonometrischen Funktionen aufgestellt, indem wir von den Eigenschaften der periodischen Funktionen im komplexen Gebiete ausgingen. Wir wollen in diesem Paragraphen eine Methode kennen lernen, welche sowohl auf komplexes als auch auf reelles Gebiet anwendbar ist. Beginnen wir mit der Funktion $\cot x$.

---

1) Gauß, Brief an Bessel vom 18. Dez. 1811, *Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel*, S. 157 = *Werke*, Bd. 8, S. 90.

Reihenentwicklung für $\cot x$.[1] Indem wir an den Moivreschen Satz, S. 208, (3) anknüpfen, finden wir:

$$\cot m\varphi = \frac{g(\tan\varphi)}{G(\tan\varphi)}.$$

Dabei möge m eine ungerade Zahl sein: $m = 2\mu + 1$. Dann wird die rechte Seite ein echter Bruch, wie man vermöge des Grenzübergangs $\lim \varphi = \pi/2$ sofort erkennt, da die linke Seite dabei gegen 0 abnimmt, $\tan\varphi$ aber unendlich wird. Wir wollen diesen Bruch in Partialbrüche zerlegen. Der Grad des Nenners ist jedenfalls nicht höher als m. Andererseits können wir m getrennte Werte von $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ angeben, wofür $\cot m\varphi$ unendlich wird, nämlich:

$$\varphi = 0, \ \pm\frac{\pi}{m}, \quad \pm\frac{2\pi}{m}, \quad \cdots \pm\frac{\mu\pi}{m}.$$

Demnach ist

$$G(\tan\varphi) = C\tan\varphi\left(\tan\varphi - \tan\frac{\pi}{m}\right)\left(\tan\varphi + \tan\frac{\pi}{m}\right)\cdots.$$

Hiermit erhalten wir als Partialbruchzerlegung:

$$\cot m\varphi = \sum_{k=-\mu}^{\mu} \frac{A_k}{\tan\varphi - \tan\frac{k\pi}{m}}.$$

Zur Bestimmung von A_k multiplizieren wir beiderseits mit $\sin m\varphi$ und lassen φ dann den Grenzübergang $\lim \varphi = k\pi/m$ ausführen. Dabei konvergieren alle Terme rechter Hand bis auf den mit A_k gegen 0, welch letzterer die unbestimmte Form 0/0 annimmt. Sein Grenzwert wird durch das gewöhnliche Verfahren der Differentialrechnung ermittelt. So finden wir:

$$\cos k\pi = \frac{A_k m \cos k\pi}{\sec^2\frac{k\pi}{m}}, \quad A_k = \frac{1}{m}\sec^2\frac{k\pi}{m}.$$

Indem wir noch $m\varphi = x$ setzen, erhalten wir als Resultat:

$$\cot x = \sum_{k=-\mu}^{\mu} \frac{\sec^2\frac{k\pi}{m}}{m\tan\frac{x}{m} - m\tan\frac{k\pi}{m}}, \tag{1}$$

oder auch:

$$\cot x = \frac{1}{m\tan\frac{x}{m}} + \sum_{k=1}^{\mu} \frac{2\sec^2\frac{k\pi}{m}\, m\tan\frac{x}{m}}{m^2\tan^2\frac{x}{m} - m^2\tan^2\frac{k\pi}{m}}. \tag{2}$$

1) Man vergleiche die in Kap. 11, § 1 und § 8 gegebenen Zitate auf Euler.

Bei diesen Formeln angelangt wäre Euler schon am Ziele gewesen. Denn beim Grenzübergange $m = \infty$ nähert sich ja der allgemeine Term dem Grenzwerte $1/(x - k\pi)$ bzw. $2x/(x^2 - k^2\pi^2)$, womit sich denn aus (2) die Reihe von Grenzwerten

$$\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$$

ergibt, und zwar konvergiert diese Reihe absolut für jeden Wert von x, wofür nur kein Nenner verschwindet. Wir wissen aber, daß es keineswegs selbstverständlich ist, daß die Reihe der Grenzwerte und der Grenzwert der Reihe übereinstimmen sollen. Um diese Frage zu erledigen, wollen wir nun ein allgemeines Theorem beweisen, welches den eigentlichen Kern bei derartigen doppelten Grenzübergängen enthält. Wir fassen den Satz zugleich etwas weiter, als zum gegenwärtigen Zwecke gerade nötig ist.[1])

Theorem. *Sei $s_n(m)$ eine Funktion der beiden unabhängigen natürlichen Zahlen n, m, welche folgenden Bedingungen genügt:*

a) *$s_n(m)$ strebt einem Grenzwerte zu, wenn $n = \infty$ wird:*

$$\lim_{n=\infty} s_n(m) = f(m);$$

b) *$s_n(m)$ strebt einem Grenzwerte zu, wenn $m = \infty$ wird:*

$$\lim_{m=\infty} s_n(m) = S_n;$$

c) *$s_n(m)$ konvergiert gleichmäßig, wenn $n = \infty$ wird:*

$$|s_n(m) - s_{n'}(m)| < \varepsilon, \qquad n \geqq \nu, \; n' \geqq \nu,$$

wo ν nicht von m abhängt.[2]) *Dann schließen wir:*

1) *$f(m)$ strebt einem Grenzwerte zu, wenn $m = \infty$ wird:*

$$\lim_{m=\infty} f(m) = A;$$

2) *S_n strebt einem Grenzwerte zu, wenn $n = \infty$ wird:*

$$\lim_{n=\infty} S_n = B;$$

1) Zum leichteren Verständnis des Inhalts dieses Satzes wird dem Leser empfohlen, sich zuerst in die zweite Formulierung desselben als Reihensatz hineinzudenken.

2) Diese Relation braucht indessen nicht für alle Werte von m zu bestehen. Wesentlich ist nur, daß jedem vorgegebenen positiven ε zwei feste Zahlen ν, μ entsprechen, derart, daß besagte Beziehung gilt, sobald nur $n \geq \nu$, $n' \geqq \nu$ und $m > \mu$ sind.

3) *beide Grenzwerte sind gleich:*

$$A = B.$$

Beweis. Aus

c) $$|s_n(m) - s_{n'}(m)| < \varepsilon, \qquad n \geqq \nu, n' \geqq \nu,$$

folgt zuvörderst vermöge des Grenzübergangs $m = \infty$:

(α) $$|S_n - S_{n'}| \leqq \varepsilon, \qquad n \geqq \nu, n' \geqq \nu,$$

womit denn 2) bewiesen ist:

$$\lim_{n=\infty} S_n = B.$$

Läßt man in (α) $n = \infty$ werden, und setzt man ferner $n' = \nu$, so kommt:

(i) $$|B - S_\nu| \leqq \varepsilon.$$

Läßt man andererseits in c) $n' = \infty$ werden, und setzt man $n = \nu$, so wird für alle Werte von m, resp. sobald $m \geqq \mu$ ist,

(ii) $$|s_\nu(m) - f(m)| \leqq \varepsilon.$$

Endlich ist nach b)

(iii) $$|S_\nu - s_\nu(m)| < \varepsilon, \qquad m \geqq M.$$

Aus den drei Relationen (i), (ii), (iii) ergibt sich nun, daß

$$|B - f(m)| < 3\varepsilon, \qquad m \geqq M, \mu$$

ist, womit denn zugleich 1) und 3) bewiesen sind.

Hiermit ist der Satz bewiesen. Wir haben ihn zwar nur für den Fall ausgesprochen, daß die Argumente n, m natürliche Zahlen sind. Er gilt aber offenbar allgemein unter geeigneter Abänderung der Formulierung für eine Funktion $s(x, y)$ von zwei beliebigen reellen oder komplexen Argumenten x, y, welche je eine endliche oder unendliche Häufungsstelle $\lim x = \bar{x}$, $\lim y = \bar{y}$ besitzen.

Wir wollen noch diejenige Formulierung des vorstehenden Satzes hinzufügen, welche sich auf die unendlichen Reihen bezieht.[1])

Der entsprechende Reihensatz. *Sei*

$$f(m) = u_1(m) + u_2(m) + \cdots$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder Funktionen der natürlichen Zahl m sind und die folgendermaßen beschaffen ist: erstens konvergiert jedes

1) Der Leser wolle beachten, daß es sich hier doch bloß um eine andere *Form* des Theorems handelt; *inhaltlich* sind ja beide Sätze gleichbedeutend.

Glied der Reihe beim Grenzübergange $\lim m = \infty$ *gegen einen Grenzwert; zweitens konvergiert die Reihe gleichmäßig. Dann strebt die durch die Reihe definierte Funktion* $f(m)$ *einem Grenzwerte zu, wenn* $m = \infty$ *wird. Ferner konvergiert die Reihe der Grenzwerte der einzelnen Glieder, und endlich stimmen diese beiden Grenzwerte überein:*

$$\lim_{m=\infty} f(m) = \lim_{m=\infty} u_1(m) + \lim_{m=\infty} u_2(m) + \cdots.$$

Diese Formulierung hat namentlich den Vorzug, daß wir bereits im Besitze eines brauchbaren Kriteriums zur Feststellung der gleichmäßigen Konvergenz in einem gegebenen Falle sind, da sich das Weierstraßsche Kriterium von Kap. 3, § 4 hier ohne weiteres anwenden läßt.

Kehren wir nunmehr zur Ergänzung der vorhin bezeichneten Lücke zurück! Nach dem soeben bewiesenen Theorem handelt es sich bloß noch um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (2). Wir suchen deshalb ein M_k zu bestimmen, welches den Bedingungen des Weierstraßschen Kriteriums Genüge leistet. Zu dem Behufe formen wir das allgemeine Glied der Summe (2), wie folgt, um:

$$\frac{-2m\tan\dfrac{x}{m}}{\left(m\sin\dfrac{k\pi}{m}\right)^2 - \cos^2\dfrac{k\pi}{m}\left(m\tan\dfrac{x}{m}\right)^2}, \qquad k \leqq \frac{m-1}{2}.$$

Sei $x \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, eine willkürliche Zahl, und sei $A > |x|$. Dann wird

$$\left| m\tan\frac{x}{m} \right| < A, \qquad m \geqq M.$$

Andererseits überzeugt man sich leicht, daß

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

ist.[1]) Daher dürfen wir

$$M_k = \frac{2A}{k^2\pi^2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2 - A^2} = \frac{2A}{4k^2 - A^2}, \qquad k > \frac{A}{2},$$

setzen, und hiermit ist der Beweis fertig.

---

1) Es genügt ja, daß $\sin\alpha/\alpha$ bloß eine positive untere Grenze K im genannten Intervalle hat, was noch leichter festzustellen ist.

An die vorstehende Entwicklung für $\cot x$ schließt sich noch die andere Form derselben, vgl. Kap. 11, § 1:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum{}' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2},$$

sowie auch die durch die Integration daraus zu erhaltende Produktentwicklung für $\sin x$:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x \prod{}' \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}} = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Andererseits läßt sich aber letztere Produktentwicklung direkt aufstellen, woraus dann umgekehrt jene Reihenentwicklungen abgeleitet werden können. Zu dieser Betrachtung wollen wir uns jetzt hinwenden.

Produktentwicklung für $\sin x$. Wir gehen wieder vom Moivreschen Satze aus, wonach

$$\sin m\varphi = G(\sin \varphi), \qquad m = 2\mu + 1,$$

ist, und zerlegen das Polynom rechter Hand, ähnlich wie vorhin, in lineare Faktoren:

$$G(\sin \varphi) = C \prod_{k=-\mu}^{\mu} \left(\sin \varphi - \sin \frac{k\pi}{m}\right).$$

Zur Bestimmung des Faktors C dividieren wir beiderseits durch φ und lassen dann φ gegen 0 abnehmen. So kommt:

$$m = C \prod_{k=-\mu}^{\mu}{}' \left(- \sin \frac{k\pi}{m}\right),$$

wobei der am Produktzeichen angebrachte Strich, wie üblich, anzeigt, daß der Wert $k = 0$ übergangen werden soll. Indem wir noch $m\varphi = x$ setzen, erhalten wir die endgültige Formel:

$$\sin x = m \sin \frac{x}{m} \prod_{k=-\mu}^{\mu}{}' \left(1 - \frac{\sin \frac{x}{m}}{\sin \frac{k\pi}{m}}\right) = m \sin \frac{x}{m} \prod_{k=1}^{\mu} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right).$$

Hiermit wäre Euler wieder am Ziele gewesen, denn der allgemeine Faktor nähert sich offenbar $1 - x/k\pi$ resp. $1 - x^2/k^2\pi^2$. Indessen bleibt noch der Beweis, daß das Produkt der Grenzwerte

der Faktoren konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert wie das Produkt der von m abhängigen Faktoren. Beides wird in ganz ähnlicher Weise, wie im Falle der Reihenentwicklung für $\cot x$, vermöge des vorstehenden Theorems bewiesen. Die Durchführung der Einzelheiten wird dem Leser überlassen.

Definition der Exponentialfunktion vermöge des Grenzwertes

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m.$$

Auf Grund des obigen Konvergenztheorems beweisen wir zuerst, daß

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ist, woraus sich dann die Ableitung der Grenzfunktion sofort berechnet. Setzt man ferner

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\left(1+\frac{y}{m}\right)^m = \left[1+\left(\frac{x+y}{m}+\frac{xy}{m^2}\right)\right]^m$$

und wendet man jenes Theorem auf die rechte Seite dieser Gleichung, nachdem sie erst nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt ist, von neuem an, so ergibt sich, daß die Grenzfunktion das Additionstheorem

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

zuläßt. Hiermit ist die Grundlage für die Theorie der Exponentialfunktion und des Logarithmus wieder auf eine andere Weise geschaffen (vgl. § 9, e)).

Aufgabe. Indem man vom Moivreschen Satze ausgeht und $m\varphi = x$ setzt:

$$\sin x = m\cos^{m-1}\frac{x}{m}\sin\frac{x}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}\frac{x}{m}\sin^3\frac{x}{m} + \cdots,$$

$$\cos x = \cos^m\frac{x}{m} - \frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2}\frac{x}{m}\sin^2\frac{x}{m} + \cdots,$$

leite man durch den Grenzübergang $m=\infty$ die Taylorschen Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ her.

Vierter Abschnitt.

Das logarithmische Potential. Uniformisierung.

Dreizehntes Kapitel.

Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials.

§ 1. Physikalische Grundlagen.

Durch verschiedene Probleme der mathematischen Physik war man schon früh auf *harmonische* Funktionen geführt worden, d. h. auf Funktionen, die der Laplaceschen[1]) Differentialgleichung:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

Genüge leisten. Diese Probleme wollen wir vorerst der Reihe nach besprechen.

a) Stationäre Wärmeströmungen.

Wir denken uns eine metallne Platte, deren Hauptbegrenzungsflächen aus zwei parallelen Ebenen bestehen. Die Ausdehnung dieser Flächen soll groß im Vergleich zur Dicke der Platte sein. Wir wollen die eine Seite auf die Temperatur 100° bringen, indem wir Dampf dagegen strömen lassen, während die andere Seite mittels schmelzenden Schnees auf 0° erhalten wird. Dann findet zunächst ein unregelmäßiger Wärmeaustausch statt, welcher alsbald einen bestimmten Grenzzustand immer noch mehr anstrebt. Faßt man einen im mittleren Teil der Platte gelegenen Bereich ins Auge, so werden die Strömungslinien dort beim Grenzzustande annähernd gerade, — im Falle sich die Platte nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt, so werden diese Linien ja wirklich gerade sein, — während die Temperatur u in einem inneren Punkte P im direkten Verhältnisse zur Entfernung x dieses Punktes von der wärmeren Seite abfällt:

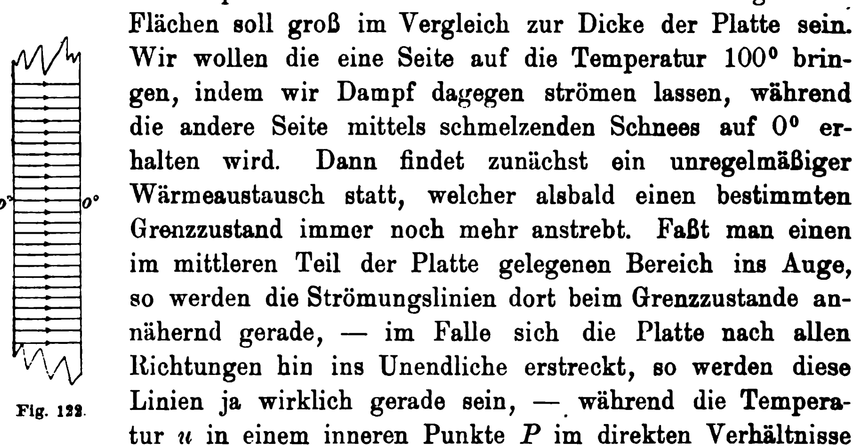


Fig. 122.

1) Bei Laplace kommt die Differentialgleichung in Polarkoordinaten als Bedingung für das Potential einer Massenverteilung in den *Histoires* der Pariser Akademie 1782 [85], S. 135 = *Oeuvres*, Bd. 10, S. 302 vor. Später gab er auch

$$u = 100 - 100\,\frac{x}{a},$$

wo a die Dicke der Platte bedeutet. Wie man sieht, ist u eine harmonische Funktion.

Die Wärmemenge, welche einen ebenen innerhalb der Platte gelegenen Bereich σ vom Flächeninhalt A in der Zeiteinheit passiert, werde mit Q bezeichnet. Unter einer isotropen Platte von konstanter innerer Wärmeleitungsfähigkeit K versteht man eine solche, wofür Q beim Grenzzustande nur von A, a, K und von der Richtung einer Normale von σ, sonst aber nicht von der Gestalt und Lage von σ abhängt, und zwar so, daß

$$Q = \frac{KA\cos\theta}{a}$$

wird, wo θ den Winkel zwischen der Strömungsrichtung und der Normale bedeutet. Wir werden uns übrigens auf solche isotropen Substanzen beschränken. Für den einen Sinn der Normale wird Q eine positive, für den entgegengesetzten Sinn eine negative Größe sein. Dem entspricht die Auffassung, daß die Wärmemenge Q als positiv oder negativ angesehen werden soll, je nachdem die Wärme nach derjenigen Seite hin strömt, oder nicht, nach welcher die Normale zeigt. Bezeichnet man mit $\frac{\partial u}{\partial n}$ die nach der Richtung der Normale gebildete partielle Ableitung von u, so ist $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\cos\theta}{a}$, und wir haben:

$$Q = -K\frac{\partial u}{\partial n}A.$$

Ein allgemeines Problem der stationären Wärmeströmung ist nun folgendes. Man denke sich irgend einen Wärme leitenden Körper, dessen Oberfläche Wärme zugeführt bzw. abgezogen wird und zwar so, daß die Temperatur in jedem einzelnen Punkte der Oberfläche in Bezug auf die Zeit konstant bleibt. Die Verteilung der Temperatur auf der Oberfläche soll im allgemeinen eine stetige sein, in vereinzelten

---

die im Texte stehende Form derselben für rechtwinklige Koordinaten, ibid. 1787 [89], S. 252 = *Oeuvres*, Bd. 11, S. 278. Die Differentialgleichung tritt bereits bei Lagrange in einer hydrodynamischen Untersuchung auf, *Miscellanea Taurinensia*, Bd. 3 (1760/61) Nr. 42 = *Werke*, Bd. 1, S. 444. Weitere Zitate bei Burkhardt und Meyer, *Enzyklopädie*, II A 7b, Nr. 2.

Die Bezeichnung *harmonische Funktion* rührt von Thomson und Tait her, *Natural Philosophy*, 1873, Appendix B, b. Vgl. auch Burkhardt und Meyer ibid.

Hinsichtlich der Literatur dieses Kapitels sei allgemein auf den Bericht von Burkhardt und Meyer, *Enzyklopädie*, II A 7b, verwiesen.

Punkten und längs gewisser Kurven darf jedoch eine Unstetigkeit eintreten. Die Temperaturwerte am Rande seien mit U bezeichnet. Eine Wärmeströmung tritt nun ein. Beim weiteren Verlauf derselben wird ein stationärer Strömungszustand angestrebt, welcher, wie folgt, charakterisiert ist: würde man alle Punkte des Körpers gleichzeitig auf die angestrebte Temperatur bringen, so würden sie diese Temperatur auch weiterhin beibehalten, und die Strömungslinien würden sich nicht mit der Zeit ändern. Bezeichnet man noch mit u den Wert der Temperatur beim stationären Strömungszustande, so ist u eine im ganzen Körper stetige Funktion, welche sich den Randwerten U stetig anschließt und im Innern des Körpers harmonisch ist:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Der Beweis der letzten Behauptung stützt sich auf folgende

Physikalische Hypothese. *Ist Σ eine beliebige, im Bereiche einer stationären Strömung gelegene berandete oder geschlossene Fläche, und bezeichnet man die partielle Ableitung der Temperatur u nach der Normale mit $\partial u/\partial n$, so wird die Wärmemenge Q, welche Σ in der Zeiteinheit passiert, durch das über die ganze Fläche hin erstreckte Doppelintegral*

$$Q = -K \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

dargestellt.

Ist Σ insbesondere eine geschlossene, keine Begrenzungsfläche oder sonstige Randpunkte des Körpers umfassende Fläche, so verschwindet Q, und man erhält mithin die Relation:

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

Aus dem Greenschen Satze:[1])

1) Der Gedanke, Raumintegrale durch Oberflächenintegrale auszudrücken, tritt schon bei Lagrange auf, *Miscellanea Taurinensia*, Bd. 2 (1760/61) Nr. 45 = *Oeuvres*, Bd. 1, S. 263, und war auch Gauß geläufig, *Commentationes soc. reg. sci. Gott. rec.*, Bd. 2 (1813) = *Werke*, Bd. 5, S. 1. Auf die prinzipielle Bedeutung der Methode ist die Aufmerksamkeit der Mathematiker erst durch Green gelenkt worden, welcher das Verfahren mit vollem Bewußtsein an die Spitze seiner Untersuchungen über die Elektrizität und den Magnetismus stellte; *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, 1828 = *Mathematical Papers*, S. 1. Insbesondere leitete Green die

$$\iiint\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dV=-\iint\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

wobei sich n auf die innere Normale bezieht, ergibt sich dann zunächst der Beweis für die Notwendigkeit der Bedingung. Würde nämlich die stetige Funktion Δu in einem inneren Punkte von S etwa einen positiven Wert annehmen, so könnte man diesen Punkt mit einer kleinen geschlossenen Fläche umgeben, in deren Innerm Δu durchweg positiv bleibt, und das dreifache Integral würde dann für das Innere dieser Fläche nicht verschwinden.

Um zweitens zu beweisen, daß die Bedingung hinreicht, erweitern wir vor allem die obige physikalische Hypothese, indem wir sagen: *Bei einer beliebigen Wärmeströmung wird die Geschwindigkeit, mit welcher die Wärme eine gegebene Fläche Σ passiert, d. h. die nach der Zeit genommene Ableitung der die Fläche Σ passierenden Wärmemenge Q durch die Formel gegeben:*

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=-K\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

wobei Q also jetzt die Wärmemenge bedeutet, welche in der veränderlichen Zeit t durch Σ hindurchfließt.

Hierzu tritt noch ein zweites physikalisches Gesetz. Wird eine Substanz der hier zu betrachtenden Beschaffenheit mit dem Rauminhalte V von der Temperatur u auf die Temperatur u' gebracht, so wird die dazu verbrauchte Wärmemenge Q durch die Formel

$$Q=C(u'-u)V$$

gegeben, wo C eine der besonderen Substanz eigene physikalische Konstante, ihre sogenannte spezifische Wärme in bezug auf das Volumen bedeutet. Wir beschränken uns nämlich auf solche Substanzen,

---

Identität her, — und hierin bestand eben seine spezifische Leistung, —

$$\iiint\limits_V(u\Delta v-v\Delta u)\,dV=-\iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.$$

Zum Beweise derselben verschaffte er sich durch partielle Integration den Hilfssatz

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dV=-\iiint\limits_V v\Delta u\,dV-\iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

wobei u, v zwei beliebige Funktionen sind, welche nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen im abgeschlossenen Bereiche V stetig sind.

wofür C eine Konstante ist. Dieses Gesetz wird dann auf den Fall ausgedehnt, daß die Temperatur u bzw. u' eine beliebige stetige Funktion des Ortes ist, und lautet dann folgendermaßen:

$$\Delta Q = C \iiint_V (u' - u)\, dV,$$

wo ΔQ der Zuwachs der Wärmemenge ist. Endlich hänge u auch von der Zeit t ab, $u(x, y, z, t)$. Dann ist nach dem Mittelwertsatz

$$u' - u = u_t(x, y, z, t_0 + \theta \Delta t)\, \Delta t, \qquad 0 < \theta < 1,$$

und man erhält somit als physikalisches Gesetz:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = C \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV,$$

wo Q (resp. $Q +$ const.) die zu einer veränderlichen Zeit t in V enthaltene Wärmemenge bedeutet.

Im Falle einer geschlossenen Fläche haben diese beiden Größen $\partial Q/\partial t$ den gleichen Wert. Mittels des Greenschen Satzes wollen wir noch die erste derselben umformen. So kommt:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = K \iiint_V \Delta u\, dV.$$

Hieraus folgt, daß

$$\iiint_V \left\{ C \frac{\partial u}{\partial t} - K \Delta u \right\} dV = 0$$

ist, wobei V ein beliebiger, ganz im Raume der Wärmeströmung gelegener Bereich ist. Demnach muß der Integrand in jedem Punkte jenes Raumes verschwinden, und daher ist[1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{C} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Aus diesem Resultat erhellt sofort, daß die Laplacesche Gleichung $\Delta u = 0$ eine hinreichende Bedingung für eine stationäre Strö-

1) Fourier, *Théorie analytique de la chaleur,* 1822, Nr. 128 = *Oeuvres,* Bd. 1, S. 105. Von seinen Untersuchungen über die Wärme hat Fourier bereits im Jahre 1807 der Pariser Akademie eine erste Mitteilung gemacht, und das Manuskript einer ausführlichen Darlegung seiner Theorie ist auch im Jahre 1811 bei ihr deponiert worden. Dieses Manuskript, welches mit dem ersten Teil des oben genannten Werkes im wesentlichen identisch war, ließ Fourier 1824 drucken.

mung ist. Aber auch für die notwendige Bedingung liefert diese Formel einen direkten Beweis, welcher schärfer als der vorhin gegebene ist. Unter den allgemeinen Wärmeströmungen, wofür also die Temperatur u von allen vier Größen x, y, z, t abhängt, werden nämlich die stationären Strömungen dadurch ausgezeichnet, daß u in einem beliebigen Punkte des Körpers sich nicht mit t ändert, d. h. es ist hier durchweg

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Der zweidimensionale Fall. Für die Funktionentheorie kommt nur der Fall einer zweidimensionalen Bewegung in Betracht. Darunter versteht man folgendes. Wir denken uns den Körper, in welchem die Wärmeströmung stattfinden soll, als einen unendlich langen Zylinder, dessen rechtwinkliger Querschnitt aus einer bzw. aus mehreren geschlossenen Kurven bestehen soll. Auf der Oberfläche soll die Temperatur in allen Punkten ein und derselben Erzeugenden stets den nämlichen Wert haben, sonst aber beliebig vorgeschrieben werden, sofern man sie nur im allgemeinen als stetig annimmt. Es gibt dann stets einen entsprechenden stationären Strömungszustand, wobei der Wert der Temperatur in jedem Punkte ein und derselben innerhalb des Körpers befindlichen, den Erzeugenden parallelen Geraden auch stets konstant bleibt. Wählt man als z-Achse eine den Erzeugenden parallele Gerade, so verschwindet damit $\partial u/\partial z$, und die Laplacesche Differentialgleichung nimmt also die Form an:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Eine dieser Differentialgleichung genügende Funktion nennt man ein *logarithmisches Potential*, während eine allgemeine von allen drei Argumenten x, y, z abhängige harmonische Funktion wohl als ein *Newtonsches Potential* bezeichnet wird.[1])

1) C. Neumann, *Journ. für Math.*, Bd. 59 (1861), S. 335. — Der Beleg für die Behauptungen des Textes besteht im Existenzbeweis für eine Lösung der mit zwei Veränderlichen x, y geschriebenen Laplaceschen Gleichung, welche am Rande des durch die (x, y)-Ebene gebildeten Querschnitts des Zylinders vorgeschriebene Werte annimmt, vgl. Kap. 14. Interpretiert man nun die also gewonnene Funktion von x, y als eine Funktion aller drei Veränderlichen x, y, z, so hat man offenbar ein Raumpotential vor sich.

Es wäre indessen ein Irrtum zu glauben, daß die Lösung des dreidimensionalen Problems in diesem Falle durch die genannten Randbedingungen eindeutig bestimmt wäre. In der Tat gibt es im Falle eines Kreiszylinders $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ noch unendlich viele andere Lösungen, welche zum Teil aus

Anstatt den Körper, in welchem die Wärmeströmung vor sich gehen soll, als einen unendlich langen Zylinder zu denken, kann man sich auch auf eine dünne Platte oder Lamelle beschränken, welche durch zwei ideale, zu den Erzeugenden senkrechte Ebenen aus dem Zylinder ausgeschnitten wird. Durch diese beiden Begrenzungsflächen der Lamelle wird dann kein Wärmeaustausch stattfinden. Es würde also an dem stationären Strömungszustande innerhalb der Platte nichts ausmachen, wenn diese Oberflächen von vornherein mit einer Masse umgeben würden, welche keine Wärme durchläßt, während am übrigen Rande die gleichen Bedingungen wie im Falle des unendlichen Zylinders herrschen. Erstreckt man nun das Flächenintegral über einen beliebigen geschlossenen Zylinder, dessen Erzeugende denjenigen der Platte parallel laufen, so reduziert sich das Flächenintegral sofort auf ein Kurvenintegral, und zwar wird

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

wo C der Schnitt der (x, y)-Ebene mit dem betreffenden Zylinder ist.

Die Gleichung

$$u = \text{const.}$$

definiert eine Schar sogenannter *isothermischer* oder *Niveaukurven*. Die zu denselben rechtwinklige Schar gibt die *Strömungslinien* ab und wird, wie folgt, erhalten. Wir wollen vorläufig annehmen, daß der Bereich S, in welchem das logarithmische Potential betrachtet wird, einfach zusammenhängt und im Endlichen liegt. Seien (a, b) und (x, y) zwei Punkte desselben, welche wir durch eine reguläre Kurve L miteinander verbinden. Unter der Wärmemenge, welche L in der Zeiteinheit passiert, verstehen wir zunächst diejenige Menge, welche im dreidimensionalen Falle die auf L errichtete, zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ gelegene Zylinderfläche passiert, um nun nachträglich alles in die Ebene $z = 0$ zu verlegen und uns die Vorstellung einer bloß in dieser Fläche stattfindenden Wärmebewegung zu bilden. Indem wir zum dreidimensionalen Falle zurückgreifen, wird die Wärme-

den Funktionen

$$u = (A e^{\lambda z} + B e^{-\lambda z}) J_0 (\lambda r)$$

bestehen, wobei λ eine positive Wurzel der Besselschen Funktion $J_0(x)$ ist.

Fügt man noch die Forderung hinzu, daß das Raumpotential im Zylinder endlich bleibe, so wird das wahrscheinlich genügen, um ein logarithmisches Potential zu sichern.

Ähnliches gilt auch von den am Eingang des Paragraphen betrachteten Wärmeströmungen.

menge v, welche jene Zylinderfläche in der Zeiteinheit passiert, durch das Integral

$$v = -K \int_{(a,b)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

erstreckt über die Kurve L, gegeben, und nun denken wir uns wieder einmal alles in die (x, y)-Ebene verlegt, wobei also jetzt die die Kurve L passierende Wärmemenge durch das vorstehende Integral definiert wird. Dabei ist diejenige Normale gemeint, welche so gegen die positive Tangente, wie die positive y- gegen die positive x-Achse orientiert ist. Und nun erkennen wir, daß diese Wärmemenge v allein von den Endpunkten (a, b) und (x, y), nicht aber von der dieselben verbindenden Kurve L abhängt. In der Tat sei L' eine zweite solche Kurve, und sei v' die entsprechende Wärmemenge. Dann beweist man, daß $v = v'$ ist, indem man dieselbe Überlegung wie in Kap. 4, § 2 beim Beweise des 1. Satzes anstellt. Im übrigen werden wir meist $K = 1$ setzen.

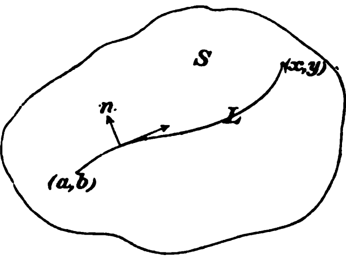


Fig. 123.

Das vorstehende Integral wollen wir noch einer leichten Umformung unterwerfen. Bezeichnet man mit ν, τ den Winkel zwischen der gemeinten Normale resp. der positiven Tangente und der positiven x-Achse, so ist $\nu = \tau + \pi/2$, und wir haben:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \nu + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \nu = -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \tau + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \tau .$$

Demnach wird

$$v = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Nun fällt aber dieses Integral unter den Typus $\int P dx + Q dy$, Kap. 4, § 2, und da sein Wert nicht vom Integrationswege abhängt, so muß, dem 3. Satze jenes Paragraphen gemäß,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sein. Hiermit haben wir also eine Bestätigung resp. einen neuen Beweis der Tatsache, daß die Funktion u harmonisch ist.

Des weiteren folgt aus demselben Satze, daß

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist. Das sind aber nichts anderes als die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, womit denn auch Anschluß an die Funktionentheorie erreicht wird. Hierin liegt zugleich der Beweis, daß die beiden Kurvenscharen

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.},$$

rechtwinklig gegeneinander sind, denn man hat offenbar

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Die solchergestalt erhaltene Funktion v heißt zu u *konjugiert*. Gleich einer Konstanten gesetzt, liefert v die *Strömungslinien* der Wärmebewegung. Wie man sieht, genügt auch v der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta v = 0$, und ferner: ist v konjugiert zu u, so ist $-u$ wieder konjugiert zu v. Hieraus geht hervor, daß jede Lösung eines Wärmeströmungsproblems die Lösung eines zweiten solchen Problems mit sich führt, welche durch Vertauschung der isothermischen und der Strömungslinien erhalten wird.

b) Stationäre Elektrizitätsströmungen.[1])

Das Problem der Strömung von Elektrizität in einem Leiter ist mit den soeben besprochenen Problemen der Wärmeleitung vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet im wesentlichen identisch. Man braucht nur im vorhergehenden die Wörter *Wärme* und *Temperatur* durch *Elektrizität* bzw. *Potential* zu ersetzen.

c) Strömung einer inkompressibelen Flüssigkeit.[2])

Hier wollen wir uns von vornherein auf den zweidimensionalen Fall beschränken, wobei also die Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Ebenen strömen soll und zwar so, a) daß die Bahnkurve jedes ein-

---

1) Im Anschluß an Ohm, welcher 1827 das Gesetz der stationären Strömung von Elektrizität in Drähten veröffentlicht hatte, erkannte Kirchhoff, daß eine allgemeine dreidimensionale stationäre Elektrizitätsströmung von der Laplaceschen Differentialgleichung reguliert wird; *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. 75 (1848), S. 189 = *Gesammelte Abhandlungen*, S. 36.

2) Man vergleiche das Zitat auf Lagrange am Eingang dieses Paragraphen.

zelnen Punktes der Flüssigkeit in einer den Begrenzungsebenen parallelen Ebene liegt; b) daß je zwei zu irgend einem Zeitpunkte in ein und derselben, zu den Begrenzungsebenen senkrechten Geraden befindliche Punkte immer noch in einer solchen Geraden bleiben. Die Bewegung aller auf einer solchen Geraden gelegenen Punkte der Flüssigkeit wird also durch die Bewegung eines einzigen derselben, etwa durch diejenige des Schnittpunktes der Geraden mit einer der Begrenzungsebenen, vollständig dargestellt. In dieser Ebene legen wir daher ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde und bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes (x, y) längs der Koordinatenachsen bzw. mit X, Y. Unter einem stationären Strömungszustande versteht man hier einen solchen, bei welchem X, Y nur von x, y, nicht aber von der Zeit abhängen. Wir wollen uns auf solche Strömungen beschränken und außerdem noch voraussetzen, daß die Dichte ϱ der Flüssigkeit konstant sei. Es handelt sich nämlich um die Bewegung inkompressibeler Flüssigkeiten. Als zweidimensionale Dichte σ bezeichnen wir dann das Produkt $\sigma = h\varrho$, wo h den Abstand der beiden Begrenzungsebenen voneinander bedeutet. Im Bereiche der Strömung denke man sich eine Zylinderfläche S, deren Erzeugende auf der Koordinatenebene senkrecht stehen und diese Ebene in einer Kurve C schneiden. Bei geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen bezüglich der Funktionen X, Y ergibt sich dann, daß die Flüssigkeitsmenge Q, welche S in der Zeiteinheit passiert durch das Integral dargestellt wird:

$$Q = \sigma \int X\,dy - Y\,dx.$$

Ist C insbesondere eine beliebige geschlossene Kurve, die keinen Randpunkt des Bereiches enthält, in welchem die Flüssigkeit strömt, so verschwindet offenbar das Integral:

$$\int\limits_C X\,dy - Y\,dx = 0.$$

Und umgekehrt: sind X, Y zwei Funktionen von x, y, wofür dieses Integral über jede solche Kurve hin erstreckt verschwindet, so bleibt die innerhalb der Kurve befindliche Flüssigkeitsmenge konstant, und es entspricht mithin diesen Funktionen als Geschwindigkeitskomponenten eine stationäre Strömung. Für das Verschwinden des Integrals ist aber nach Kap. 4, § 2 notwendig und hinreichend, daß X, Y, welche als stetige, mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehene

Funktionen von x, y vorausgesetzt werden sollen, der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Im übrigen werden die Bahnkurven der Bewegung durch die Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}.$$

Da nun das Integral

$$J = \int_{(a,b)}^{(x,y)} X\,dy - Y\,dx,$$

wenigstens in einem endlichen einfach zusammenhängenden Bereiche, vom Integrationswege unabhängig ist und überdies eine Funktion definiert, wofür

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -Y, \quad \frac{\partial J}{\partial y} = X$$

ist, so werden jene Strömungslinien auch durch die Kurvenschar $J = \text{const.}$ geliefert.

Über die Entfernung der beiden Begrenzungsebenen voneinander haben wir bisher noch keine Voraussetzungen gemacht. Wir wollen sie uns von jetzt ab als sehr nahe aneinander gelegen, bzw. als eine unendlich dünne Lamelle oder Membran denken. Dies empfiehlt sich umsomehr, da wir später Strömungen auf krummen und Riemannschen Flächen in Betracht ziehen werden.

Es kann nun vorkommen, daß es eine Funktion u gibt, deren partielle Ableitungen nach x, y bzw. mit X, Y übereinstimmen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Y.$$

Das Integral nimmt dann die Form an:

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \pm \int \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

wo n sich auf die Normale von C bezieht. Eine solche Funktion muß wegen (1) der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügen und heißt somit ein *Geschwindigkeitspotential.* Die Geschwindigkeit, womit ein Punkt seine Bahn zurücklegt, ist

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Der Angelpunkt dieser ganzen Erörterung über Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten liegt nun in der Umkehrung dieses Satzes: *Jeder Lösung u der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ entspricht eine stationäre Strömung einer inkompressibelen Flüssigkeit von konstanter Dichte mit Geschwindigkeitspotential u.*

Hieran knüpfen wir noch eine wichtige Bemerkung: *Auf Grund der analytischen Formeln läßt sich bei einer stationären Wärme- oder Elektrizitätsströmung die Wärme bzw. Elektrizität als eine inkompressibele Flüssigkeit von konstanter Dichte auffassen, welche so strömt,* a) *daß der Bewegungszustand stationär bleibt;* b) *daß überdies ein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist.*

d) Gravitation und statische Elektrizität, nebst Magnetismus.

Nach dem allgemeinen Newtonschen Gravitationsgesetze ziehen sich zwei Massenpunkte gegenseitig mit einer Kraft an, welche proportional der Masse eines jeden derselben, und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung voneinander ist. Im zweidimensionalen Falle wirkt die Kraft dagegen umgekehrt proportional der Entfernung. Einem beliebigen Massensysteme entspricht eine Funktion u, das sogenannte *Potential* der Massen, deren partielle Ableitung nach einer willkürlichen Richtung in einem außerhalb der Masse des Systems gelegenen Punkte P den Komponenten der Kraft nach jener Richtung angibt, womit das System einen in P befindlichen materiellen Punkt von der Masse 1 (den sogenannten *Aufpunkt*) anzieht. Beschreibt der Aufpunkt einen beliebigen Weg, der das System nur nicht durchsetzt, und langt so im Punkte P' an, so wird die von den Kräften des Systems geleistete Arbeit durch die Differenz $u_{P'} - u_P$ gegeben. Das Potential u genügt der Laplaceschen Gleichung in allen außerhalb der Masse des Systems belegenen Punkten.

Ähnliches gilt auch für das Kräftefeld, welches durch eine beliebige Verteilung positiver und negativer statischer Elektrizität erzeugt wird, sowie für magnetische Kräftefelder.

Aufgabe. Durch Einführung von Polarkoordinaten bringe man das Integral

$$-\int^{*}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

auf die Form $\int^{*}\mathfrak{P}\,dr + \mathfrak{Q}\,d\theta$ und erhalte so die Laplacesche Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

§ 2. Beispiele von Strömungen.[1]

Da der reelle Teil einer analytischen Funktion der Laplaceschen Gleichung genügt, so liefert eine solche Funktion die Lösung eines physikalischen Problems von je einer der im vorhergehenden Paragraphen besprochenen Klassen. Hierzu tritt noch auf Grund der letzten Bemerkung unter a), § 1 die Lösung eines zweiten derartigen Problems, wobei die Niveaukurven und die Strömungslinien ihre Rolle wechseln.

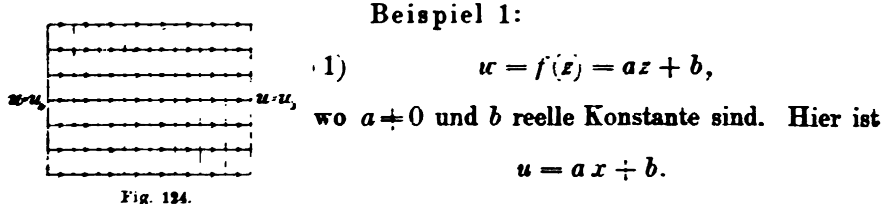


Fig. 124.

Beispiel 1:

$$(1)\qquad w = f(z) = az + b,$$

wo $a \neq 0$ und b reelle Konstante sind. Hier ist

$$u = ax + b.$$

Durch geeignete Wahl von a, b löst man hiermit das Problem der Wärmeströmung in einer rechteckigen Lamelle, wobei zwei gegenüberliegende Seiten derselben auf die konstante Temperatur u_0 resp. u_1 gebracht und die beiden anderen Seiten mit einer adiabatischen Substanz begrenzt sind. Dieser Fall deckt sich mit der am Eingange des § 1 besprochenen Strömung.

Beispiel 2:

$$w = -a\log z + (b + ci), \quad \text{also} \quad u = -a\log r + b.$$

Durch diese Funktion wird das Problem der Verteilung der Temperatur in einem dicken Dampfrohre gelöst. Teilt man die Differenz

1) Man vgl. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale,* Leipzig 1882. Kirchhoff hat bereits als Student die Strömung von Elektrizität in kreisförmigen Platten experimentell untersucht; Poggendorff, *Ann. der Physik u. Chemie,* (3) 4 = 64 (1845), S. 497. Im Anschluß daran sehe man B. O. Peirce, *Proceedings of the Amer. Acad. of Arts and Sci.,* 26 (1891), p. 218, wo weitere Literaturangaben sich finden.

$u_1 - u_0$ in n gleiche Teile und bezeichnet man die Radien der entsprechenden isothermischen Flächen resp. mit

$$\varrho_0 = r_0, \quad \varrho_1, \ldots \varrho_{n-1}, \quad \varrho_n = r_1,$$

so bilden diese Größen eine geometrische Reihe.

Insbesondere kann man den Radius r_0 des inneren Kreises verschwindend klein denken, ohne daß dadurch der Strömungszustand außerhalb einer bestimmten Umgebung des Punktes gestört wird. Man gelangt so zum Begriffe einer *Punktquelle*, aus welcher die Wärme hervorströmt. Die *Ergiebigkeit* derselben soll durch das Integral

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

wobei sich n auf die innere Normale der Kurve C bezieht, also hier durch

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\theta = a$$

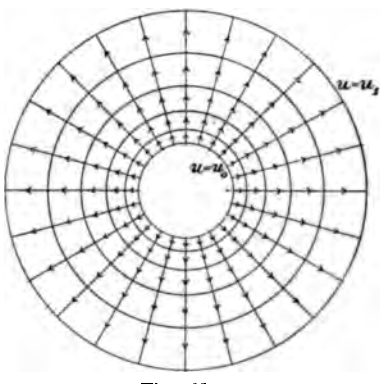


Fig. 125.

definiert werden und kann sowohl positiv als negativ ausfallen.

Läßt man andererseits den äußeren Kreis unendlich werden, so entsteht eine Strömung ins Unendliche, welche auf der Kugel bequem zu übersehen ist. Da nämlich die stereographische Projektion eine konforme Abbildung ist und da ferner eine harmonische Funktion

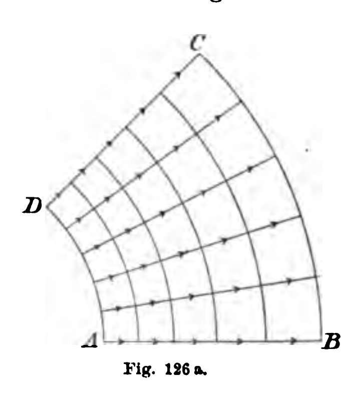


Fig. 126 a.

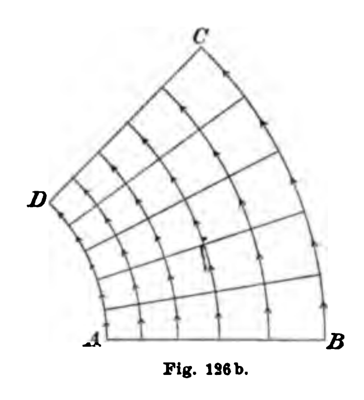


Fig. 126 b.

gegenüber einer solchen Transformation invariant bleibt[1]), so geht u

1) Der Satz wird für ebene konforme Abbildungen im folgenden Paragraphen bewiesen; er gilt aber auch für krumme Flächen, wenn sie konform aufeinander bezogen werden.

in eine Funktion auf der Kugel über, welche derjenigen elektrischen Strömung entspricht, die entsteht, wenn die beiden Pole eines galvanischen Elements resp. an zwei einander gegenüberliegenden Punkten einer leitenden Kugelfläche aufgesetzt werden. Dabei strömt die Elektrizität längs der Längenkreise, während das Potential längs der Breitenkreise konstant bleibt.

Mittels des imaginären Teils der Funktion:

$$v = -a\theta + c,$$

erhält man noch die Lösung eines zweiten in Fig. 126b angedeuteten Problems. Um diese Strömung auf elektrischem Wege zu realisieren, kann man den Strömungsbereich aus einer dünnen metallnen Platte, etwa aus Staniol schneiden und die Ränder AB und CD derselben mit zwei dicken Stücken Kupfer in Verbindung setzen, an welch letzteren man dann die beiden Pole eines galvanischen Elements aufsetzt. Auch hier kann man den Bereich der entsprechenden Strömung auf der Kugel unbegrenzt erweitern, indem man die schlichte Kugel durch eine unendlich vielblättrige Riemannsche Kugel mit Windungspunkten in den beiden Polen ersetzt. Da es sich nämlich hier weniger um die mathematische Physik als um die physikalische Mathematik handelt, so bietet die Vorstellung einer Strömung in einer mehrfach überdeckten Fläche keine Schwierigkeit. Man kann die Strömung aber auch auf der schlichten Kugel bzw. in einer schlichten Ebene vor sich gehen lassen. Dann *wirbelt* die Wärme bzw. Elektrizität um den Punkt $z = 0$. — Durch Fig. 126a wird die konjugierte Strömung veranschaulicht, welche entsteht, indem die Kupferstücke längs der Ränder AD und BC angebracht werden.

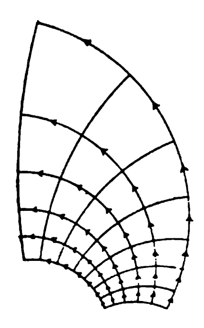


Fig. 127.

Beispiel 3.

$$w = \frac{a}{z} + (b + ci),$$

$$u = \frac{ax}{x^2 + y^2} + b = \frac{a\cos\theta}{r} + b,$$

$$v = \frac{-ay}{x^2 + y^2} + c = -\frac{a\sin\theta}{r} + c.$$

Hiermit ist das Problem der Wärmeströmung in einer viereckigen Lamelle gelöst, deren gegenüberliegende Seiten Bogen von einander berührenden Kreisen sind und deren Ecken übrigens rechte Winkel aufweisen. Das eine Seitenpaar wird auf die Temperatur u_0 und u_1 gebracht, während das andere adiabatisch begrenzt wird.

Insbesondere kann man ähnlich wie vorhin einen Grenzübergang vornehmen, wodurch der Bereich der Strömung den ganzen zwischen zwei einander berührenden Kreisen gelegenen Raum ausfüllt. Dieser Raum wird adiabatisch begrenzt, während aus der einen Spitze Wärme hervorströmt, um in der anderen wieder absorbiert zu werden.[1]) Lassen wir jetzt den Strömungsbereich sich noch weiter ausdehnen und eventuell die ganze Ebene umfassen.

Entstehung eines Poles durch Zusammenrücken zweier Punktquellen. Die soeben betrachtete Strömung läßt sich auch durch Grenzübergang aus zwei Strömungen mit einfachen Punktquellen (d. h. mit logarithmischen Unstetigkeiten erster Art) erzeugen, welche entgegengesetzt gleiche Ergiebigkeit haben. Betrachten wir nämlich die durch den reellen Teil[2]) der Funktion

$$w = -a \log \frac{z - z_1}{z - z_0}, \qquad a, \text{ reell}; \ 0 < a,$$

also durch

$$u = -a \log \frac{r}{r'}, \qquad r = |z - z_1|, \quad r' = |z - z_0|,$$

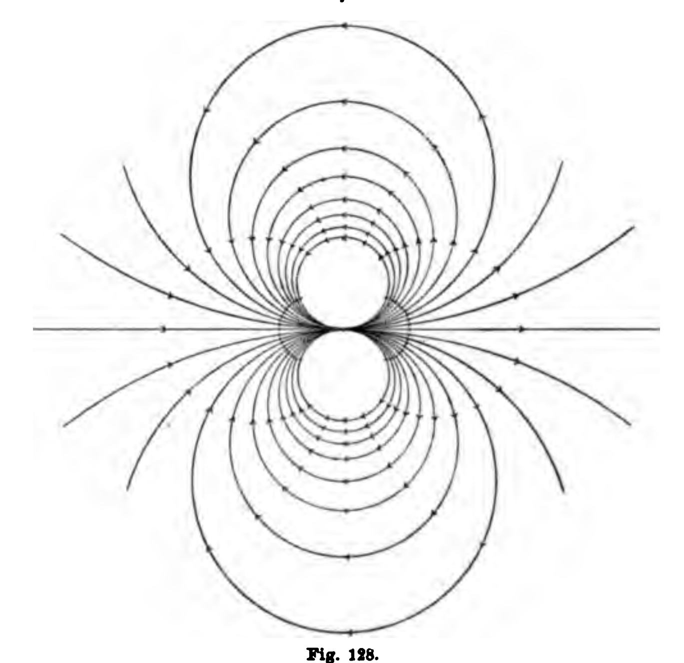


Fig. 128.

1) Die Strömung wird auf elektrischem Wege realisiert, indem man den Strömungsbereich aus Staniol schneidet und die beiden Pole eines galvanischen Elements bzw. an den vorher noch ein wenig auseinander gerückten Spitzen aufsetzt.

2) Strömungen des zweiten Typus kann man auch zu diesem Zweck verwenden, vgl. Klein a. a. O. S. 11, Fig. 7.

dargestellte Strömung. Die Figur der Niveaukurven und Strömungslinien ist eine bekannte[1]), vgl. Figg. 66, 129. Lassen wir jetzt die Punkte z_0, z_1 zusammenrücken. Ist P ein beliebiger fester, von der Grenzlage von z_0, z_1 getrennter Punkt der Ebene, so ist $\lim r/r' = 1$, so daß also, falls a konstant bleibt, $\lim u = 0$ wird. Um diesem Übelstande abzuhelfen, lassen wir a zugleich ins Unendliche wachsen, d. h. wir lassen die Ergiebigkeit der Quelle immer stärker und stärker werden. Die Notwendigkeit dieser Maßregel leuchtet schon physikalisch ein, denn es liegt ja auf der Hand, daß die meiste Wärme direkt aus der positiven in die negative Quelle hinüberströmen wird.

Zur analytischen Ausführung des Grenzübergangs sei

$$z_0 = \text{const.}, \qquad z_1 = z_0 + h e^{\alpha i}, \qquad a = A/h, \qquad 0 < A.$$

Dann wird

$$-a \log \frac{z - z_1}{z - z_0} = A \frac{-\log\left(1 - \dfrac{e^{\alpha i} h}{z - z_0}\right)}{h} = \frac{A e^{\alpha i}}{z - z_0} + \frac{1}{2} \frac{A e^{2\alpha i}}{(z - z_0)^2} h + \cdots,$$

also

$$\lim_{z_1 = z_0} -a \log \frac{z - z_1}{z - z_0} = \frac{A e^{\alpha i}}{z - z_0}.$$

Setzt man insbesondere $z_0 = 0$, $\alpha = 0$, so erhält man (bis auf die

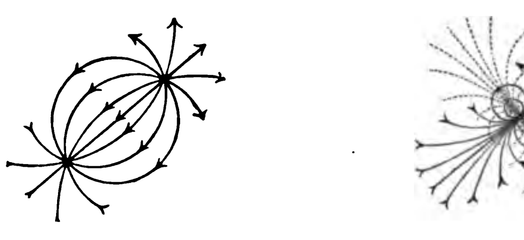


Fig. 129. Fig. 130.

additive Konstante) die Funktion des 3. Beispiels. Wie man sieht, unterscheidet sich hiervon der allgemeine Fall nur um eine Verdrehung um den Punkt z_0. Durch die Größe A wird die *Stärke des*

1) Die Sache hängt folgendermaßen zusammen. Mittels der Transformation $Z = (z - z_1)/(z - z_0)$ wird die Z-Ebene bzw. -Kugel ein-eindeutig und konform auf die z-Ebene bzw. -Kugel bezogen und zwar so, daß die Punkte $Z = 0$ und ∞ in $z = z_0$ bzw. z_1 übergehen. Dabei wird die dem 2. Beispiele entsprechende isothermische Schar konzentrischer Kreise $|Z| = \text{const.}$, in die eine Kreisschar der Figur 66 übergeführt. Und nun erhält man das vorgelegte logarithmische Potential $u = -a \log r/r'$, indem man den Kreisen dieser Schar denselben Wert von u erteilt, wie ihn die entsprechenden Kreise jener Schar aufweisen.

Quellpaares oder *Poles*

$$w = \frac{A e^{\alpha i}}{z - z_0}$$

gemessen, während α die Richtung der *Achse* derselben angibt. Wir bemerken noch, daß die Funktion u in einer Punktquelle unendlich wird, dagegen nimmt sie in der Nähe eines Poles jeden Wert an. Die Fläche $u = u(x, y)$ ist für die Umgebung eines Poles modelliert worden, vgl. die Schillingschen Modelle.

Es empfiehlt sich durchweg, auch auf der Kugel die entsprechenden Strömungen in Betracht zu ziehen. Insbesondere erscheinen dann die Strömungen von Beispiel 1 und 3 unter ein und demselben Gesichtspunkte. In der Tat geht die eine Funktion mittels der linearen Transformation $z = 1/z'$ in die andere über, dieser Transformation entspricht aber andererseits bloß eine Umdrehung der Kugel.

Entstehung von Polen höherer Ordnung durch Zusammenrücken einfacher Pole. Wir wollen zunächst zwei Pole von gleicher Stärke, deren Achsen in die durch die Pole gehende Gerade fallen und außerdem entgegengesetzte Richtungen haben, in Betracht ziehen. Denken wir uns diese Pole vorläufig bzw. im Nord- und Südpole der Kugel gelegen, während ihre Achsen längs des Längenkreises $\varphi = 0$ hin zeigen. Alsdann wird die Wärme, wegen der Symmetrie, in der nördlichen Halbkugel genau so strömen, wie in der südlichen Halbkugel. Dabei wird insbesondere der Äquator eine Strömungslinie sein. Aber auch längs des Längenkreises $\varphi = 0$, π wird die Wärme strömen, denn sie wird offenbar in symmetrischer Weise nach der einen Seite $\varphi = 0$ abgegeben und von der anderen Seite $\varphi = \pi$ wieder aufgenommen. Zum Beweise projiziert man stereographisch auf die Ebene; so kommt:

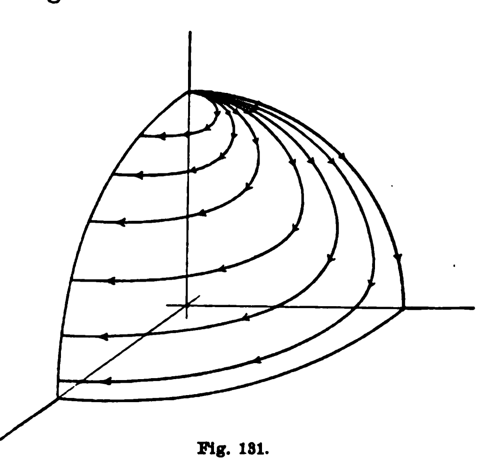


Fig. 131.

$$w = a\left(\frac{1}{z} + z + c\right), \qquad a > 0,$$

$$u = \frac{a x}{x^2 + y^2} + a x + a c,$$

$$v = \frac{-a y}{x^2 + y^2} + a y,$$

wobei c eine reelle Konstante bedeutet, über welche wir sogleich noch verfügen werden. Daraus erkennt man in der Tat, daß die reelle Achse $y = 0$, sowie der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ zu den Strömungslinien gehören.

Hiermit gewinnt man also eine Vorstellung der Strömung auf der Kugel. In der einen Hälfte der oberen Halbkugel findet nämlich eine abgeschlossene Strömung statt, welche sich weiter durch Spiegelungen an den beiden Begrenzungsebenen in den drei übrigen Kugelzweiecken wiederholt. Dabei ziehen zwei Punkte unsere besondere Aufmerksamkeit auf sich, nämlich diejenigen, in welchen die vier Kugelzweiecke zusammenstoßen. In der Nähe eines derselben strömt die Flüssigkeit so, wie in der beigesetzten Figur angedeutet ist, während für den anderen die Pfeilspitzen umgekehrt werden müssen. Das ist aber offenbar nur so möglich, daß im betreffenden Punkte selbst die Geschwindigkeit auf Null herabsinkt, — die Flüssigkeit *staut* in diesem Punkte.

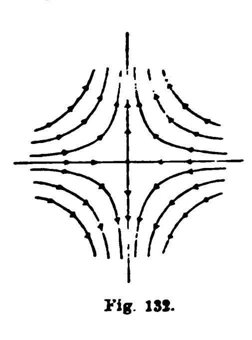


Fig. 132.

Nehmen wir nunmehr eine lineare Transformation der Ebene vor, wodurch die Punkte $z = 0, \infty$ bzw. in $z' = h, -h\ (h > 0)$ übergehen, und überdies der Sinn der Achse des Poles $z = 0$ ungeändert bleibt:

$$z = \lambda \frac{z' - h}{z' + h}, \qquad \lambda > 0.$$

Der Einfachheit halber setzen wir noch $\lambda = 1$; so kommt:

$$a\left(\frac{1}{z} + z + c\right) = a\left(\frac{2h}{z' - h} - \frac{2h}{z' + h}\right),$$

indem wir $c = -2$ setzen. Daraus erwächst eine Strömung, welche unter Weglassung des Striches durch die beiden Funktionen:

$$u = \frac{2ah(x-h)}{(x-h)^2 + y^2} - \frac{2ah(x+h)}{(x+h)^2 + y^2},$$

$$v = \frac{-2ahy}{(x-h)^2 + y^2} + \frac{2ahy}{(x+h)^2 + y^2},$$

reguliert wird. Aus ähnlichen Symmetriegründen wie vorhin überzeugt man sich hier, daß sich die Geraden $x = 0$, $y = 0$ unter den Strömungslinien finden müssen, was man auch direkt durch die Formeln bestätigt. Die Staupunkte fallen jetzt in die Punkte $z = 0, \infty$.

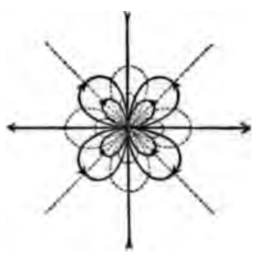
Fahren wir fort, indem wir die beiden Pole zusammenrücken lassen. Dabei muß ihre Stärke in entsprechender Weise wachsen. In der Tat ist

$$w = \frac{4h^2a}{z^2 - h^2},$$

und daher genügt es, wenn wir $4h^2a = \text{const.} = A$ setzen. So wird

$$\lim_{h=0} w = \frac{A}{z^2}.$$

Hiermit haben wir ein Resultat erreicht, welchem wir gleich eine etwas allgemeinere Fassung geben wollen: *Durch das Zusammenrücken zweier Pole erster Ordnung von gleicher Stärke, mit entgegengesetzten Achsen, entsteht bei passender Vergrößerung der Stärke ein Pol zweiter Ordnung. Dabei geht ein Staupunkt ein.*


Fig. 133.

In ähnlicher Weise kann man auch das Zusammenrücken zweier Staupunkte zur Bildung eines Staupunktes höherer Ordnung verfolgen. Sei etwa $w = z^3 - 3h^2z$, $dw/dz = 3(z^2 - h^2)$, und man lasse h gegen 0 abnehmen. Figuren zur Veranschaulichung dieses Falles finden sich bei Klein, a. a. O., S. 4.

Aufgabe 1. Ein größter Kreis der Kugel sei durch die Punkte A, B, C in drei gleiche Teile zerlegt. In diesen drei Punkten bringe man Pole gleicher Stärke an, deren Achsen alle senkrecht zu diesem Kreise stehen und übrigens in ein und dieselbe Halbkugel gerichtet sind. Man zeichne die Niveaukurven und Strömungslinien auf.

Aufgabe 2. Man lasse diese drei Pole in symmetrischer Weise zusammenrücken und erhalte so einen Pol dritter Ordnung.

Fingerzeig: Man projiziere auf die Ebene und nehme die Pole in den Punkten h, ωh, $\omega^2 h$ an, wo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist.

Aufgabe 3. Man verallgemeinere die vorhergehenden Aufgaben und erhalte so einen Pol n-ter Ordnung durch Zusammenrücken von n Polen erster Ordnung.[1])

1) In physikalischer Weise verfolgt Klein a. a. O. auch das Zusammenrücken einfacher Staupunkte. Daß allgemein in einem Staupunkte n-ter Ordnung, wo also

$$f'(z_0) = 0, \ldots, \quad f^{(n)}(z_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(z_0) \neq 0$$

ist, die Strömungslinien $n + 1$ reguläre Kurven bilden, welche sich unter gleichem Winkel schneiden, besagt ein späterer Satz, vgl. § 5, 4. Satz.

Aufgabe 4. Man zeichne die Niveaukurven und die Strömungslinien für den Fall eines Poles erster Ordnung, welcher in einem Verzweigungspunkt 1-ter, 2-ter, ..., n-ter Ordnung liegt:

$$\frac{1}{\sqrt{z-z_0}}, \quad \frac{1}{\sqrt{z-z_0}}, \quad \cdots \quad \frac{1}{(z-z_0)^{1/n}}.$$

Die Aufgabe werde dann auf einen Pol m-ter Ordnung verallgemeinert, der in einem solchen Verweigungspunkte liegt.

Bisher haben wir nur einige typische Beispiele verfolgt und sind dabei auf eine Reihe von Singularitäten geführt worden:

$$\log(z-z_0), \quad \frac{1}{z-z_0}, \cdots, \quad \frac{1}{(z-z_0)^n},$$

die, wie wir noch nachträglich bemerken wollen, bis auf einen Zahlenfaktor durch sukzessive Differentiation nach dem Punkte z_0 entstehen. Dem physikalischen Prozesse des Zusammenrückens zweier Motoren gleicher Ordnung und Stärke und entgegengesetzter Orientierung entspricht darnach analytisch geradezu der Grenzübergang des Differentiierens. Nunmehr erhält man durch *Überlagerung* von Strömungen, welche verschiedenen Motoren entsprechen, den Hauptteil

$$A_0 \log(z-z_0) + \frac{A_1}{z-z_0} + \cdots + \frac{A_n}{(z-z_0)^n}$$

der allgemeinsten Singularität, welche eine rationale Funktion von z oder deren Integral besitzen kann. Dabei setzt sich sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil von $A_m/(z-z_0)^m$ linear aus

$$\frac{\cos m\theta}{r^m}, \quad \frac{\sin m\theta}{r^m}$$

zusammen. Mit den bereits besprochenen Motoren kommt man also mit Rücksicht auf die 4. Aufgabe in der Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale schon aus.

Weiteres Beispiel. Zum Schlusse noch ein interessantes Beispiel! Wir sind nämlich in der Lage, folgendes Problem zu lösen: Durch die Punkte A, B, C, D werde der Rand einer leitenden Kreisscheibe in vier Bogen zerlegt. Die Bogen AB und CD mögen auf der Temperatur u_0 bzw. u_1 erhalten werden, während die beiden anderen adiabatisch begrenzt sein sollen. Der diesen Randbedingungen entsprechende stationäre Strömungszustand werde bestimmt.

Die Auflösung ergibt sich aus der konformen Abbildung eines Rechtecks auf einen Kreis, Kap. 8, § 16. Bezeichnet man nämlich mit $A, \ldots D$ die vier Punkte des Kreisrandes, in welche die vier Ecken des Rechtecks übergehen, und erteilt man den Punkten der Kreisscheibe diejenigen Werte u, welche bei der Lösung des entsprechenden Problems für das Rechteck (vgl. oben Beispiel 1) den Abbildungen dieser Punkte zufallen, so ist die Sache fertig, soweit wenigstens diese besondere Gruppe von vier Punkten in Betracht kommt. Es bleibt nur noch zu zeigen übrig, daß man durch passende Wahl des Rechtecks jede beliebige Gruppe von vier Punkten auf dem Kreisrande erhalten kann. Nun gilt aber der Satz[1]), daß vier beliebige Punkte eines Kreisrandes durch lineare Transformationen der Ebene in vier solche Punkte übergeführt werden können, welche die Ecken eines dem Kreise einbeschriebenen Rechtecks bilden, oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man sich den Kreis auf die reelle Achse projiziert denkt, daß vier beliebige reelle Punkte in die Punkte ± 1, $\pm 1/k$ $(0 < k < 1)$ geworfen werden können. Andererseits kann man k im elliptischen Integral

$$w = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

stets so bestimmen, daß das Verhältnis K'/K jeden vorgegebenen positiven Wert annimmt, (vgl. Kap. 8, § 16). Hiernach läßt sich ein Rechteck von beliebiger Gestalt in der gewünschten Weise auf den Kreis abbilden.

§ 3. Allgemeine Sätze über das logarithmische Potential. Erste Gruppe, direkt auf der Laplaceschen Gleichung fußend.

Wir wollen jetzt zu einem systematischen analytischen Aufbau der Theorie des logarithmischen Potentials übergehen.

Vor allen Dingen erinnern wir an die Eigenschaft einer linearen homogenen Differentialgleichung, daß ein Vielfaches cu einer Lösung u, sowie die Summe $u_1 + u_2$ zweier Lösungen u_1 und u_2, und hiermit auch allgemein jede lineare Funktion

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

der Lösungen $u_1, \ldots, u_n$ wieder eine Lösung ist.

1) Man vgl. Kap. 10, § 6, S. 484, sowie Burkhardt, *Elliptische Funktionen*, § 65.

Indem wir in diesem Kapitel einen *Bereich* S so auffassen, wie in Kap. 2, § 2 des näheren auseinandergesetzt wurde, machen wir noch besonders auf die an jener Stelle gegebene Erklärung des Verhaltens aufmerksam, welches durch die Worte bezeichnet wird: *eine Funktion* $f(x, y)$ *nimmt in einem Randpunkte* (α, β) *einen Randwert* A *an*, oder *ist stetig am Rande.*

Definition. Eine Funktion *verhält sich harmonisch innerhalb eines Bereichs* oder *in einem Bereiche*, wenn sie in jedem inneren Punkte desselben eindeutig und nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig ist und der Laplaceschen Differentialgleichung genügt. Sie heißt *in einem Punkte harmonisch*, wenn sie in der Umgebung desselben harmonisch ist.

Eine mehrdeutige Funktion heißt *harmonisch*, falls ihre Zweige harmonisch sind. Wir werden aber unter einer harmonischen Funktion stets eine eindeutige verstehen, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich erwähnt wird.

1. Satz.[1]) *Ist* u *in einem Bereiche* S *harmonisch, so verschwindet das über den ganzen Rand* Γ *eines beliebigen innerhalb* S *gelegenen Bereiches* Σ *hin erstreckte Integral der nach der inneren Normale genommenen Ableitung von* u:

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Umgekehrt: verschwindet dieses Integral für jeden derartigen Bereich Σ, *so ist* u *eine in* S *harmonische Funktion.*

Der Beweis ist bereits in § 1 vermöge des Greenschen Satzes:

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dS = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

erbracht.

Der Satz läßt sich indessen, ohne Benutzung des Greenschen Satzes, direkt aus den Sätzen A) und C) von Kap. 4, § 3 ableiten, da

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \pm \int_\Gamma -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

---

1) Der entsprechende Satz im Raume von drei Dimensionen rührt von Gauß her, „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte“, *Beobachtungen des magnetischen Vereins*, 1839, Nr. 23 = *Werke*, Bd. 5, S. 226. Für die Ebene findet sich der Satz bei Riemann, *Inauguraldissertation*, Göttingen, 1851, Nr. 9, 10 = *Werke*, S. 22.

ist. Letzterer Beweis gestattet auch zugleich folgende allgemeinere Formulierung des ersten Teils des Satzes:

Allgemeiner darf der Rand von Σ teilweise oder ganz mit dem Rande von S zusammenfallen, vorausgesetzt nur, daß in solchen Randpunkten die Ableitungen erster Ordnung stetig am Rande sind.

Aufgabe. Sei S ein endlicher zweifach zusammenhängender Bereich und sei C eine in S gelegene einfache reguläre geschlossene Kurve, welche den einen Rand von S in ihrem Inneren enthält. Man zeige, daß dann das obige Integral

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$

für alle derartigen Kurven C ein und denselben Wert hat. Man verallgemeinere den Satz für einen beliebigen Bereich S.

2. Satz. Der Mittelwertsatz.[1]) *Sei O ein innerer Punkt eines Bereiches S, und sei die Funktion u harmonisch in S. Beschreibt man dann einen keinen Randpunkt von S im Innern oder auf seinem Rande umfassenden Kreis um O, so ist der Wert u_0 von u in O gleich dem Mittelwert von u auf dem Rande des Kreises:*

$$u_0 = \frac{\int_0^{2\pi\varrho} u\, ds}{2\pi\varrho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\theta.$$

Nach dem 1. Satze ist nämlich

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = -\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta = 0,$$

wo $r = 0$ dem Punkte O entspricht und ϱ den Radius des Kreises bedeutet. Nun ist aber $\partial u/\partial r$ eine im Bereich

$$R\colon \qquad 0 \leqq r \leqq \varrho, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

eindeutige stetige Funktion von r, θ, wie aus der Relation

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

sofort zu erblicken ist. (Will man den Bereich R geometrisch deuten,

1) Gauß, a. a. O., Nr. 20; Riemann, a. a. O., Nr. 10.

so fasse man r und θ als Cartesische, nicht als Polarkoordinaten auf.) Bildet man nun das über R zu erstreckende Doppelintegral

$$\iint\limits_R \frac{\partial u}{\partial r}\, dS,$$

so kann man dasselbe durch jedes der beiden zweimaligen Integrale:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varrho} \frac{\partial u}{\partial r}\, dr, \qquad \int_0^{\varrho} dr \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta,$$

auswerten. Hiermit erweisen sich die Werte dieser letzteren Integrale als einander gleich. Das zweite derselben verschwindet aber nach dem Vorhergehenden, woraus denn folgt, daß

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varrho} \frac{\partial u}{\partial r}\, dr = \int_0^{2\pi} (u - u_0)\, d\theta = 0$$

ist, und hierin liegt der Beweis des Satzes.[1])

Aufgabe. Besteht der Bereich S aus einem Kreise K, und ist u außerdem bloß stetig am Rande von K, so gilt der Mittelwertsatz für K.

3. Satz. Satz vom Maximum und Minimum.[2]) *In keinem inneren Punkte eines Bereiches S, in welchem die Funktion u harmonisch ist, kann diese Funktion ihren größten oder ihren kleinsten Wert erreichen, sofern man den Fall ausnimmt, daß u eine Konstante ist.*

In der Tat sei P ein innerer Punkt, in welchem die Funktion u etwa ihren größten Wert erreicht, ohne in der ganzen Umgebung von P konstant zu sein. Dann kann man einen in dieser Umgebung gelegenen Kreis um P so beschreiben, daß u längs einiger Stücke seines Randes einen kleineren Wert als im Punkte P hat, während u andererseits nirgends einen größeren Wert annimmt. Infolgedessen wird der Mittelwert von u längs des Kreisrandes weniger als u_0 betragen, und das führt eben zu einem Widerspruch.[3])

---

1) Dieser Beweis ist von Bôcher gegeben worden, vgl. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2. Reihe, Bd. 1 (1895), S. 205.

2) Riemann, a. a. O., Nr. 11, jedoch ohne genügenden Beweis. Strenger Beweis bei C. Neumann, *Math. Ann.*, Bd. 3 (1871), S. 330—334 und 340—344.

3) Es ist ja Geschmacksache, ob man hier vom *Mittelwerte* reden oder, auf die letzte Gleichung des vorhergehenden Paragraphen zurückgreifend, von dem

Zusatz. *Eine in einem beliebigen Bereiche T harmonische Funktion u, welche längs des ganzen Randes von T verschwindet, hat auch in jedem inneren Punkte von T den Wert* 0.

Ist T ein regulärer Bereich S, so ist der Satz sofort evident. In anderen Fällen kann man, wie folgt, schließen. Würde u in einem inneren Punkte P von T etwa einen positiven Wert h annehmen, so entwickele man T nach dem Satze von Kap. 5, § 3 in Teilbereiche T_n. Sobald T_n den Punkt P umfaßt $(n \geqq m)$, wird es einen Randpunkt Q_n von T_n geben, in welchem der Wert von u größer als h ist. Man zeichne einen solchen Punkt auf dem Rande eines jeden T_n auf, wofür $n \geqq m$ ist. Dann haben die Punkte Q_n eine Häufungsstelle Q am Rande von T. Hierin liegt aber ein Widerspruch, denn u würde dann in Q den Randwert 0 nicht annehmen.

Der Satz gilt selbst dann noch, wenn sich der Bereich T ins Unendliche erstreckt. Ist nämlich der Punkt ∞ ein Randpunkt von T, so ändert sich nichts am Beweise. Sonst werde die Ebene einer Transformation vermöge reziproker Radien unterzogen, wobei ein Randpunkt von T ins Unendliche geworfen wird. Auf Grund des nachstehenden 6. Satzes, sowie § 4, 7. Satz, Zusatz 3, wird u dabei in eine Funktion u' übergeführt, welche im neuen Bereich harmonisch ist und am Rande desselben verschwindet. Demgemäß verschwindet u', und somit auch u identisch. — *In ähnlicher Weise läßt sich auch der 3. Satz auf einen beliebigen Bereich T erweitern.*

Aufgabe 1. Man zeige, daß eine Funktion u, welche in der ganzen Ebene harmonisch und außerdem so beschaffen wäre, daß

$$\lim_{x=\infty,\ y=\infty} u = +\infty \quad \text{bzw.} \quad -\infty$$

ist, nicht existiert.

Aufgabe 2. Ist $f(z)$ in einem Bereich S stetig und im Innern von S analytisch, so erreicht $|f(z)|$ seinen größten und, wofern $f(z)$ in S nicht verschwindet, auch seinen kleinsten Wert am Rande von S.

Fingerzeig. Man ziehe die harmonische Funktion

$$\Re \log f(z) = \log |f(z)|$$

heran und wende den 3. Satz auf diese an.

Umstande ausgehen will, daß die stetige Funktion $u - u_0$ längs des Kreisrandes stellenweise negativ, nirgends aber positiv ist und darum nicht vermag, ein verschwindendes Integral $\int_0^{2\pi} (u - u_0)\, d\theta$ zu liefern.

Aufgabe 3. Auf Grund des in der 2. Aufgabe enthaltenen Satzes beweise man den Fundamentalsatz der Algebra.

4. Satz. Das Eindeutigkeitstheorem.[1]) *Sind u_1 und u_2 zwei Funktionen, welche in einem beliebigen Bereiche T harmonisch sind und überdies am Rande von T dieselben Randwerte annehmen, so ist auch in jedem inneren Punkte von T*

$$u_1 = u_2.$$

Denn die Differenz $u_1 - u_2$ ist harmonisch in T und verschwindet längs des ganzen Randes von T, darum verschwindet diese Funktion nach dem vorstehenden Zusatze überall in T.[2])

Wir erinnern noch an die Definition von § 1: Ist u eine harmonische Funktion, und v eine zweite Funktion, welche den Relationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

genügt, so heißt v zu u *konjugiert.* Zwei Funktionen v, v_1, welche beide zu u konjugiert sind, unterscheiden sich voneinander nur durch eine Konstante, $v = v_1 + c$. Ist v zu u konjugiert, so ist $-u$ wieder zu v konjugiert. Endlich ist eine zu u konjugierte Funktion v ebenfalls harmonisch.

5. Satz.[3]) *Ist u eine in einem den Punkt ∞ nicht enthaltenden einfach zusammenhängenden Bereich T harmonische Funktion, so gibt es stets eine eindeutige, zu u konjugierte Funktion v, und zwar wird v durch*

1) Der Satz ist für das Newtonsche Potential von Green ausgesprochen und vermöge physikalischer Evidenz bewiesen: a. a. O., Nr. (5). Gauß leitete den vorstehenden Zusatz nach der in der nächsten Anmerkung angedeuteten Methode her; a. a. O., Nr. 25. Den Beweis im allgemeinen Falle, wo man also keine Voraussetzung bezüglich des Verhaltens der Ableitungen am Rande macht, verdankt man C. Neumann, *Math. Ann.*, Bd. 3 (1871), S. 344.

2) Man beweist ferner, daß zwei harmonische Funktionen identisch sind, falls ihre Randwerte längs eines Teiles des nun als regulär vorauszusetzenden Randes übereinstimmen, während ihre nach der inneren Normale genommenen partiellen Ableitungen längs des übrigen Randes gleiche Randwerte annehmen. Hierzu bedient man sich einer Folgerung des Greenschen Satzes, welche in der Formel besteht:

$$\iint^{s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dS = -\int^{s} u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

wo u harmonisch ist. Dabei wird man zunächst verlangen, daß u nebst den beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung innerhalb S endlich und am Rande, höchstens von einer endlichen Anzahl von Randpunkten abgesehen, stetig sei. Gewisse Unstetigkeiten am Rande dürfen indessen zugelassen werden.

3) Liouville, *Journ. de Math.*, Bd. 8 (1843), S. 265.

das Integral dargestellt:

$$v = -\int_{(a,b)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds + C = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + C.$$

Ein Beweis des Satzes ist bereits im vorhergehenden Paragraphen besprochen worden. Ein anderer folgt direkt aus Satz B) von Kap. 4, § 3. Letzterer hat fernerhin den Vorzug, daß auch die Stetigkeit von v am Rande erkenntlich wird, falls u nebst den Ableitungen erster Ordnung daselbst stetig ist.

Ist T dagegen ein mehrfach zusammenhängender Bereich, so wird das vorstehende Integral im allgemeinen keine eindeutige Funktion mehr definieren. Es werden sich nämlich Periodizitätsmoduln einstellen, so daß also, wenn $F(x, y)$ ein Wert des Integrals im Punkte (x, y) ist, die übrigen Werte in der Formel:

$$F(x, y) + m_1 P_1 + \cdots + m_n P_n$$

enthalten werden; vgl. Kap. 4, § 4.

6. Satz.[1]) *Eine harmonische Funktion u verhält sich gegenüber einer konformen Abbildung invariant. Werden dabei die Winkel nicht umgelegt, so verhält sich auch die konjugierte Funktion v invariant; sonst geht v in die negative Funktion $-v$ über.*

Sei u im Punkte A: (x_0, y_0) harmonisch, und man bilde die Umgebung von A mittels der Gleichungen:

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = \varphi(x, y)$$

auf die Umgebung von $\mathfrak{A}$: (ξ_0, η_0) konform ab. Dann ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} > 0.$$

Durch Differentiation ergibt sich allgemein:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$

und hierin liegt eben der Beweis des ersten Teils des Satzes. Der zweite Teil wird auch direkt durch Differentiation bewiesen.

---

1) Der erste Teil des Satzes bei Lamé, *Journ. École roy. polytechn.*, Cah. 23 (1834) § 22, S. 242.

Eleganter gestaltet sich jedoch der folgende Beweis. Die Umgebung von A wird einerseits durch das Funktionenpaar u, v im allgemeinen konform auf ein Stück Σ der (u, v)-Ebene, andererseits durch das Funktionenpaar ξ, η konform auf ein Stück Σ' der (ξ, η)-Ebene bezogen. Das hat nun zur Folge, daß bei geeigneter Einschränkung jener Umgebung von A die Bereiche Σ, Σ' konform aufeinander abgebildet werden, und demgemäß ist

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \pm \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \mp \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

w. z. b. w. Dieser zweite Beweis ist leider weniger allgemein als der erste, da eine wesentliche Voraussetzung dabei ist, daß $\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} > 0$ sei.

Der Satz ist das Analogon des funktionentheoretischen Satzes, daß eine analytische Funktion einer analytischen Funktion wieder eine analytische Funktion ist.

Wir fügen noch eine Bemerkung in der Gestalt eines Korollars hinzu.

Zusatz. *Eine harmonische Funktion verhält sich gegenüber einer rechtwinkligen Koordinatentransformation invariant. Die konjugierte Funktion bleibt auch ungeändert oder aber sie wechselt ihr Vorzeichen, je nachdem die gegenseitige Lage der neuen Koordinatenachsen dieselbe ist, wie diejenige der ursprünglichen, oder nicht.*

Der Vollständigkeit halber führen wir noch einen Satz an, welcher allerdings für unsere Zwecke wenig in Betracht kommt. Die Ausführung des Beweises wird dem Leser überlassen. Sind u, v konjugierte Funktionen, so schneiden sich die beiden Kurvenscharen

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

rechtwinklig. Es wäre indessen ein Fehler zu glauben, daß umgekehrt jedes Paar derartiger Scharen ein System von Niveaukurven und Strömungslinien abzugeben vermöchte. Suchen wir eine Bedingung dafür, daß eine Kurvenschar

$$\varpi = \varphi(x, y) = \text{const.}$$

isothermisch sei. Die Funktion ϖ selbst braucht offenbar nicht harmonisch zu sein, sondern erst eine Funktion von ϖ, $u = f(\varpi)$. Durch Differentiation kommt dann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'(\varpi)\left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}\right) + f''(\varpi)\left(\frac{\partial \varpi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varpi^2}{\partial y^2}\right)$$

und daher muß, wenn u harmonisch sein soll,

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial \varpi^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \varpi^2}{\partial y^2}} = -\frac{f''(\varpi)}{f'(\varpi)}$$

sein. Durch diese beiden Gleichungen wird folgender Satz nahe gelegt.

7. Satz.[1]) *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kurvenschar*

$$\varpi(x, y) = const.$$

isothermisch sei, besteht darin, daß die Funktion

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \varpi^2}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial \varpi^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \varpi^2}{\partial y^2}}$$

von ϖ allein abhängen soll.

§ 4. Fortsetzung; zweite Gruppe, auf einer Integraldarstellung fußend.

Wir bringen jetzt eine Reihe von Sätzen, zu deren Beweis eine explizite Darstellung einer harmonischen Funktion nötig zu sein scheint, und zwar kommen wir bei dieser Gruppe schon mit der Darstellung mittels des Integrals durch. Später werden wir noch Reihenentwicklungen heranziehen müssen.

Wir gehen von der folgenden Form des Greenschen Satzes aus:

$$\iint\limits_S (u\Delta v - v\Delta u)\, dS = -\int\limits_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

wobei sich n auf die innere Normale bezieht. Sind u und v beide harmonisch im Bereiche S, so verschwindet die linke Seite dieser Gleichung, und darum wird

$$\int\limits_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0,$$

vorausgesetzt nur, daß die weiteren, zum Beweise des Greenschen Satzes nötigen Bedingungen bezüglich des Verhaltens der Ableitungen

1) Lamé, *Savants étrangers*, Bd. 5 (1838) S. 174.

von u, v am Rande erfüllt sind, vgl. § 1, Anm. Wir können indessen letztere Formel, welche in der Folge als Hilfssatz dient, ohne jegliche Voraussetzung über das Verhalten der Ableitungen zweiter Ordnung am Rande herleiten, indem wir uns auf Satz A) von Kap. 4, § 3 berufen. Wir formulieren den Satz, wie folgt:

Hilfssatz. *In einem Bereiche S seien u, v harmonisch, und am Rande von S seien diese Funktionen nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig. Dann ist*

$$\int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0. \tag{1}$$

In der Tat ist

$$\int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \int_C P dx + Q dy,$$

wobei

$$P = u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Q = -u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Im vorliegenden Falle sind also alle Bedingungen jenes Satzes erfüllt, und damit ist der Beweis fertig.

Wir wollen jetzt eine grundlegende Darstellung für eine harmonische Funktion ableiten. Sei u eine im Bereich S harmonische Funktion, welche nebst ihren partiellen Abteilungen erster Ordnung am Rande stetig ist, und sei h eine zweite Funktion, welche ebenso wie u beschaffen ist, nur daß h in einem einzigen inneren Punkte O: (x, y) von S logarithmisch unendlich wird:

$$h = \log 1/r + \omega(x, y),$$

wo r die Entfernung von O und ω eine auch in O harmonische[1]) Funktion bedeuten. Wir umgeben O mit einem kleinen Kreise vom Radius ϱ und heben diese Kreisscheibe aus S fort. Auf diesen neuen Bereich wenden wir dann die Formel (1) an und erhalten so:

$$\varrho \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial h}{\partial r} - h \frac{\partial u}{\partial r}\right) d\theta + \int_C \left(u \frac{\partial h}{\partial n} - h \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0,$$

wo das erste Integral vom Kreisrande herrührt, während das zweite Integral über den ganzen Rand von S zu erstrecken ist. Lassen wir

1) Es wird sich später herausstellen, daß die Annahme, $\omega(x, y)$ sei bloß endlich im Punkte O, ausreicht.

jetzt ϱ gegen O abnehmen und sehen wir zu, welchen Grenzwerten die beiden Bestandteile des ersten Integrals sich nähern. Am Kreisrande ist

$$\frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{1}{\varrho} + \frac{\partial \omega}{\partial r},$$

und hiernach ist zufolge des Mittelwertsatzes von § 3

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \int_0^{2\pi} u \frac{\partial h}{\partial r}\, d\theta = \lim_{\varrho=0} \int_0^{2\pi} \left(-u + \varrho u \frac{\partial \omega}{\partial r}\right) d\theta = -2\pi u_0.$$

Der Integrand $-u + \varrho u \frac{\partial \omega}{\partial r}$ ist nämlich eine stetige Funktion von ϱ, θ im Bereiche

$$0 \leqq \varrho \leqq R, \quad (R > 0), \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,$$

und darum definiert das Integral eine stetige Funktion von ϱ im Intervalle $0 \leqq \varrho \leqq R$. Infolgedessen ist insbesondere der limes des Integrals gleich dem Integrale des limes.

In ähnlicher Weise zeigt man, daß

$$\lim_{\varrho=0} \int_0^{2\pi} \varrho h \frac{\partial u}{\partial r}\, d\theta = 0$$

ist. Das hiermit gewonnene Resultat wollen wir noch in folgenden Satz zusammenfassen.

1. Satz.[1]) *Ist u harmonisch innerhalb eines Bereiches S und überdies, nebst den partiellen Ableitungen erster Ordnung, stetig am Rande, so läßt sich u durch das Integral darstellen:*

$$(2) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(u \frac{\partial h}{\partial n} - h \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

wo h den oben genannten Bedingungen unterworfen ist.

Insbesondere kann man mit Riemann

$$h = -\log r$$

setzen, wo

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

---

1) Für das Newtonsche Potential bei Green, a. a. O., Nr. (3); für das logarithmische bei Riemann, *Dissertation*, 1851, Nr. 10 = *Werke*, S. 20.

ist. Dann ist h nicht nur eine harmonische Funktion der laufenden Koordinaten ξ, η, wenn der Punkt (x, y) als fest angesehen wird, sondern auch eine harmonische Funktion von x, y bei festem (ξ, η). Letzteres gilt ebenfalls von der Ableitung $\frac{\partial \log r}{\partial n}$, was für die Anwendungen von Wichtigkeit ist. In der Tat verhält sich eine harmonische Funktion invariant gegenüber einer Koordinatentransformation. Dreht man also die Ebene um den Punkt (ξ, η) derart, daß die Normale mit der positiven x-Achse den Winkel 0 einschließt, so geht $\partial \log r/\partial n$ in $\partial \log r/\partial \xi'$ über, und nun kann man letztere Differentiation direkt in der Laplaceschen Gleichung ausführen:

$$\Delta \frac{\partial \log r}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \log r = 0.$$

Die Greensche Funktion.

Verlangen wir von der Funktion h außerdem noch, daß sie am Rande verschwinden soll, so haben wir damit die Greensche Funktion[1]) g des Bereiches S. Wir fassen diese Definition noch einmal, wie folgt, zusammen: *Unter der Greenschen Funktion eines Bereiches S versteht man eine Funktion g, welche*

a) *im Bereiche S, von einem einzigen innern Punkte O abgesehen, eindeutig und harmonisch ist; ferner*

b) *im Punkte O logarithmisch unendlich wird:*[2])

$$g = \log 1/r + \omega,$$

c) *am Rande von S verschwindet.*

1) Für den dreidimensionalen Fall bei Green, a. a. O., Nr. (5), S. 16. Green wurde bei seinen Untersuchungen über statische Elektrizität auf folgendes Problem geführt. Gegeben sei eine geschlossene leitende Oberfläche, welche mit der Erde in Verbindung gesetzt ist. In einem innern Punkte P derselben sei eine Elektrizitätsmenge $m = 1$ angebracht. Dann wird auf der innern Seite des Leiters Elektrizität induziert, und zwar so, daß das Potential G im Innern sich einem konstanten Randwert anschließt, nämlich dem Potential der Erde, welches gleich 0 gesetzt werde. Andererseits wird das Potential in der Nähe von P ins Unendliche wachsen, und nun liegt es nahe, die Funktion G in diesem Bereiche als von der Form

$$G = \frac{1}{r} + \Omega$$

anzunehmen, wobei Ω sich im Punkte P harmonisch verhält; denn die Funktion $1/r$ ist ja eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung in drei Dimensionen.

2) Auf Grund des 9. Satzes dieses Paragraphen genügt hier bloß die Annahme, daß die Funktion g im Punkte O positiv unendlich wird.

Freilich muß man vorläufig noch verlangen,

d) daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von g am Rande stetig seien. Doch wird sich später ergeben, daß die Bedingung d), im Falle eines aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven bestehenden Randes, behufs der Begründung der nachstehenden Hauptformel (4) entbehrlich ist.

Daß einem beliebigen Bereiche S stets eine Greensche Funktion entspricht, wird später streng analytisch bewiesen, doch hat die physikalische Evidenz die Physiker an der Existenz dieser Funktion niemals zweifeln lassen. In der Tat denke man sich den Bereich S als ein Blatt Stanniol, dessen Rand mit einer dicken Kupfermasse in Verbindung gesetzt ist. Am Punkte O werde der Pol eines galvanischen Elements angebracht, während der andere Pol mit dem Kupfer verbunden wird. Sodann tritt eine Elektrizitätsströmung ein. Dabei wird man den Widerstand des Kupfers als verschwindend klein ansehen, so daß also das Potential g in allen Randpunkten des Blattes einen konstanten Wert erhält, welchen wir gleich 0 setzen mögen. Andererseits wird g im Punkte O logarithmisch unendlich[1]), und zwar kann man es so einrichten, daß die Ergiebigkeit der Quelle gerade 1 beträgt. Hiermit ist die Greensche Funktion des Bereichs S fertig.

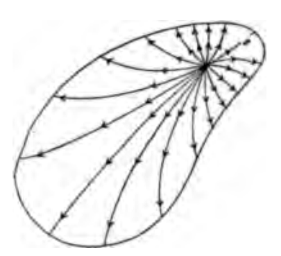


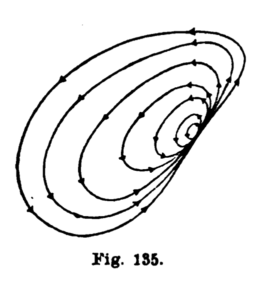
Fig. 134.

Eine andere physikalische Anordnung zur Realisierung der Greenschen Funktion verdient doch noch erwähnt zu werden. Man denke sich den Bereich S als eine dünne nicht leitende Platte, welche auf beiden Seiten inkl. des Randes mit einer dünnen, übrigens gleichförmigen leitenden Schicht überzogen ist. Auf der einen Seite wird dann am Punkte O der eine Pol eines galvanischen Elements aufgesetzt, während der andere Pol auf der anderen Seite gerade am darunter liegenden Punkte O' angebracht wird. Dementsprechend breitet sich die Elektrizität auf der einen Seite aus, läuft dann über den Rand auf die andere Seite, um sich dort wieder in einen Punkt zusammenzuziehen. Aus Symmetriegründen gestalten sich dabei die Strömungslinien auf den beiden Seiten einander gleich; längs des Randes selbst findet übrigens keine Strömung statt. Infolgedessen

1) Zunächst sieht man nur, daß g im Punkte O überhaupt positiv unendlich wird. Daß g deshalb gerade *logarithmisch* unendlich werden muß, folgt aus dem 9. Satze dieses Paragraphen.

ist der Rand eine Niveaukurve, und die Potentialverteilung auf der einen Seite der Platte liefert daher eben die gesuchte Greensche Funktion.

Diese physikalische Deutung der Greenschen Funktion ist auch deshalb von Wichtigkeit, weil wir an der Hand der hiermit gewonnenen physikalischen Anschauung einen Grenzübergang vornehmen können, wodurch die beiden übereinander liegenden Punktquellen an einen Randpunkt der Platte heranrücken. Daraus erwächst eine Strömung, welche auch dadurch hervorgerufen werden kann, daß man ein Quellpaar am genannten Randpunkte so anbringt, daß die Achse desselben den Rand berührt, wobei dann selbstverständlich nur die Hälfte dieses Motors zur Verwendung gelangt. Es genügt hier jedenfalls vorauszusetzen, daß der Rand in dem betreffenden Punkte analytisch sei.


Fig. 135.

Aufgabe. Man zeige, daß

$$\int_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds = 2\pi$$

ist, wo γ eine einfache reguläre geschlossene, den Punkt O, aber keinen Randpunkt von S umfassende Kurve ist und n sich auf die innere Normale bezieht.

Mittels der Greenschen Funktion erhält man eine außerordentlich wichtige Darstellung für die Funktion u. Die Formel (2) reduziert sich nämlich hier auf die einfachere:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_C U \frac{\partial g}{\partial n}\, ds, \tag{4}$$

wo U den Randwert von u bedeutet. Das Ergebnis wollen wir noch, wie folgt, zusammenfassen und dabei zugleich auch erweitern.

2. Satz. *Eine in einem Bereich S harmonische Funktion u, welche in jedem Randpunkte von S einen Randwert U annimmt, läßt sich im Innern von S durch das Integral:*

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_C U \frac{\partial g}{\partial n}\, ds \quad \textit{resp.} \quad u = \frac{1}{2\pi} \int_C U dh$$

darstellen, wobei g die Greensche Funktion des Bereiches, h ihre konjugierte Funktion bedeutet.

Wie man sieht, wird der erste Faktor des Integranden allein durch den Wert der darzustellenden Funktion am Rande bestimmt, während der zweite dagegen überhaupt von jener Funktion unabhängig ist, er wird vielmehr lediglich durch die geometrische Gestalt von S bedingt. — Der Satz ist das Analogon der Cauchyschen Integralformel, Kap. 7, § 4.

Im vorhergehenden ist der Beweis dieses Satzes nur unter den Voraussetzungen erbracht, daß einerseits die Greensche Funktion der Bedingung d) unterworfen sei, während andererseits die Ableitungen erster Ordnung von u am Rande stetig bleiben sollen. Wir werden den Beweis später auf den Fall ausdehnen, daß der Rand aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven besteht, wobei dann die Bedingung d) fortfallen darf, und auch jegliche Voraussetzungen bezüglich des Verhaltens der Ableitungen von u am Rande entbehrlich werden. Im übrigen fehlt vorläufig jeder Existenzbeweis für die Greensche Funktion. Diese Lücke wird ebenfalls später ergänzt.

Auf den allgemeinsten Fall eines regulären Randes werden wir nicht eingehen. Da kann es beispielsweise vorkommen, daß selbst in einem gewöhnlichen Punkte $\frac{\partial g}{\partial n} = \infty$ wird. Allein die konjugierte Funktion h wird stetig am Rande sein und sich im übrigen längs des Randes monoton ändern, so daß also die zweite Formel des Satzes stets einen Sinn hat und ihre Gültigkeit behält.

Das Poissonsche Integral.

Für den Fall, daß der Bereich S ein Kreis ist, kann man die Greensche Funktion sofort hinschreiben. Sei O' der in Bezug auf den Kreis zu O konjugierte Punkt und seien ϱ, ϱ' bzw. die Entfernungen eines veränderlichen Punktes (ξ, η) der Ebene von O, O'. Dann ist längs des Kreisrandes

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \text{const.} = k,$$

wobei k also nur von x, y, nicht von ξ, η abhängt. Bildet man nun die Funktion

Fig. 136.

$$(5) \qquad g = -\log \varrho + \log \varrho' + \log k,$$

so ist das eben die gesuchte Greensche Funktion g des Kreises. Tragen

wir dieselbe in das Integral (4) ein. Zunächst ist

(6) $$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\cos\gamma}{\varrho} - \frac{\cos\gamma'}{\varrho'};$$

ferner ist

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\gamma,$$

$$r'^2 = a^2 + \varrho'^2 - 2a\varrho'\cos\gamma',$$

woraus sich findet:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{1}{2a}\left[\frac{a^2 - r^2}{\varrho^2} - \frac{a^2 - r'^2}{\varrho'^2}\right].$$

Formt man noch das zweite Klammerglied mittels der Relationen:

$$rr' = a^2, \qquad \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{a - r}{r' - a} = \frac{r}{a} = k,$$

um, so kommt:

$$\frac{a^2 - r'^2}{\varrho'^2} = \frac{a^2 - a^4/r^2}{a^2\varrho^2/r^2} = \frac{r^2 - a^2}{\varrho^2},$$

und das gibt endlich:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{a^2 - r^2}{a\varrho^2} = \frac{1}{a}\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}.$$

Für den Kreis läßt sich das Integral (4) in der Form:

(7) $$u = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\frac{\partial g}{\partial n}\,d\psi$$

schreiben, und hiermit erhalten wir nunmehr die Formel:

(8) $$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}\,d\psi.$$

Dies ist das sogenannte *Poissonsche Integral.*[1]) Der zweite Faktor des Integranden ist offenbar der reelle Teil der Funktion

$$\frac{ae^{\psi i} + z}{ae^{\psi i} - z}, \qquad z = re^{\theta i}.$$

Hierin liegt auch eine Bestätigung der bereits aus der Relation (6) ersichtlichen Tatsache, daß dieser Ausdruck harmonisch ist.

Andererseits kann man hieraus die zu $\partial g/\partial n$ konjugierte Funk-

1) Poisson, *Journ École roy. polytechn.*, Cah. 18 (1820) S. 422. Für das Newtonsche Potential, ibid. Cah. 19 (1823) S. 150.

tion direkt ablesen und so die zu u konjugierte Funktion v hinschreiben:

$$(9)\qquad v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U \frac{2ar\sin(\theta-\psi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\psi)+r^2}\,d\psi + C.$$

Aufgabe. Man zeige, daß die Greensche Funktion des Kreises sich invariant gegenüber einer Vertauschung von Parameter und Argument verhält:

$$g(\xi,\,\eta;\,x,\,y) = g(x,\,y;\,\xi,\,\eta).$$

(Der Satz gilt auch allgemein; vgl. den 10. Satz dieses Paragraphen.)

Zweite Herleitung des Poissonschen Integrals. Bôcher[1]) hat eine äußerst einfache und natürliche Herleitung des Poissonschen Integrals gegeben, wonach dasselbe bloß als eine transformierte Form des Mittelwertsatzes:

$$(10)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,d\varphi,$$

erscheint. Unterwirft man nämlich die Ebene einer Transformation durch reziproke Radien, so geht der an der Formel (10) beteiligte Kreis K in einen neuen Kreis K' über. Sei O: $(x,\,y)$ derjenige Punkt von K', in welchen der Mittelpunkt von K verwandelt wird. Dann entspricht den Radien des ursprünglichen Kreises eine Kreisschar mit den Fixpunkten O und O', wo O' konjugiert zu O in bezug auf K' ist. Bezeichnet man noch mit ψ denjenigen Winkel, welchen ein veränderlicher Kreis dieser Schar mit der durch O und O' gehenden Geraden einschließt, und mit φ den Winkel zwischen den entsprechenden Radien des Urkreises, so ist wegen der konformen Abbildung mit Umlegung der Winkel $\psi = -\varphi$. Hiernach stellt sich der Wert von u im Punkte O in folgender einfacher Gestalt dar:

$$(11)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,d\psi.$$

Dies ist nun aber nichts anderes, als eine verkappte Form des Poissonschen Integrals, was auch sofort erhellt, wenn man nach

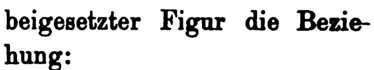
---

1) Vgl. Bôcher, *Bull. Amer. Math. Soc.* 2. Reihe, Bd. 4 (1897/98) S. 424, sowie *Annals of Math.*, 2. Reihe, Bd. 7 (1906) S. 81. Diese Herleitungsweise beweist mehr als die soeben besprochene, da jetzt keine Voraussetzung bezüglich des Verhaltens der Ableitungen am Rande nötig ist.

dem Kreisbogen s integriert:

$$\int_0^{2\pi} U d\psi = \int_0^{2\pi a} U \frac{\partial \psi}{\partial s} ds,$$

und die zu ψ konjugierte Funktion sucht. In der Tat entnimmt man beigesetzter Figur die Beziehung:



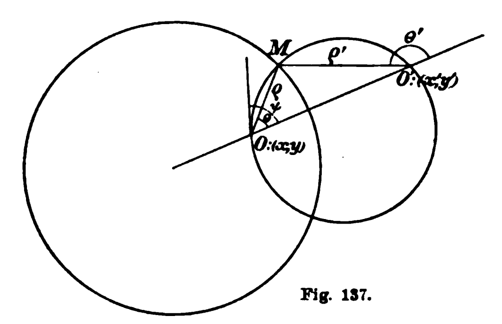


Fig. 137.

$$\psi = \theta + (\pi - \theta'),$$

denn der Tangentenwinkel ψ hat ja die Hälfte des Kreisbogens OMO' zum Maße, während θ und $\pi - \theta'$ Peripheriewinkel auf dem Bogen MO' resp. MO sind. Andererseits sind die zu θ, θ' konjugierten Funktionen bis auf additive Konstanten gleich $-\log \varrho$ bzw. $-\log \varrho'$. Demnach wird

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial n}\left[-\log \varrho + \log \varrho'\right] = \frac{\partial g}{\partial n},$$

und hiermit tritt die Übereinstimmung der Formeln (11) und (7) zu tage, sowie man in (7) als neue Integrationsvariabele $s = a\psi$ einführt.

Aus dieser Überlegung geht nun die Poissonsche Formel hervor, indem man das soeben geschilderte Verfahren umkehrt. Sei u eine Funktion, welche in einem Kreise K' harmonisch und auch am Rande desselben stetig ist, und sei O' ein beliebiger innerer Punkt von K'. Man schreibe ferner das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi a} U \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U d\psi$$

hin. Unterwirft man dann K' einer solchen Transformation durch reziproke Radien, daß O' in den Mittelpunkt des transformierten Kreises K geworfen wird, so tritt jetzt der Mittelwertsatz in Kraft, vgl. die Aufgabe darunter, S. 622, womit sich denn das gewünschte Resultat ergibt.

Das Poissonsche Integral bei beliebigen Randwerten. Bisher sind wir bei der Behandlung des Poissonschen Integrals von einer harmonischen Funktion ausgegangen, deren Stetigkeit am Rande bereits

nach Voraussetzung feststand, und außerdem mußten, um den Bedürfnissen der ersten Beweismethode gerecht zu werden, auch die Ableitungen erster Ordnung von u am Rande stetig sein. Wir wollen uns jetzt eine beliebige stetige Folge von Werten auf der Kreisperipherie geben und die Frage aufwerfen: Wird dann stets eine Funktion u vorhanden sein, welche im Innern des Kreises harmonisch ist und sich überdies den genannten Werten am Rande stetig anschließt? Nach der zweiten Beweismethode wird diese Funktion, falls sie existiert, sicher durch das Poissonsche Integral dargestellt.

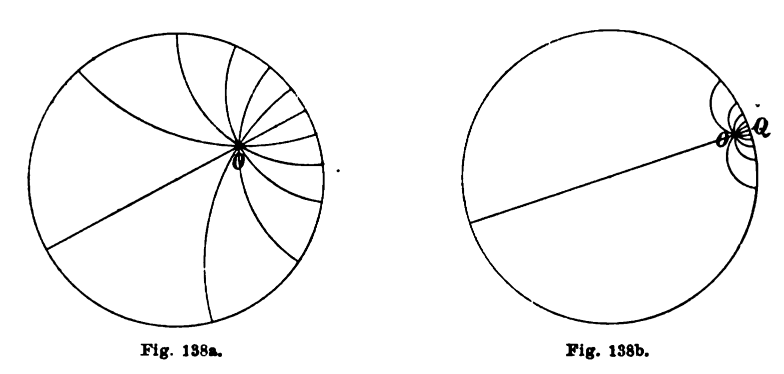


Fig. 138a. Fig. 138b.

Daß diese Frage in der Tat zu bejahen ist, hat Schwarz[1]) gezeigt. Vermöge der von Bôcher gegebenen Form des Poissonschen Integrals (11) springt dieser Satz sofort in die Augen. In der Tat sei U eine stetige, sonst aber völlig willkürliche Funktion auf dem Kreisrande, und man schreibe das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U d\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi a} U \frac{\partial\psi}{\partial s}\, ds$$

hin. Dann sieht man vor allem, daß dadurch eine im Innern des Kreises harmonische Funktion $f(x, y)$ definiert wird. Läßt man jetzt den Punkt O: (x, y) gegen einen willkürlichen Randpunkt Q: $\psi = \psi_0$ konvergieren, so leuchtet aus der ersten Form des Integrals bereits hervor, daß $f(x, y)$ dem Werte U_Q zustreben muß. Denn, wenn O nahe bei Q liegt, entsprechen ja allen Werten von ψ mit Ausnahme eines kleinen Intervalles $\pi - \delta < \psi < \pi + \delta$ solche Punkte auf dem Kreisrande, welche ihrerseits nahe bei Q liegen und wofür denn U einen von U_Q wenig verschiedenen Wert hat. Demgemäß sind diese

1) *Werke*, Bd. 2, S. 360. Vgl. indessen auch Poisson, a. a. O.

Werte von U beim Integrale vorwiegend, dessen Wert mithin ungefähr U_Q betragen wird. Die beiden Figuren 138a und 138b sind quantitativ ausgeführt und entsprechen einer Teilung des Winkels $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ in zwölf gleiche Teile, so daß also die Tangenten der Kreise im Punkte O gleich stark gegeneinander geneigt sind.

Hiermit ist auch der Weg gezeigt, auf welchem man zu einem strengen arithmetischen Beweise gelangen kann. Letzterer läßt sich indessen bequemer führen, indem man die obere Halbebene an Stelle des Kreises treten läßt. Messen wir den Winkel ψ von der nach unten gerichteten Ordinate, wie in der Figur angedeutet ist, so ergibt sich:

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{\xi - x}{y}, \qquad \psi = 2 \operatorname{arc} \tan \frac{\xi - x}{y},$$

$$d\psi = 2\,\frac{y\,d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2},$$

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,d\psi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U\,\frac{y\,d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2}. \tag{12}$$

Sei ε eine beliebig kleine positive Größe, sei P: $(x_0, 0)$ ein be-

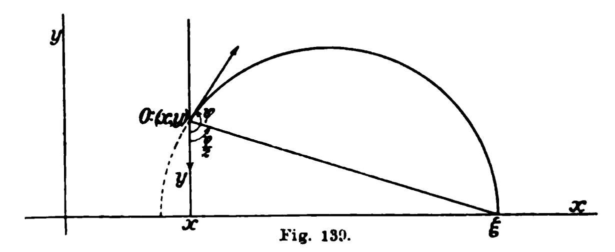


Fig. 139.

liebiger Punkt der x-Achse, und sei U_0 der Wert von U im Punkte P. Dann gibt es eine positive Größe h derart, daß

$$|U - U_0| < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $|\xi - x_0| < 2h$ wird. Sei ferner M der Maximalwert von $|U|$ am Kreisrande.

Der Punkt O: (x, y) möge nun auf ein sogleich näher zu bestimmendes Rechteck:

Fig. 140.

$$|x - x_0| < h, \qquad 0 < y < l$$

beschränkt werden. Wir schreiben das Integral (12) in der Form hin

$$\int_{-\infty}^{x_0-2h} + \int_{x_0-2h}^{x_0+2h} + \int_{x_0+2h}^{\infty},$$

und bezeichnen diese drei Integrale, je durch π geteilt, bzw. mit J_1, J_2, J_3. Es ist dann

$$|J_3| \leqq \frac{M}{\pi}\int_{x_0+2h}^{\infty} \frac{y\,d\xi}{(\xi-x)^2+y^2} = \frac{M}{\pi} \operatorname{arc\,tan} \frac{\xi-x}{y}\Bigg|_{x_0+2h}^{\infty}$$
$$= \frac{M}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tan} \frac{x_0-x+2h}{y}\right],$$

wobei der Hauptwert der Funktion arc tan x verstanden ist:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tan} x < \frac{\pi}{2}.$$

Bedenkt man nun, daß arc tan x monoton mit x zunimmt, während andererseits

$$-h < x_0 - x < h$$

bleibt, so erkennt man, daß

$$\operatorname{arc\,tan} \frac{h}{l} < \operatorname{arc\,tan} \frac{x_0-x+2h}{y} < \frac{\pi}{2}$$

ist. Demgemäß wollen wir l jetzt so wählen, daß

$$\operatorname{arc\,tan} \frac{h}{l} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \qquad l = h \tan \varepsilon,$$

wird. Dann wird

$$|J_3| < \frac{M}{\pi}\,\varepsilon.$$

In ähnlicher Weise zeigt man, daß auch

$$|J_1| < \frac{M}{\pi}\,\varepsilon$$

ist.

Was nun endlich J_2 anbetrifft, so ist

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\int_{x_0-2h}^{x_0+2h} (U_0 + \zeta)\,\frac{y\,d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}$$

$$= \frac{U_0}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tan} \frac{x_0-x+2h}{y} - \operatorname{arc\,tan} \frac{x_0-x-2h}{y}\right] + \frac{1}{\pi}\int_{x_0-2h}^{x_0+2h} \zeta\,\frac{y\,d\xi}{(\xi-x)^2+y^2},$$

wobei $|\zeta| < \varepsilon$ ist. Nach dem Vorhergehenden liegt der Wert der eckigen Klammer zwischen $\pi - 2\varepsilon$ und π, und der letzte Term rechter Hand liegt, absolut genommen, unterhalb ε. Hiermit sind alle Abschätzungen fertig, und der Beweis ist geliefert.

Der vorstehende Beweis gestattet eine viel allgemeinere Formulierung des Satzes. Wie man sieht, kommt es im Wesentlichen nur darauf an, a) daß U in einem vorgegebenen Randpunkte Q des Kreises stetig sei; b) daß $|U|$ endlich und längs des ganzen Kreisrandes integrierbar sei. Allein in der Umgebung eines Randpunktes, in dessen Nähe U unstetig wird, aber endlich bleibt, wird u auch endlich bleiben. Demgemäß können wir folgenden Satz aussprechen.

3. Satz. *Sei U eine Funktion, welche längs der Peripherie eines Kreises, höchstens von einer endlichen Anzahl von Punkten abgesehen, stetig ist, und sei U ferner endlich. Dann stellt das Poissonsche Integral*

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\psi - \theta) + r^2}\, d\psi$$

eine innerhalb des Kreises endliche harmonische Funktion vor, welche in jedem Randpunkte, wo U stetig ist, den Randwert U annimmt, und im Innern des Kreises, sofern nicht gerade $U = \text{const.}$ ist, zwischen der oberen und der unteren Grenze von U liegt.

Es ist nicht schwer, den Satz auf den Fall auszudehnen, daß U in der Nähe einer endlichen Anzahl von Randpunkten aufhört, endlich zu bleiben, vorausgesetzt nur, daß U sonst stetig ist, und daß außerdem $|U|$ über den ganzen Kreisrand hin integrierbar ist.

4. Satz. *Ist u harmonisch in einem Kreise $x^2 + y^2 < a^2$ und stetig am Rande desselben, und bezeichnet man ferner den Maximalwert von $|u|$ am Rande mit M; so ist diejenige konjugierte Funktion v, welche im Mittelpunkte des Kreises verschwindet, der Ungleichung unterworfen:*

$$|v| \leqq \frac{2arM}{a^2 - r^2}. \tag{13}$$

Indem wir an die durch die Formel (9) gegebene Darstellung der Funktion v anknüpfen, bringen wir den Mittelwertsatz (B) von Kap. 1, § 4 in Anwendung, wobei jener Faktor $f(x)$ im vorliegenden Falle mit dem Ausdruck $U \cdot 2ar \sin(\theta - \psi)/2\pi$ identifiziert werden

soll. So kommt:

$$|v| \leqq \frac{arM}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2} = \frac{arM}{\pi} \frac{2\pi}{a^2 - r^2}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die Abschätzung (13) *gilt offenbar auch dann, wenn unter* $2M$ *die Oszillation der Randwerte von* u *verstanden wird.*

Ausgerüstet mit dem Poissonschen Integral wenden wir uns jetzt zur weiteren Forschung der Theorie des logarithmischen Potentials.

Weiterentwicklung der Theorie auf Grund der Integraldarstellungen.

5. Satz. *Eine harmonische Funktion besitzt partielle Ableitungen aller Ordnungen. Jede derselben ist wieder harmonisch.*

In der Tat sei A ein Punkt, in welchem die Funktion u harmonisch ist. Beschreibt man dann um A einen genügend kleinen Kreis, so kann man u innerhalb desselben mittels des Poissonschen Integrals darstellen. Aus der hiermit gewonnenen Formel erkennt man, daß u beliebig oft nach x und y differentiiert werden darf, indem man die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt. Daß die Ableitungen von u ebenfalls harmonisch sind, ergibt sich aus der Relation:

$$\Delta \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \Delta u.$$

6. Satz. *Eine Funktion u, welche sich überall im Endlichen harmonisch verhält und auch im unendlich fernen Bereiche der Ebene endlich bleibt, ist eine Konstante.*

Seien O, P zwei beliebige Punkte der Ebene. Um O beschreibe man einen den Punkt P umfassenden Kreis und stelle man u innerhalb desselben durch das Poissonsche Integral dar. Im Mittelpunkte O geht das Integral in die Formel des Mittelwertsatzes über:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\psi,$$

und man erhält sonach die Gleichung:

$$u_P - u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U \frac{-2r^2 + 2ar\cos(\theta - \psi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi.$$

Aus den Beziehungen

$$|-r + a\cos(\theta - \psi)| \leqq a + r,$$
$$a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2 \geqq (a - r)^2$$

folgt dann, daß

$$\left|\frac{-2r^2 + 2ar\cos(\theta - \psi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}\right| \leqq \frac{2r(a + r)}{(a - r)^2}$$

ist. Durch passende Wahl von a kann letztere Größe offenbar kleiner als eine willkürlich vorgeschriebene positive Größe ε gemacht werden. Nun ist andererseits nach Voraussetzung überall

$$|u| < M,$$

wo M eine positive Konstante bedeutet. Infolgedessen ist

$$|u_P - u_0| < \varepsilon M,$$

d. h. die Konstante $u_P - u_0$ ist dem absoluten Betrage nach kleiner als jede positive Größe. Das ist aber nur dann möglich, wenn diese Konstante den Wert 0 hat[1]), und daher ist

$$u_P = u_0,$$

w. z. b. w.

Der Satz entspricht dem Liouvilleschen Satze in der Funktionentheorie, Kap. 7, § 5, ist aber allgemeiner als jener, da er nur die Endlichkeit des einen Teils der komplexen Funktion voraussetzt.

7. Satz. *Sei u eine Funktion, welche in einem endlichen zweifach zusammenhängenden Bereich S harmonisch ist, und seien C_1 und C_2 bzw. die äußere und die innere Begrenzung von S. Dann läßt sich u in zwei Teile spalten:*

$$u = u_{\mathfrak{J}} + u_{\mathfrak{A}},$$

dergestalt, daß $u_{\mathfrak{J}}$ im Innern von C_1, und $u_{\mathfrak{A}}$ überall im Endlichen außerhalb C_2 harmonisch ist.

Setzt man im 1. Satz $h = \log 1/r$, so kommt:

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\left(u\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{C_2}\left(u\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

1) An diese für die moderne Analysis so wichtige Schlußweise wollen wir noch die Bemerkung knüpfen, daß dieselbe in einem unendlich kleine *konstante* Größen umfassenden Zahlensystem unmöglich wäre. Würde man also derartige Größen in die Analysis einführen, so würde damit eine außerordentlich wertvolle Beweismethode eingehen.

und da liefern nun die beiden Integrale rechter Hand eben die in Aussicht genommenen Funktionen $u_{\mathfrak{Z}}$ und $u_{\mathfrak{A}}$. In der Tat ist der Integrand harmonisch, und überdies läßt sich die Differentiation nach Kap. 3, § 8 unter dem Integralzeichen ausführen.

Der Beweis setzt voraus, daß sowohl u als $\partial u/\partial n$ stetige Randwerte besitzen. Wir können jedoch die Schlußweise leicht dahin abändern, daß diese Annahme ganz beseitigt wird, indem wir zwei Kurven C_1' und C_2' einführen, welche ganz innerhalb S liegen und dicht neben C_1 bzw. C_2 herlaufen. Für den durch C_1' und C_2' begrenzten Bereich S' wird dann der vorstehende Beweis seine Gültigkeit beibehalten:

$$u = u'_{\mathfrak{Z}} + u'_{\mathfrak{A}}.$$

Läßt man jetzt C_1' sich an die Kurve C_1 immer enger anschmiegen, so wird dadurch weder u noch $u'_{\mathfrak{A}}$ behelligt, und darum bleibt auch $u'_{\mathfrak{Z}}$ ungeändert in jedem Punkte von S, welcher einmal von S' umfaßt ist. In der Grenze erhält man mithin eine Funktion $u_{\mathfrak{Z}}$, welche in C_1 eindeutig und harmonisch ist. Verfährt man noch mit C_2' in ähnlicher Weise, so ergibt sich damit die gewünschte Verallgemeinerung.

Dieser Satz entspricht dem Laurentschen Satze in der Funktionentheorie, Kap. 7, § 15.

Bemerkung. *Diese Verallgemeinerung umfaßt insbesondere den Fall, daß die Kurve C_2 auf einen Punkt zusammenschrumpft bzw. daß die Kurve C_1 ins Unendliche rückt und die ganze Ebene schließlich umfaßt, sowie auch das gleichzeitige Bestehen beider Fälle.*

Aufgabe. Man dehne den Satz auf einen beliebigen mehrfach zusammenhängenden Bereich aus.

Der unendlich ferne Bereich der Ebene wird hier, wie in der Funktionentheorie und der Geometrie der reziproken Radien, als ein Punkt, *der Punkt* ∞, aufgefaßt.

Definition. Eine Funktion u soll *im Punkte* ∞ *harmonisch* heißen, wenn u außerhalb einer bestimmten geschlossenen Kurve eindeutig und harmonisch ist und außerdem im genannten Bereiche endlich bleibt.

1. Zusatz. *Im Punkte ∞ bleibt $u_{\mathfrak{A}}$ harmonisch, oder aber $u_{\mathfrak{A}}$ wird dort logarithmisch unendlich, und zwar ist*

$$u_{\mathfrak{A}} = w + k \log \varrho,$$

wo sich w im Punkte ∞ harmonisch verhält und dort verschwindet, k eine Konstante ist, die insbesondere verschwinden kann, und ϱ die Entfernung eines veränderlichen Punktes P: (x, y) von einem festen innerhalb C_2 gelegenen Punkte Q bedeutet.

Wir schreiben

$$u_{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2} u\frac{\partial \log r}{\partial n}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2} \log r\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

wobei nötigenfalls C_2 durch C_2' zu ersetzen ist, und zeigen zuerst, daß der erste Term rechts gegen 0 konvergiert, wenn $r = \infty$ wird. In der Tat ist

$$\frac{\partial \log r}{\partial n} = -\frac{\cos\gamma}{r}.$$

Da nun $u\cos\gamma$ längs der ganzen Kurve C_2 endlich bleibt, so konvergiert der Integrand gleichmäßig gegen 0. Dementsprechend konvergiert auch das Integral gegen 0, vgl. Kap. 3, § 7.

Zur Behandlung des zweiten Termes setze man

$$\log r = \log\frac{r}{\varrho} + \log\varrho.$$

Dann ist

$$\int\limits_{C_2} \log r\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_{C_2} \log\frac{r}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \log\varrho\int\limits_{C_2}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Hier konvergiert der erste Term rechts, wie eine ähnliche Überlegung wie vorhin zeigt, ebenfalls gegen den Grenzwert 0, wenn $r = \infty$ wird, während der zweite bereits die Form $k\log\varrho$ besitzt. Hiermit ist der Zusatz bewiesen.

2. Zusatz. *Unterwirft man die Ebene einer Transformation durch reziproke Radien mit dem Inversionszentrum im Punkte Q, so geht w in eine Funktion w' über, welche im Punkte Q harmonisch ist, sofern man w' dort den Wert 0 beilegt.*

Der Beweis des 1. Zusatzes bediente sich eines expliziten Ausdrucks für die Funktion w, nämlich:

$$w = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2}\left(u\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log\frac{r}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

Indem wir an diese Formel anknüpfen, setzen wir:

(14) $$\varrho\varrho' = a^2,$$

wobei der Radius a des Inversionskreises so genommen wird, daß C_2

ganz außerhalb dieses Kreises liegt. Sei R die Entfernung eines veränderlichen Punktes M der Kurve C_2 von Q, und ω der Winkel, den QM mit QP (Fig. 141) einschließt. Aus der trigonometrischen Relation

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\omega$$

findet man dann vermöge (14):

$$r^2 = \frac{a^4}{R'^2\varrho'^2}(R'^2 + \varrho'^2 - 2R'\varrho'\cos\omega),$$

$$\log\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{2}\log(R'^2 + \varrho'^2 - 2R'\varrho'\cos\omega) - \log R'.$$

Hier stellt der erste Term rechter Hand den Logarithmus der Entfernung $\mathfrak{r}'$ des Punktes P': (x', y') vom Punkte M' vor, während der

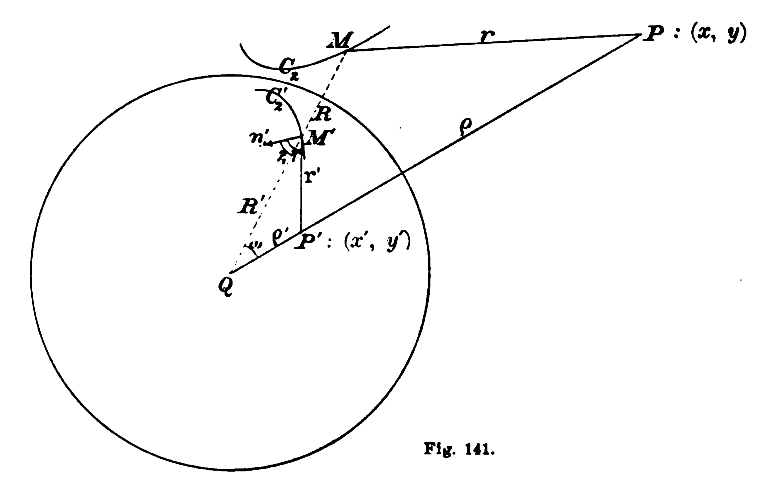


Fig. 141.

zweite Term unabhängig von P' ist, und daher geht $\log r/\varrho$ durch (14) in eine im Punkte Q harmonische Funktion h_1' über.

Um noch den transformierten Wert von $\partial \log r/\partial n$ zu berechnen, gestatten wir jetzt dem Punkte M eine beliebige Lage in der Nähe von C_2 anzunehmen, wobei sich dann M' seinerseits in der Nähe von C_2' befinden wird. So kommt:

$$\mathfrak{r}' = \sqrt{R'^2 + \varrho'^2 - 2R'\varrho'\cos\omega},$$

$$\log r = \log\mathfrak{r}' - \log R' + \log\frac{a^2}{\varrho'},$$

$$\frac{\partial \log r}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n'}\left\{\log\mathfrak{r}' - \log R' + \log\frac{a^2}{\varrho'}\right\}\frac{\partial n'}{\partial n}$$

$$= \left[-\frac{\cos\gamma'}{\mathfrak{r}'} + \frac{\cos\gamma_1}{R'}\right]\frac{\partial n'}{\partial n},$$

und hieraus erhellt, daß $\partial \log r/\partial n$ ebenfalls in eine Funktion h_2 übergeht, welche sich in Q harmonisch verhält.[1])

Wir haben hiermit eine Darstellung der transformierten Funktion w' von folgender Gestalt erhalten:

$$w' = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2'}\left(u' h_2' - h_1'\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]'\right)\frac{ds}{ds'}\,ds',$$

wobei sich der Integrand im Punkte Q harmonisch verhält. Daß dieses Integral deshalb auch eine im Punkte Q harmonische Funktion definiert, schließt man sofort auf Grund der Sätze von Kap. 3, § 8, und hiermit ist der Beweis geliefert.

3. Zusatz. *Eine Funktion u, welche sich im Punkte ∞ harmonisch verhält, geht durch eine Inversion der Ebene in eine Funktion u' über, welche sich, von einer hebbaren Unstetigkeit abgesehen, im Inversionszentrum harmonisch verhält.*

Nach dem Vorhergehenden läßt sich u in der Form darstellen:

$$u = u_1 + w + k \log \varrho,$$

wobei sich u_1 in der ganzen endlichen Ebene harmonisch verhält. Da u und w jedenfalls im Punkte ∞ endlich bleiben, so müßte u_1, falls $k \neq 0$ wäre, dort unendlich werden. Dies geht aber nicht an, vgl. Aufgabe 1, S. 623. Infolgedessen verschwindet k, und damit erweist sich u_1 wegen des 6. Satzes als eine Konstante.

4. Zusatz. *Eine harmonische Funktion verhält sich invariant gegenüber einer konformen Abbildung selbst dann, wenn der transformierte Bereich den Punkt ∞ umfaßt.*

5. Zusatz. *Sei u eine Funktion, welche außerhalb einer oder mehrerer Kurven C, inklusive des Punktes ∞, eindeutig und harmonisch ist und außerdem nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Randwerte längs dieser Kurven annimmt. Dann läßt sich u im genannten Gebiete in der Gestalt darstellen:*

$$(15)\qquad u = u_\infty - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C}\left(u\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

wo u_∞ den Wert von u im Punkte ∞ bedeutet.

Für das Äußere der Kurven C entspricht diese Formel der früheren, auf einen endlichen Bereich bezüglichen Darstellung (2). Vgl. auch Kap. 7, § 9, Aufgabe 5.

1) Der soeben durchgeführte Beweis läßt sich auch in einfacher Weise vermöge komplexer Größen erbringen.

In den obigen Entwicklungen ist folgender wichtiger Satz enthalten.

8. Satz. *In der Umgebung eines Punktes A, diesen Punkt selbst allein ausgenommen, sei u eindeutig und harmonisch. Bleibt u überdies endlich in der genannten Umgebung, so wird u auch im Punkte A harmonisch sein, sofern man nur von einer hebbaren Unstetigkeit dort absieht.*

Zum Beweise braucht man nur eine Transformation durch reziproke Radien vorzunehmen, wodurch der Punkt A ins Unendliche geworfen wird, und hierauf den 3. Zusatz in Anwendung zu bringen.

Ein zweiter Beweis stützt sich auf den 9. Satz und wird noch im Anschlusse daran besprochen.

Der Satz entspricht dem Riemannschen Satz in der Funktionentheorie, Kap. 7, § 6, 9. Satz, ist aber allgemeiner als jener, da hier keine Voraussetzung bezüglich des Verhaltens der konjugierten Funktion v in der Nähe von A gemacht wird.

9. Satz. *In der Umgebung eines Punktes A: (a, b), den Punkt A selbst allein ausgenommen, sei u harmonisch, und sei ferner*

$$\lim_{x=a,\, y=b} u = +\infty \text{ bzw. } -\infty .$$

Dann läßt sich u in der genannten Umgebung in der Form darstellen:

$$u = k \log r + \omega ,$$

wo ω sich im Punkte A harmonisch verhält, und wo r die Entfernung von A bedeutet, falls dieser Punkt im Endlichen liegt, sonst aber die Entfernung von irgend einem festen Punkte der Ebene.

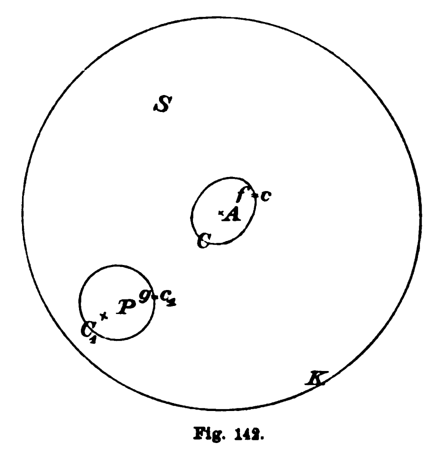


Fig. 142.

Der Satz ist vielfach von den Physikern angewendet worden und liegt insbesondere der Aufstellung der Greenschen Funktion in der ursprünglichen Greenschen Abhandlung zugrunde. Bewiesen ist er erst von Bôcher[1]), welcher ihn einmal auf harmonische Funktionen von n Argumenten, sodann auch

1) Bôcher, *Bull. Math. Amer. Soc.*, 2. Folge, Bd. 9 (1903), S. 455.

auf Funktionen zweier Argumente, welche linearen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus genügen, verallgemeinerte. Seinen Beweis teilen wir hier mit.

Wir wollen festsetzen, daß der Punkt A: (a, b) im Endlichen liegt und daß u in A positiv unendlich wird. Die anderen Fälle lassen sich offenbar auf diesen Fall zurückführen. Um A werde ein Kreis K gelegt, welcher keinen weiteren singulären Punkt der Funktion enthält. Alsdann werde vermöge des Poissonschen Integrals eine Funktion $\bar{u}$ gebildet, welche auf K dieselben Randwerte wie u annimmt und innerhalb K harmonisch bleibt. Wenn wir nun die Differenz

$$f(x, y) = u - \bar{u}$$

bilden, so wird diese Funktion, vom Punkte A abgesehen, im Kreise K harmonisch sein und am Rande von K den Wert 0 annehmen, während sie im Punkte A positiv unendlich wird. Sei c eine große positive Konstante. Dann stellt die Gleichung

$$f(x, y) = c \tag{16}$$

ein kleines Oval C um den Punkt A dar.[1])

Des weiteren sei P: (x_1, y_1) ein beliebiger, von A verschiedener innerer Punkt des Kreises K, und man bilde die Greensche Funktion g für den Kreis, deren Pol im Punkte P liegt, $g(x, y; x_1, y_1)$. Wir nehmen wieder eine große positive Konstante c_1 an und setzen

$$g(x, y) = c_1. \tag{17}$$

In diesem Falle ist das dadurch definierte Oval ein den Punkt P enthaltender Kreis C_1. Im übrigen sollen dabei c und c_1 beide so groß gewählt werden, daß C und C_1 außerhalb einander liegen. Der außerhalb C und C_1 gelegene Teil von K werde endlich mit S bezeichnet.

Hiermit sind alle Vorbereitungen getroffen. Der springende Punkt des Beweises besteht nun in der Anwendung des am Eingang des Paragraphen stehenden Hilfssatzes auf den Bereich S, wobei $u = f$, $v = g$ zu setzen sind. Daß $\bar{u}$ und somit auch f stetige Ableitungen erster Ordnung am Rande von K besitzen, folgt aus dem 3. Satze von § 6 unten. Es genügt indessen, K durch einen kleineren Kreis $K' : g = \varepsilon > 0$ zu ersetzen und dann einen Grenzübergang vor-

1) Wegen eines strengen Beweises dieser Behauptung müssen wir auf spätere Ausführungen verweisen; man vgl. § 7, wo ein ähnlicher Beweis durchgeführt ist.

zunehmen. Da nun sowohl f als g am Rande von K verschwinden, so kommt zunächst:

$$\int\limits_{C_1} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds_1 + \int\limits_{C} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Hieraus findet man unter Benutzung des Mittelwertsatzes (B), S. 20:

$$(18) \qquad f_{s_1}\int\limits_{C_1} \frac{\partial g}{\partial n} ds_1 - c_1\int\limits_{C_1} \frac{\partial f}{\partial n} ds_1 + c\int\limits_{C} \frac{\partial g}{\partial n} ds - g_s\int\limits_{C} \frac{\partial f}{\partial n} ds = 0,$$

wobei $f_{s_1} = f(x_1', y_1')$, $g_s = g(x', y'; x_1, y_1)$ bzw. den Wert von f, g in einem bestimmten Punkte von C_1, C bedeuten. Daß der Mittelwertsatz in der Tat hier anwendbar ist, erkennt man daraus, daß außerhalb C_1 $g < c_1$ ist, und daher muß $\partial g/\partial n \leq 0$ sein. Ähnliches gilt auch von $\partial f/\partial n$. Nun ist nach dem 1. Satze von § 3

$$\int\limits_{C_1} \frac{\partial f}{\partial n} ds_1 = 0, \qquad \int\limits_{C} \frac{\partial g}{\partial n} ds = 0.$$

Ferner hat das letzte Integral in (18) nach der demselben Satze zugefügten Aufgabe für alle Ovale C ein und denselben Wert, $-2\pi k$, während das erste Integral gleich -2π ist. Wir tragen diese Werte in (18) ein und erhalten so:

$$(19) \qquad f_{s_1} = k g_s.$$

Jetzt lassen wir c und c_1 beide ins Unendliche wachsen. Dabei nähern sich f_{s_1}, g_s bzw. den Grenzwerten $f(x_1, y_1)$, $g(a, b; x_1, y_1)$, und (19) geht mithin in

$$f(x_1, y_1) = k g(a, b; x_1, y_1)$$

über. Es bleibt nur noch übrig, den Satz von der Vertauschbarkeit von Parameter und Argument heranzuziehen, vergleiche die Aufgabe auf S. 635:

$$g(a, b;\ x_1, y_1) = g(x_1, y_1; a, b).$$

Daraus erkennen wir, daß die Funktion $f(x, y)$ sich von der für den Punkt A als Pol gebildeten Greenschen Funktion des Kreises nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet:

$$f(x, y) = k g(x, y; a, b).$$

Infolgedessen ist allgemein

$$u = k g(x, y;\ a, b) + \bar{u},$$

und hierin liegt der Beweis des Satzes.

Die soeben verwendete Schlußweise ist dem Beweise des Satzes über die Vertauschbarkeit von Parameter und Argument im Falle der Greenschen Funktion $g(x, y; x_1, y_1)$ eines beliebigen Bereiches Σ nachgebildet, nur tritt bei jenem Beweise an Stelle des Kreises K und der Funktion f der Bereich Σ bzw. die Funktion

$$g_1 = g(x, y; a, b).$$

Im übrigen erhält k hier den Wert 1. Dieses Ergebnis wollen wir noch als Satz aussprechen.[1])

10. Satz. *Bezeichnet man mit $g(x, y; \xi, \eta)$ die für den Punkt (ξ, η) als Pol gebildete Greensche Funktion eines beliebigen Bereiches, so ist*

$$g(x, y; \xi, \eta) = g(\xi, \eta; x, y).$$

Wie vorhin schon erwähnt wurde, kann man den 8. Satz aus dem 9. Satze ableiten. Zu dem Zwecke braucht man nur die harmonische Funktion $\log r$ zu jener Funktion u hinzuzufügen. Dann genügt die Funktion

$$u + \log r$$

den Voraussetzungen des 9. Satzes, und daher muß

$$u + \log r = k \log r + \omega,$$

also

$$u = (k - 1) \log r + \omega$$

sein, wo ω sich im Punkte A harmonisch verhält. Da nun aber sowohl u als ω im Punkte A endlich bleiben, so muß $k - 1 = 0$ sein, und demgemäß fällt u mit der im betreffenden Punkte harmonischen Funktion ω zusammen.

11. Satz.[2]) *Sei*

$$u_\alpha = f(x, y, \alpha)$$

eine Funktion, welche für jeden in Betracht kommenden Wert von α sich in einem Bereiche S harmonisch verhält und übrigens am Rande von S stetig ist. Konvergieren dann die Randwerte U_α beim Grenz-

---

1) Besteht der Rand von Σ aus einer einzigen analytischen Kurve, so sorgt der 3. Satz von § 6 unten wieder für die Stetigkeit der ersten Ableitungen am Rande. Sowohl hier als im allgemeinen Falle kann man sich indessen wie vorhin behelfen, indem man den Bereich S zunächst durch einen durch die Kurve $g = \varepsilon > 0$ berandeten Bereich S' ersetzt, und dann ε gegen 0 abnehmen läßt.

2) Harnack, *Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials*, 1887, § 20.

übergange $\lim \alpha = \bar{\alpha}$ *(insbesondere darf* $\bar{\alpha} = \infty$ *sein) gleichmäßig, so konvergiert* u_α *gleichmäßig in* S, *und zwar wird die Grenzfunktion*

$$\lim_{\alpha=\bar{\alpha}} u_\alpha = u_{\bar{\alpha}}$$

ebenfalls harmonisch in S *sein.*

Des weiteren konvergieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial y}$$

in jedem Bereiche Σ, *welcher nebst seinen Randpunkten ganz innerhalb* S *liegt, gleichmäßig gegen die Grenzwerte* $\partial u_{\bar{\alpha}} / \partial x$ *bzw.* $\partial u_{\bar{\alpha}} / \partial y$, *und da jene Ableitungen wieder harmonisch sind, so schließt man allgemein:*

$$\lim_{\alpha=\bar{\alpha}} \frac{\partial^{m+n} u_\alpha}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n} u_{\bar{\alpha}}}{\partial x^m \partial y^n}.$$

Dabei ist auch im letzteren Falle die Konvergenz gleichmäßig in Σ.

Wir knüpfen an den 3. Satz von § 3 an, wonach eine harmonische Funktion, welche am Rande stetig ist, ihren größten, sowie ihren kleinsten Wert am Rande erreicht. Da es nun nach Voraussetzung zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, derart daß

$$|U_\alpha - U_{\alpha'}| < \varepsilon, \qquad |\alpha - \bar{\alpha}| < \delta, \quad |\alpha' - \bar{\alpha}| < \delta,$$

so folgt unmittelbar aus jenem Satze, daß auch im Inneren von S

$$|u_\alpha - u_{\alpha'}| < \varepsilon, \qquad |\alpha - \bar{\alpha}| < \delta, \quad |\alpha' - \bar{\alpha}| < \delta.$$

Hiermit ist die gleichmäßige Konvergenz von u_α in S dargetan.

Sei ferner A: (x_0, y_0) ein beliebiger innerer Punkt von S, und man lege um A einen Kreis K, welcher nur keinen Randpunkt von S in seinem Inneren umfaßt. Bezeichnet man mit $U_\alpha^{(K)}$, $U_{\bar{\alpha}}^{(K)}$ den Wert von u_α bzw. $u_{\bar{\alpha}}$ am Rande von K, so ist

$$U_\alpha^{(K)} = U_{\bar{\alpha}}^{(K)} + \zeta_\alpha, \quad \text{wo} \quad |\zeta_\alpha| \leqq \varepsilon \tag{20}$$

ist. Andererseits wird u_α innerhalb K durch das Poissonsche Integral dargestellt:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\alpha^{(K)} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{\bar{\alpha}}^{(K)} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi \qquad (21) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta_\alpha \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi. \end{aligned}$$

Fassen wir nun einen bestimmten inneren Punkt: (r, θ) von K ins Auge und halten wir diesen fest, so konvergiert der Integrand des letzten Integrals, als Funktion von ψ und α aufgefaßt, wegen (20) nebst der Relation:

$$0 \leqq \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2} \leqq \frac{a + r}{a - r}$$

gleichmäßig gegen 0, wenn α dem Werte $\bar{\alpha}$ zustrebt. Daher nähert sich dieses Integral dem Wert 0, während das vorhergehende gar nicht von α abhängt, und es ergibt sich sonach:

$$(22) \qquad u_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{\bar{\alpha}}^{(K)} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi.$$

Rechter Hand steht aber eine im Kreise K harmonische Funktion. Wir haben also gezeigt, daß die Grenzfunktion $u_{\bar{\alpha}}$ im Punkte A harmonisch ist. Da nun aber A ein beliebiger innerer Punkt von S war, so ist der Beweis des ersten Teils des Satzes hiermit erbracht.

Zur Begründung des zweiten Teils gehen wir von der Bemerkung aus, daß in der Formel (21) unter dem Integralzeichen differentiiert werden darf. Dabei nähert sich das letzte Integral dem Werte 0, wie eine ähnliche Überlegung wie vorhin ergibt, und zwar ist die Konvergenz für alle Punkte P: (r, θ) eines kleineren Kreises K' vom Radius r', wo $r < r' < a$ ist, eine gleichmäßige. Das zweitletzte Integral hängt wieder nicht von α ab, es stellt aber, wie man mit Rücksicht auf (22) sofort erkennt, die betreffende Ableitung von $u_{\bar{\alpha}}$ vor, und hiermit sind wir also am Ziele.

Bei dem obigen Beweise haben wir von folgendem leicht zu begründenden Satze Gebrauch gemacht: Konvergiert ein unendlicher Prozeß in der Umgebung eines jeden Punktes eines abgeschlossenen Bereiches gleichmäßig, so konvergiert er auch im ganzen Bereiche gleichmäßig; vgl. Kap. 1, § 11.

1. Zusatz. *Der vorstehende Satz bleibt auch dann noch bestehen, wenn man nur verlangt, daß u_α im Inneren von S harmonisch sei und in jedem Bereiche Σ, der nebst seinem Rande innerhalb S liegt, gleichmäßig konvergiere.*

Wir wollen noch die Formulierung des Satzes für den besonderen Fall einer unendlichen Reihe hinzufügen.

Reihensatz. *Konvergiert eine Reihe harmonischer Funktionen:*

$$u_1 + u_2 + \cdots$$

in einem bestimmten Bereiche gleichmäßig[1]*), so stellt sie eine harmonische Funktion vor. Sie läßt sich überdies beliebig oft gliedweise differentiieren, und zwar konvergiert die Reihe der Ableitungen, welche ja auch harmonisch sind, ebenfalls gleichmäßig in jedem Bereiche Σ, welcher nebst seinen Randpunkten ganz innerhalb S liegt.*

Der Satz ist das Analogon des 6. Satzes von Kap. 7, § 5 und gestattet auch, wie jener, einen Schluß auf das Verhalten der durch ein bestimmtes Integral definierten Funktion. Wir können sagen:

2. Zusatz. *Ist $u = f(x, y, t)$ eine stetige Funktion der drei unabhängigen Variabelen x, y, t, wo der Punkt (x, y) in einem Bereiche S liegt und t ein beliebiger Punkt des Intervalles $a \leqq t \leqq b$ ist, und verhält sich u außerdem, für jeden festen Punkt t jenes Intervalls, harmonisch in S, so stellt das Integral:*

$$\int_a^b f(x, y, t)\, dt$$

eine in S harmonische Funktion vor. Im übrigen läßt sich das Integral unter dem Integralzeichen differentiieren.

Beide Teile des Satzes beweist man leicht, indem man einen willkürlichen innern Punkt P des Bereiches S herausgreift und einen kleinen Kreis K um ihn legt. Für die im Innern von K gelegenen Punkte (x, y) und für alle Werte von t hat man dann:

$$f(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\psi - \theta) + r^2}\, d\psi .$$

Hieraus folgt aber unter Umkehrung der Integrationsfolge, daß

$$\int_a^b f(x, y, t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\psi - \theta) + r^2}\, d\psi ,$$

wo

$$\Phi = \int_0^{2\pi} f(X, Y, t)\, dt$$

ist. An dieser Darstellung liest man nun den Beweis sofort ab.

---

1) Der Satz gilt auch unter den Voraussetzungen des Zusatzes.

12. Satz. Harnackscher Satz.[1]) *In einem Bereiche S sei eine unendliche Folge harmonischer Funktionen $u_1, u_2, \cdots$ gegeben, wofür*

$$u_n \leqq u_{n+1}$$

in jedem Punkte von S ist. Außerdem soll u_n in einem inneren Punkte A von S einem Grenzwerte zustreben, wenn $n = \infty$ wird. Dann konvergiert u_n in jedem abgeschlossenen, ganz innerhalb S gelegenen Bereiche gleichmäßig.

Setzen wir zuvörderst:

$$(23) \qquad \begin{aligned} u_n &= u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) \\ &= w_1 + w_2 + \cdots + w_n. \end{aligned}$$

Dann ist nach Voraussetzung:

$$w_n \geqq 0, \qquad n > 1.$$

Um A wollen wir einen Kreis legen, welcher keinen Randpunkt von S im Inneren oder auf seiner Begrenzung enthält, und dann w_n in demselben vermöge des Poissonschen Integrals darstellen:

$$w_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_n \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi.$$

Nehmen wir noch die beiden Relationen hinzu:

$$0 \leqq \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2} \leqq \frac{a+r}{a-r}, \qquad r < a;$$

$$M_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_n\, d\psi,$$

wo M_n den Wert von w_n in A bedeutet, so finden wir hieraus mit Rücksicht auf die Beziehung $W_n \geqq 0$:

$$w_n \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_n \frac{a+r}{a-r}\, d\psi = M_n \frac{a+r}{a-r}.$$

Darin liegt aber der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (23)

1) Harnack, ibid.

für die Punkte des Kreises $r \leqq R < a$, weil dort

$$w_n \leqq M_n \frac{a+R}{a-R}$$

ist und die Reihe positiver Glieder ΣM_n ja konvergiert.

Um den Beweis nun allgemein zu erbringen, genügt es offenbar zu zeigen, daß die Reihe (23) in der Umgebung eines jeden inneren Punktes P von S gleichmäßig konvergiert. Dies geschieht, wie folgt. Man verbinde A mit P durch eine ganz innerhalb S verlaufende Kurve, welche dann nach der Art und Weise von Kap. 9, § 1 mit übereinander greifenden Kreisen bedeckt werden soll. Dem Vorausgeschickten zufolge konvergiert dann die Reihe (23) sukzessive in jedem dieser Kreise, und daher auch insbesondere im Punkte P. Mithin konvergiert sie gleichmäßig in der Umgebung von P.

§ 5. Fortsetzung: dritte Gruppe, auf einer Reihenentwicklung fußend.

Es fehlt uns noch einer der grundlegenden Sätze in der Entwicklung der Theorie des logarithmischen Potentials, nämlich derjenige von der Eindeutigkeit der harmonischen Fortsetzung. Dieser Satz beruht darauf, daß eine harmonische Funktion, welche in einem zweidimensionalen Teile ihres Bereiches verschwindet, dann überall im Bereiche verschwinden muß.[1] Zum Beweise des letzteren Satzes bedient man sich einer Reihenentwicklung, welche aus dem Poissonschen Integrale ebenso abgeleitet wird, wie die Cauchy-Taylorsche Reihe aus der Cauchyschen Integralformel.

Wir wenden uns jetzt zur Aufstellung dieser Reihenentwicklung und gehen dabei vom Faktor

$$\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2}$$

jenes Integranden aus, welchen wir hiermit nach aufsteigenden Potenzen von r entwickeln wollen. Führt man hierzu $r/a = x$, $\theta - \psi = \varphi$ ein und setzt man die Reihe:

1) Gauß, *Allgemeine Lehrsätze*, usw., 1839, Nr. 20; Riemann, *Dissertation*, 1851, Nr. 11. Der Beweis beruht auf dem Mittelwertsatz und erledigt nicht alle Fälle.

Wegen der Beziehung des Poissonschen Integrals zur Reihenentwicklung vgl. man die ursprüngliche Poissonsche Abhandlung, *Journ. Éc. polytech.*, Cah. 18 (1820).

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

an, so kommt durch Ausmultiplizieren und Vergleich der Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 2 \cos \varphi \\
a_2 &= 4 \cos \varphi \cos \varphi - 2 = 2 \cos 2 \varphi \\
a_3 &= 4 \cos \varphi \cos 2 \varphi - 2 \cos \varphi = 2 \cos 3 \varphi \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n &= 4 \cos \varphi \cos (n-1) \varphi - 2 \cos (n-2) \varphi = 2 \cos n \varphi.
\end{aligned}$$

Hiermit haben wir folgende Entwicklung für den Integranden des Poissonschen Integrals erhalten:

$$(1) \qquad U \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2} = U + 2U\left(\frac{r}{a}\right) \cos(\theta - \psi) + 2U\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2(\theta - \psi) + \cdots.$$

Dabei konvergiert die Reihe gleichmäßig für alle Werte von θ, ψ und r, wofür nur $0 \leqq r \leqq r_1 < a$ ist.[1]) Durch gliedweise Integration entsteht daraus die in Aussicht genommene Reihenentwicklung der Funktion u.

Indem wir das Voraufgehende zusammenfassen und im Anschlusse an den Reihensatz des vorhergehenden Paragraphen, S. 652, noch ergänzen, können wir sagen:

1. Satz. *Sei u eine in einem Bereiche S harmonische Funktion, und sei O ein innerer Punkt von S. Dann läßt sich u in folgende Reihe entwickeln:*

$$(2) \qquad u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta],$$

wo

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} U \cos n\psi \, d\psi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} U \sin n\psi \, d\psi.$$

---

1) Durch den Gebrauch komplexer Größen kann die Berechnung der Koeffizienten erleichtert werden, indem man die Funktion

$$\frac{ae^{\psi i} + z}{ae^{\psi i} - z}, \qquad z = re^{\theta i},$$

deren reeller Teil ja die zu entwickelnde Funktion bildet, nach aufsteigenden Potenzen von z entwickelt und dann den reellen Teil der Terme herausgreift.

Dabei konvergiert die Reihe und stellt die Funktion u in allen Punkten dar, die innerhalb des größten Kreises K um O liegen, welcher nur keinen Randpunkt von S in seinem Innern einschließt. Insbesondere kann an Stelle von K die ganze endliche Ebene treten.

Des weiteren konvergiert die Reihe gleichmäßig in jedem endlichen Bereich, welcher nebst seinem Rande innerhalb des Konvergenzbereiches liegt, und sie läßt sich beliebig oft gliedweise differentiieren.

Die Darstellung ist außerdem eindeutig.

Da nämlich die einzelnen Glieder von (2) harmonisch sind, so folgt die gliedweise Differentiierbarkeit, sowie auch die gleichmäßige Konvergenz der also erhaltenen Reihen, direkt aus dem 11. Satze von § 4.

Um zuletzt noch die Eindeutigkeit der Entwicklung darzutun, sei

$$u = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta]$$

eine zweite Reihe, welche die Funktion u ebenfalls darstellt. Dann ist

$$0 = \frac{a_0 - a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [(a_n - a_n') \cos n\theta + (b_n - b_n') \sin n\theta]$$

eine Reihe, welche nach aufsteigenden Potenzen von r fortschreitet und identisch verschwindet. Mithin muß zunächst

$$a_0 - a_0' = 0, \qquad (a_n - a_n') \cos n\theta + (b_n - b_n') \sin n\theta = 0$$

sein, was θ auch immer für einen Wert haben möge, woraus dann folgt, daß alle Koeffizienten verschwinden. Oder man kann auch so wie bei den Fourierschen Reihen schließen, indem man mit $\cos m\theta$ bzw. $\sin m\theta$ multipliziert und, unter weiteren Voraussetzungen betreffend die Konvergenz der zweiten Reihe, in Bezug auf θ zwischen den Grenzen 0 und 2π integriert.

Hinsichtlich des ersten Beweises bemerken wir noch, daß man die Voraussetzungen wesentlich einschränken kann. Legt man nämlich θ einen bestimmten Wert θ_1 bei, so gehen beide Reihen in Potenzreihen in r über. Wir wollen nun annehmen, daß letztere Reihen für unendlich viele Werte $r = r_1, r_2, \ldots$ gleiche Werte haben, wobei die r_n mindestens eine Häufungsstelle haben sollen, welche zugleich innerhalb des Konvergenzintervalls beider Reihen liegt. Das hat dann zur Folge:

$$a_0 = a_0', \qquad (a_n - a_n') \cos n\theta_1 + (b_n - b_n') \sin n\theta_1 = 0.$$

Wenn nun dasselbe auch für einen zweiten Wert $\theta = \theta_2$ gilt, wobei sich θ_1 und θ_2 um kein rationales Vielfaches von π voneinander unterscheiden, so sind die Reihen identisch.

Aus der soeben erhaltenen Entwicklung leitet man noch eine Entwicklung nach homogenen harmonischen Polynomen in $x - x_0$, $y - y_0$ ab, indem man $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ als Polynome in $\cos\theta$, $\sin\theta$ ausdrückt und dann

$$r\cos\theta = x - x_0, \qquad r\sin\theta = y - y_0$$

einträgt:

(3)
$$u = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots.$$

Dabei zeigt der Index die Dimension des Polynoms an. Der Konvergenzbereich dieser Reihe fällt offenbar mit demjenigen der Reihe (2) zusammen und umfaßt also jedenfalls auch das Innere des Kreises K. Indem wir jetzt nach der Taylorschen Reihenentwicklung der Funktion u fragen, so ist klar, daß wir dieselbe erhalten werden, falls es erlaubt ist, in der Reihe (3) die Summe

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} C^{(n)}_{n-k,\,k}(x - x_0)^{n-k}(y - y_0)^k$$

in ihre einzelnen Glieder aufzulösen und diese dann als die Terme einer neuen Reihe anzusehen. Daß dies auch in der Tat angeht, erkennen wir aus dem Umstande, daß der Faktor des Poissonschen Integranden:

(4)
$$\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \psi) + r^2} = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2 - 2ax\cos\psi - 2ay\sin\psi + x^2 + y^2},$$

wo wir der Einfachheit halber $x_0 = y_0 = 0$ gesetzt haben, im Punkte O nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelt werden kann, und zwar konvergiert die damit gewonnene Reihe für die Umgebung des Punktes O und für alle Werte von ψ gleichmäßig. Was die Einzelheiten anbelangt, so wird man

$$z = 2a\cos\psi\, x + 2a\sin\psi\, y - x^2 - y^2$$

setzen und diesen Wert für z in der Reihe

$$\frac{1}{a^2 - z} = \frac{1}{a^2} + \frac{z}{a^4} + \frac{z^2}{a^6} + \cdots$$

eintragen. Sodann wird die neue Reihe mit dem Zähler von (4) multipliziert, worauf endlich die zuletzt gewonnene Reihe nach Mo-

nomen aufsteigender Dimension in x, y umgeordnet wird. Zur Rechtfertigung des Verfahrens sehe man die gebräuchlichen Lehrbücher über algebraische Analysis.[1]) Für eine gewisse Umgebung des Punktes O unterscheidet sich nun die Entwicklung (3) von der Taylorschen Reihenentwicklung der Funktion nur dadurch, daß die Terme gleicher Dimension in der Taylorschen Reihe hier in Klammern eingeschlossen erscheinen. Das Resultat wollen wir noch, wie folgt, zusammenfassen.

1. Zusatz. *Eine harmonische Funktion läßt sich nach dem Taylorschen Lehrsatze in eine unendliche Reihe entwickeln, und erweist sich somit als eine analytische Funktion*[2]) *der rechtwinkligen Koordinaten* (x, y).

Was den Konvergenzbereich der Reihe (2), sowie der Taylorschen Reihenentwicklung von u anbetrifft, so hat Bôcher[3]) gezeigt, daß das größte Kontinuum, in welchem (2) konvergiert, aus einem Kreise $r < A$ besteht. Die Reihe kann indessen auch noch auf der Verlängerung von Radien dieses Kreises konvergieren, braucht aber dort die Funktion nicht mehr darzustellen. Solche Strecken werden offenbar stets symmetrisch inbezug auf den Mittelpunkt des Kreises auftreten. Läßt u insbesondere eine harmonische Fortsetzung (vgl. S. 661) längs einer derartigen Strecke zu, so wird der Wert der Reihe doch mit demjenigen der Funktion übereinstimmen.

Andererseits konvergiert die Taylorsche Reihenentwicklung stets innerhalb desjenigen im Kreise $r < A$ einbeschriebenen Quadrats, dessen Diagonalen in den Koordinatenachsen liegen. Sonst konvergiert diese Reihe höchstens noch a) in Randpunkten des Quadrats, woselbst sie dann die Funktion darstellt; b) in Punkten der Koordinatenachsen, welche außerhalb des Quadrats liegen. Solche Punkte bilden stets Strecken, welche von den Ecken des Quadrats auslaufen und symmetrisch inbezug auf den Mittelpunkt desselben auftreten. In denselben braucht die Reihe die Funktion nicht mehr darzustellen.

---

1) Wir können indessen alle Rechnung vermeiden, indem wir bemerken, daß der Integrand des Poissonschen Integrals in einem bestimmten Bereiche $|x| < h$, $|y| < h$, $|\psi| < \infty$ stetig von den komplexen Argumenten x, y und der reellen Größe ψ abhängt, und daß er sich überdies für jeden festen Wert von ψ analytisch im Bereiche $|x| < h$, $|y| < h$ verhält. Da sich nun der 7. Satz von Kap. 7, § 5 auf Funktionen mehrerer Variabelen unmittelbar übertragen läßt, so ist hiermit der Beweis geliefert.

2) Vgl. die Definition auf S. 115.

3) Bôcher, *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 10 (1909), S. 271.

Wir gehen jetzt zur Entwicklung einer harmonischen Funktion im Punkte ∞ und zum Analogon der Laurentschen Reihenentwicklung über. Sei u eine in einem Bereiche S harmonische Funktion, und sei $\mathfrak{K}$ ein ganz innerhalb S gelegener Kreisring um den Punkt O: $r=0$. Spaltet man u dann nach dem 7. Satze von § 4 in die Summe zweier Funktionen:

$$u = u_{\mathfrak{J}} + u_{\mathfrak{A}}, \qquad u_{\mathfrak{A}} = k \log r + w,$$

so läßt sich $u_{\mathfrak{J}}$ nach dem Vorausgehenden in eine Reihe von der Form (2) entwickeln. Was nun w anbetrifft, so wollen wir die Ebene der Transformation $r = 1/r'$ unterwerfen. Hierdurch geht w in eine Funktion w' über, welche folgende Reihenentwicklung gestattet:

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} r'^n [a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta].$$

Indem wir jetzt durch Wiederholung dieser Transformation zur ursprünglichen Funktion w wieder zurückkehren, erhalten wir so für w eine Reihe von derselben Form wie (2) mit der einzigen Ausnahme, daß jetzt die Exponenten negative ganze Zahlen sind. Hieraus ergibt sich der

2. Zusatz. *Ist u in einem Kreisringe harmonisch, so läßt sich u dort in folgende Reihe entwickeln:*

$$u = k \log r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{5}$$

Insbesondere darf sich der Radius des inneren Randes auf 0 reduzieren, und der Radius des äußeren Randes kann auch unendlich werden.

Die Reihe konvergiert ferner gleichmäßig in jedem endlichen Bereiche, welcher nebst seinem Rande innerhalb des Konvergenzbereiches liegt, und sie läßt sich beliebig oft gliedweise differentiieren. Im übrigen ist die Darstellung eindeutig.

Die Werte der Koeffizienten kann man auch hier in ähnlicher Weise wie vorhin darstellen. Zu dem Zwecke wird man am einfachsten die Reihe (5) mit $\cos n\theta$ bzw. $\sin n\theta$ multiplizieren und dann über den Kreis $r = R$ integrieren, wo R eine beliebige zwischen dem inneren und dem äußeren Radius von $\mathfrak{K}$ gelegene Größe bedeutet. So kommt:

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} U \cos n\theta \, d\theta, \qquad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} U \sin n\theta \, d\theta, \qquad n \neq 0;$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\theta - k \log R,.$$

wo U den Wert von u auf dem Kreise $r = R$ bedeutet.

2. Satz.[1]) *In einem Bereiche S sei u harmonisch. Verschwindet u dann in allen Punkten eines in S enthaltenen Bereiches Σ, so verschwindet u überhaupt in jedem Punkte von S.*

Sei A ein innerer Punkt von Σ und B ein beliebiger Punkt von S. Wir wollen A mit B durch eine ganz innerhalb S verlaufende Kurve verbinden und diese dann durch eine endliche Anzahl ganz in S gelegener Kreise derart überdecken, daß der Mittelpunkt eines jeden derselben, vom zweiten ab, innerhalb des vorhergehenden liegt. Nun wird die Entwicklung (2) im ersten Kreise, dessen Mittelpunkt in A liegen möge, identisch verschwinden, weil dies eben für die Umgebung des Punktes A der Fall ist. Infolgedessen muß die Entwicklung im zweiten Kreise gleichfalls identisch verschwinden, u. s. w. f. Daher verschwindet u schließlich im Punkte B, und hiermit ist der Satz bewiesen.

Auf Grund dieses Satzes gestaltet sich nun das *Prinzip der harmonischen Fortsetzung* in der Theorie des logarithmischen Potentials genau ebenso, wie das Prinzip der analytischen Fortsetzung bei den analytischen Funktionen eines komplexen Arguments. Sind nämlich u_1 und u_2 zwei Funktionen, welche sich bzw. in zwei übereinandergreifenden Bereichen S_1 und S_2 harmonisch verhalten; ist ferner im gemeinsamen Teile dieser Bereiche $u_1 = u_2$, so erwächst aus u_1 und u_2 eine Funktion, welche in dem aus S_1 und S_2 zusammengesetzten Bereiche S harmonisch ist. Hieraus geht der folgende Satz hervor.

3. Satz. *Eine harmonische Funktion läßt sich über ein bestimmtes Randstück des Bereiches S hinaus, in welchem sie zunächst gegeben ist, höchstens auf eine Weise harmonisch fortsetzen.*

Zur vollständigen Definition einer harmonischen Funktion kann man hiernach von einer besonderen Bestimmung derselben in einem beschränkten Bereiche ausgehen und diesen Bereich dann durch An-

---

1) Man vgl. das am Eingange des Paragraphen stehende Zitat auf Gauß und Riemann.

gliederung benachbarter Bereiche schrittweise erweitern, was im allgemeinen zu einer Riemannschen Fläche führen wird. Setzt man das Verfahren fort, bis ein Bereich erhalten wird, welcher keiner derartigen Erweiterung mehr fähig ist, so gelangt man damit zum Begriffe einer *monogenen harmonischen Funktion.* Die nähere Ausführung der Einzelheiten verläuft hier den entsprechenden Entwicklungen bei den analytischen Funktionen eines komplexen Arguments genau parallel, und deshalb begnügen wir uns mit diesen kurzen Andeutungen.

Den Beweis des 2. Satzes hatte Riemann in § 11 seiner Dissertation im Anschlusse an Gauß, der den dreidimensionalen Fall behandelt hatte, mittels der Integralsätze zu führen gesucht. Seine Schlußweise ist jedoch deshalb lückenhaft, — um bloß einen Mangel zu erwähnen, — da er es als selbstverständlich ansieht, daß eine Kurve, längs deren eine harmonische Funktion u verschwindet, entweder a) ein Gebiet begrenze, in welchem u überall ein und dasselbe Vorzeichen bewahrt, oder aber b) innerhalb eines Bereiches liege, in welchem $u = 0$ ist; und daß fernerhin in letzterem Falle der Bereich, in welchem u verschwindet, jedenfalls an ein Gebiet stoßen müsse, in welchem u gleiches Vorzeichen bewahrt, es sei denn, daß u überall in S verschwindet. Es gibt indessen noch eine Möglichkeit, woran Riemann nicht dachte. Die Funktion u könnte nämlich in jeder Umgebung der betreffenden Linie, und zwar auf ein und derselben Seite derselben, das Vorzeichen wechseln, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$u = f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(y - \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right), \qquad x > 0;$$

$$f(x, y) = 0, \qquad x \leqq 0.$$

Diese Funktion ist nebst allen ihren partiellen Ableitungen stetig. Längs der Linie $x = 0$ verschwindet sie nebst der nach der Normale genommenen Ableitung $\partial u/\partial n = \partial u/\partial x$. Trotzdem stößt kein Gebiet an die Linie, in welchem u durchweg positiv oder durchweg negativ bliebe. Daß dieses Beispiel indessen für das Verhalten einer harmonischen Funktion doch nicht maßgebend ist, wird durch folgenden Satz evident.

4. Satz. *Sei u in einem Bereiche S harmonisch, ohne sich auf eine Konstante zu reduzieren, und sei O: (a, b) ein innerer Punkt von S. Dann besteht der Ort der in der Umgebung von O gelegenen Punkte,*

in denen

$$u(x, y) = u(a, b)$$

ist, aus einer oder mehreren regulären Kurven. Im letzteren Falle ist die Anzahl m dieser Kurven stets endlich, und zwar schneiden sie sich im Punkte O unter gleichen Winkeln.

Im allgemeinen wird mindestens eine der partiellen Ableitungen erster Ordnung im Punkte O von Null verschieden sein. Dann folgt der Satz unmittelbar aus dem Existenztheorem von Kap. 2, § 4, wobei also $m = 1$ ist.

Verschwinden dagegen beide Ableitungen erster Ordnung in O, so sei m die Ordnung der niedrigsten Ableitung, welche dort nicht verschwindet. Dann fehlen die Terme $1., 2., \ldots, (m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in der Reihenentwicklung (2), und es ist mithin

$$u - u_0 = \sum_{n=m}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta],$$

wo $u(a, b) = u_0$ gesetzt ist und a_m, b_m übrigens nicht beide verschwinden können. Demgemäß werden die Punkte der Umgebung von O, in welchen $u = u_0$ ist, dadurch erhalten, daß man die Gleichung:

$$f(r, \theta) = \sum_{n=m}^{\infty} r^{n-m} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = 0$$

nach r auflöst. Hierzu gibt nun jener Existenzsatz von Kap. 2, § 4 wieder die Mittel an die Hand. In der Tat sei θ_0 eine Lösung der Gleichung:

(6) $$a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta = 0.$$

Dann verschwindet

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = m(-a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta) + \sum_{n=m+1}^{\infty} n r^{n-m} [-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta]$$

im Punkte $r = 0$, $\theta = \theta_0$ sicher nicht, und infolgedessen gibt es eine eindeutige stetige, mit einer stetigen Ableitung versehene Funktion

$$\theta = \omega(r), \qquad -h < r < h; \qquad \omega(0) = \theta_0,$$

welche, in $f(r, \theta)$ eingetragen, diese Funktion identisch zum Verschwinden bringt.[1]) Da nun die sämtlichen Lösungen von (6) aus

1) Will man negative Werte von r vermeiden, so braucht man nur zu beachten, daß

$$f(r, \theta) = f(-r, \theta + \pi)$$

ist.

einer einzigen, θ_0, derselben vermöge der Formel:

$$\theta_k = \theta_0 + \frac{k\pi}{m}, \qquad k = 0, 1, \ldots m-1,$$

erwachsen, so ist hiermit die Existenz von m regulären Kurven, wie sie der Satz verlangt, nachgewiesen. Daß diese Kurven fernerhin alle diejenigen Punkte der Umgebung von O erschöpfen, in welchen $f(r, \theta)$ verschwindet, folgt ebenfalls aus dem bewußten Existenzsatze. In der Tat besagt dieser Satz, daß es zwei positive Größen h, k gibt, derart, daß alle Punkte (r, θ), wofür

$$|r| < h, \qquad |\theta - \theta_0| < k$$

ist und in welchen zugleich $f(r, \theta)$ verschwindet, auf der obigen Kurve $\theta = \omega(r)$ liegen. Hiernach liegt jede der m Kurven in einem Winkel:

$$\theta_0 - k < \theta < \theta_0 + k \qquad (|r| < h)$$

eingebettet, derart, daß kein weiterer Punkt sich dort befindet, in welchem $f = 0$ wäre. Ist hiermit die ganze Umgebung des Punktes O noch nicht erschöpft, so beachte man, daß in den übrigen Punkten derselben

$$|a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta| > G$$

bleibt, wo G eine feste positive Größe ist. Daher kann man eine Zahl ϱ so wählen, daß für jene Werte von θ und für $|r| < \varrho$ der Rest der $f(r, \theta)$ definierenden Reihe:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} r^{n-m} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta],$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als G bleibt, und damit ist ein Verschwinden von f in diesen Punkten ausgeschlossen.

In der komplexen Funktionentheorie haben wir betont, daß die *unendlichen* Reihen zur Herstellung der allgemeinen Grundlagen jener Theorie durchaus entbehrlich sind, man kommt schon mit den endlichen Reihen, dem Analogon des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, zum Ziele. Auch hier verhält sich die Sache genau ebenso. Anstatt den Poissonschen Integranden in eine unendliche Reihe zu entwickeln, genügt es, wenn man bloß eine endliche Anzahl Terme aus jener Reihe verwendet und den Rest dann explizite hinzufügt.

Aufgabe 1. Man zeige, daß es in der Umgebung eines Punktes, in welchem u harmonisch ist und $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ gleichzeitig ver-

schwinden, keinen weiteren Punkt gibt, in welchem diese Ableitungen beide verschwinden, sofern u nicht identisch verschwindet.

Aufgabe 2. Ist u in jedem Punkte eines regulären Kurvenstücks harmonisch und nimmt u dort einen konstanten Wert c an; verschwindet ferner $\partial u/\partial n$ längs dieser Kurve, so ist überall $u = c$.

Aufgabe 3. Die Umgebung eines Punktes O: (a, b), in welcher u den Voraussetzungen des Satzes genügt, und wobei auch $u(a, b) = 0$ sein soll, wird durch den Ort der Gleichung

$$u(x, y) = 0$$

in Bereiche zerlegt, in welchen u abwechselnd positiv und negativ ist.

§ 6. Harmonische Fortsetzung über eine analytische Kurve hinaus.

Wir wollen mit dem Falle beginnen, daß die Funktion u sich in einem, in der oberen Halbebene gelegenen, an die x-Achse stoßenden Bereiche S harmonisch verhält und im übrigen längs eines Stückes dieser Achse verschwindet. Sei P: (x, y) irgend ein innerer Punkt von S, und sei P': (x', y') sein Spiegelbild in Bezug auf die x-Achse; dann ist $x' = x$, $y' = -y$. Jetzt will ich die Funktion u in dem zu S symmetrischen Bereiche S' der unteren Halbebene, wie folgt, definieren: der Wert von u im Punkte P' soll demjenigen, welchen u im Punkte P annimmt, entgegengesetzt gleich sein:

$$u(x', y') = -u(x, y).$$

Die solchergestalt erweiterte Funktion u ist offenbar stetig im erweiterten Bereiche, besitzt fernerhin partielle Ableitungen in allen inneren Punkten von S', wobei insbesondere:

$$(1) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\text{in } P} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\text{in } P'}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\text{in } P} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\text{in } P'}$$

ist, und genügt endlich der Laplaceschen Gleichung, wenigstens in den letztgenannten Punkten. Ob sich u indessen auch in den Punkten der x-Achse harmonisch verhält, ist noch keineswegs klar, denn wir wissen ja nicht einmal, ob $\partial u/\partial y$ in jenen Punkten überhaupt existiert. Den nötigen Aufschluß hierüber gibt uns ein Satz von Schwarz.[1])

1) Schwarz, *Berliner Berichte*, 1870, S. 744 = *Werke*, Bd. 2, S. 149/151. Das Prinzip der Fortsetzung durch Symmetrie spielt in der Theorie der Minimalflächen eine wesentliche Rolle und tritt schon bei Riemann auf, *Abhandlungen der Göttinger Ges. der Wiss.*, Bd. 13 (1867), S. 1, § 13 = *Werke*, 1. Aufl., S. 296. Man vergleiche ferner *Enzyklopädie*, IIB 1, Nr. 20.

Sei A ein Punkt der x-Achse, welcher innerhalb des erweiterten Bereiches liegt, und sei ferner K ein ganz innerhalb dieses Bereiches gelegener Kreis um A. Dann setzt Schwarz das Poissonsche Integral an:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\vartheta-\varphi)+r^2}\,d\varphi,$$

wobei U den Wert von u auf dem Rande von K bedeutet. Das stellt eine in K harmonische Funktion u_1 vor, die vor allen Dingen längs des oberen Kreisrandes mit u übereinstimmt. Ich behaupte nun: u_1 fällt auch längs der reellen Achse mit u zusammen. In der Tat hat ϑ in jedem dieser Punkte den Wert 0 oder π, woraus denn folgt, daß der zweite Faktor des Integranden in zwei symmetrisch zur x-Achse gelegenen Punkten des Kreisrandes gleiche Werte erhält, während dem ersten Faktor entgegengesetzt gleiche Werte in diesen Punkten zukommen, und daher verschwindet das Integral. Hiermit ergibt sich daß wir in u und u_1 zwei Funktionen haben, welche beide im oberen, sowie im unteren Halbkreise harmonisch sind und überdies am Rande jener Halbkreise gleiche Werte annehmen. Infolgedessen müssen sie nach dem 4. Satze von § 3 im Innern der Halbkreise, und somit auch im Innern des Vollkreises miteinander übereinstimmen. Nun verhält sich aber u_1 harmonisch im Punkte A, und hiermit ist die gewünschte Ergänzung geliefert. Das Ergebnis fassen wir unter einer sogleich zu besprechenden Erweiterung desselben, wie folgt, zusammen.

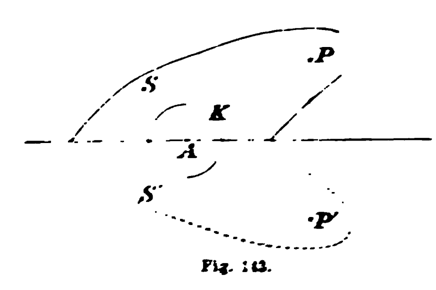


Fig. 143.

1. Satz. *Verhält sich u in einem Bereiche S, dessen Begrenzung zum Teil aus einem Stücke C einer geraden Linie besteht, harmonisch, und verschwindet u überdies längs C, so läßt sich u über C hinaus harmonisch fortsetzen. Dabei erhält die erweiterte Funktion entgegengesetzt gleiche Werte in je zwei Punkten P und P', welche in Bezug auf C symmetrisch zueinander liegen, während die konjugierte Funktion gleiche Werte in P und P' annimmt.*

Sollte nämlich C nicht von vornherein mit der reellen Achse zusammenfallen, so genügt eine Bewegung der Ebene dazu, um dies zu erzielen. Im übrigen darf S auch mehrblättrig sein und über die

Verlängerung von C, ja sogar noch (natürlich mit einem anderen Blatte) über C selbst hinübergreifen. Man wird dann zunächst bloß einen schlichten, an C stoßenden Teil von S, worauf also die vorstehenden Ausführungen direkt anwendbar sind, in Betracht ziehen, um hinterher diesen Teilbereich nebst seinem Spiegelbilde sich dehnen und eventuell den ganzen Bereich S nebst dessen Spiegelbilde umfassen zu lassen.

Den letzten Teil des Satzes beweist man ohne Mühe, indem man die Werte des über die Kurven L und L' erstreckten Integrals:

$$\int -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

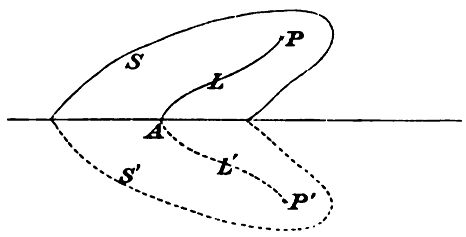


Fig. 144.

unter Berücksichtigung der Relationen (1) miteinander vergleicht.

Im Anschlusse an diese Resultate leiten wir noch einen weiteren Satz bezgl. einer harmonischen Fortsetzung ab. Zuerst aber eine

Definition. Eine reelle Funktion einer oder mehrerer reeller Variabelen heißt *in einem Punkte analytisch*, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelt werden kann. Sie heißt ferner *in einem Bereiche analytisch*, wenn sie in jedem Punkte des Bereichs eindeutig und analytisch ist. Endlich heißt sie *längs einer Kurve analytisch*, wenn sie eine analytische Funktion der Bogenlänge dieser Kurve ist. Für die gegenwärtigen Zwecke ist es nicht nötig, diese Definitionen weiter zu fassen.

2. Satz. *Verhält sich u in einem Bereiche S, dessen Begrenzung zum Teil aus einem Stücke C einer Geraden besteht, harmonisch und nimmt u außerdem längs C, höchstens von den Endpunkten abgesehen, analytische Randwerte an, so läßt sich u über C hinaus harmonisch fortsetzen.*

Sei C ein Stück der x-Achse, woran S von oben her stoßen möge. Die Randwerte von u längs C mögen mit $\varphi(x)$ bezeichnet werden. Ist nun x_0 ein beliebiger Punkt von C, der nur kein Endpunkt ist, so haben wir:

$$\varphi(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots, \qquad |x - x_0| < R_0.$$

Aus dieser Reihe will ich eine Funktion u_1 ableiten, welche sich im

Punkte $x = x_0$, $y = 0$ harmonisch verhält und überdies längs C mit $\varphi(x)$ übereinstimmt. Zu dem Zwecke ersetze ich durchweg[1])

$$(x - x_0)^n \quad \text{durch} \quad r^n \cos n\theta.$$

So kommt:

$$u_1 = c_0 + c_1 r \cos\theta + c_2 r^2 \cos 2\theta + \cdots.$$

Indem ich nun diese Funktion vom vorgelegten logarithmischen Potential u abziehe, erwächst so eine Funktion:

$$u - u_1,$$

welche im Halbkreise $0 \leqq r < R_0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ allen Forderungen des 1. Satzes Genüge leistet, und daher kann sie über die x-Achse hinaus fortgesetzt werden. Da u_1 diese Eigenschaft gleichfalls besitzt, so gilt dasselbe auch für die ursprüngliche Funktion u. Hiermit ist zunächst bewiesen, daß u in der Umgebung der genannten Punkte von C eine harmonische Fortsetzung über C hinaus gestattet. Hieraus schließt man weiter nach wohlbekannten Methoden[2]), daß u auch im Großen über die ganze Strecke C hinaus harmonisch fortgesetzt werden kann.

Wir schreiten jetzt zu einer weiteren Verallgemeinerung der vorhergehenden Resultate.

Definition. Eine Kurve

$$C: \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

heißt *analytisch in einem Punkte* $t = t_0$, wenn die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ beide in diesem Punkte analytisch sind und außerdem

$$|\varphi'(t_0)| + |\psi'(t_0)| > 0$$

ist. Die Kurve C heißt schlechtweg *analytisch*, wenn sie in jedem Punkte des Intervalls $\alpha \leqq t \leqq \beta$ analytisch ist. Damit eine Funktion längs C analytisch sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie eine analytische Funktion des Parameters t sei, denn die Bogenlänge

$$s = \int_\alpha^t \sqrt{\overline{\varphi'(t)^2} + \overline{\psi'(t)^2}}\, dt$$

1) Zur Motivierung dieses Schrittes betrachte man die komplexe Potenzreihe:

$$c_0 + c_1(z - x_0) + c_2(z - x_0)^2 + \cdots, \qquad |z - x_0| < R_0.$$

Setzt man hier $z - x_0 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ und trennt man Reelles und Imaginäres, so liefert der reelle Teil die in Aussicht genommene Funktion u_1.

2) Hierüber vergleiche man die Entwicklungen von § 7, sowie den Beweis des 4. Satzes dieses Paragraphen, wo ähnliche Überlegungen ins Einzelne durchgeführt sind.

ist eine analytische Funktion des Parameters, und umgekehrt ist t eine analytische Funktion von s.

3. Satz. *Verhält sich u in einem Bereiche S, dessen Begrenzung zum Teil aus einer analytischen Kurve C besteht, harmonisch, und nimmt u ferner längs C analytische Randwerte an, so läßt sich u über C hinaus harmonisch fortsetzen.*

Der Satz wird offenbar bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß die Kurve C nebst ihrer Umgebung auf ein Stück einer geraden Linie nebst ihrer Umgebung ein-eindeutig und konform abgebildet werden kann. Denn dadurch würde die Funktion u in eine Funktion des transformierten Bereiches übergehen, welche allen Forderungen des 2. Satzes gerecht wird. Daß dies nun auch in der Tat angeht, besagt der folgende

4. Satz. *Sei C eine analytische Kurve. Dann läßt sich die Umgebung von C auf die Umgebung einer geraden Strecke Γ ein-eindeutig und konform beziehen, dergestalt daß die Kurve C in die Strecke Γ übergeht.*

Die Kurve C, welche durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

dargestellt werde, darf über sich selbst hinüberschneiden, was zu einer mehrblättrigen Riemannschen Fläche für den Streifen führen würde. Der Einfachheit halber lassen wir indessen diesen Fall beiseite. Sei t_0 ein beliebiger Punkt des Intervalls (α, β): $\alpha \leqq t \leqq \beta$, und man setze die Taylorsche Entwicklung für φ, ψ an:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots,$$
$$\psi(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \cdots.$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit $i = \sqrt{-1}$ und addiert sie dann zur ersten, so erhält man eine Potenzreihe in $t - t_0$:

$$(2) \qquad z = x + yi = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i)(t - t_0) + \cdots,$$

welche auch für komplexe Werte von t einen Sinn hat, und zwar definiert sie eine analytische Funktion von t von folgender Beschaffenheit:

a) Diese Funktion bildet die Umgebung des Punktes t_0 der reellen Achse ein-eindeutig und konform auf die Umgebung des Punktes $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$ ab; denn ihre erste Ableitung hat in diesem

Punkte einen nicht verschwindenden Wert, $\varphi'(t_0) + i\psi'(t_0)$, da nämlich allgemein $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0$ ist. Wir wollen mit R_0 den Radius des größten Kreises um t_0 bezeichnen, welcher als derartige Umgebung dienen kann.

b) Der in der Umgebung des Punktes $t = t_0$ gelegene Teil der reellen Achse geht dabei in einen den Punkt (x_0, y_0) umfassenden Bogen von C über.

c) Der Teil der Umgebung von (x_0, y_0), welcher auf einer Seite von C liegt, geht in einen Bereich der t-Ebene über, welcher an das betreffende Stück der reellen Achse stößt und im übrigen entweder ganz in der oberen oder ganz in der unteren Halbebene liegt.

Den Gebrauch komplexer Größen kann man natürlich vermeiden, indem man im Anschlusse an $\varphi(t)$ die beiden Funktionen:

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \theta) &= a_0 + a_1 r \cos\theta + a_2 r^2 \cos 2\theta + \cdots,\\ \varphi_2(r, \theta) &= \qquad a_1 r \sin\theta + a_2 r^2 \sin 2\theta + \cdots,\end{aligned}$$

und ebenso im Anschlusse an $\psi(t)$ zwei Funktionen $\psi_1(r, \theta)$, $\psi_2(r, \theta)$ bildet, dann wird die Abbildung durch die Funktionen:

$$x = \varphi_1 - \psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta),$$

$$y = \varphi_2 + \psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta),$$

bewerkstelligt. Führt man hier noch rechter Hand rechtwinklige Koordinaten $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$ ein, so hat die Jacobische Determinante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ im Punkte $\xi = \eta = 0$ den nicht verschwindenden Wert $a_1^2 + b_1^2 = \varphi'(t_0)^2 + \psi'(t_0)^2$.

Hiermit ist im Kleinen für die Umgebung des Punktes (x_0, y_0) das erreicht, was der Satz im Großen für die ganze Kurve C verlangt. Nun überzeugt man sich leicht nach wohlbekannten Methoden, daß die Größe R_0 im ganzen Intervalle $\alpha \leqq t \leqq \beta$ eine positive untere Grenze R haben muß. Umgibt man also Γ mit dem Streifen, welcher durch einen Kreis vom Radius R ausgefegt wird, wenn dessen Mittelpunkt die Strecke Γ durchläuft, so wird jeder Lage desselben eine ein-eindeutige Beziehung von seinem Inneren auf die Umgebung des zugehörigen Punktes von C entsprechen. Die solchergestalt erhaltenen Punkte der z-Ebene bilden sonach einen C umgebenden Streifen,

welchen wir nun leicht geneigt sein könnten, für eine solche Umgebung von C anzusehen, wie der Satz sie verlangt. Doch würden wir damit einen Fehler begehen, denn dieser Streifen könnte sehr wohl noch im Großen über sich selbst hinübergreifen. Es kommt uns also jetzt darauf an zu zeigen, daß R in dem Falle stets durch eine kleinere positive Größe r ersetzt werden kann, wofür dies nicht eintritt.

Gesetzt, dem wäre nicht so. Sei $r_1, r_2, \cdots$ eine Reihe positiver gegen 0 abnehmender Größen, und man konstruiere die Streifen, $S_1, S_2, \ldots,$ welche durch Kreise mit den Radien $r_1, r_2, \ldots$ ausgefegt werden. Zu jedem Werte von n würde es dann einen Punkt z_n von S_n geben, welchem zwei verschiedene Punkte t'_n, t''_n entsprechen. Die Punkte t'_n haben offenbar eine auf Γ gelegene Häufungsstelle t', und ebenso die Punkte t''_n eine Häufungsstelle t''. Hieraus entsteht aber ein Widerspruch. Denn, wenn wir annehmen, daß t' und t'' getrennte Punkte sind, so entsprechen ihnen auch getrennte Punkte von C, deren Umgebungen daher nicht stets gemeinsame Punkte haben werden. Und ebensowenig können t' und t'' zusammenfallen, denn die Abbildung ist ja umkehrbar eindeutig im Kleinen.[1])

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß die Bedingung des 3. Satzes auch umgekehrt notwendig ist. Läßt sich nämlich eine harmonische Funktion über ein analytisches Randstück hinaus harmonisch fortsetzen, so nahm die Funktion schon analytische Randwerte an jenem Randstück an. Hieraus entnehmen wir eine einfache Weise, Funktionen eines komplexen Arguments mit natürlichen Grenzen herzustellen. So können wir beispielsweise längs der Peripherie eines Kreises eine stetige Folge nicht-analytischer Werte vorschreiben und dann das dazu gehörige Poissonsche Integral bilden. Man vergleiche übrigens das Beispiel von Kap. 9, § 5.

Definition. Seien P, P' zwei Punkte, welche symmetrisch zueinander in Bezug auf Γ liegen, und seien Q, Q' ihre Bildpunkte. Dann heißen letztere beiden Punkte *symmetrisch* in Bezug auf C.

1) Eine ähnliche Ergänzung wie die soeben besprochene hat man auch in der Variationsrechnung nötig, wo es sich um ein Feld von Extremalen handelt; vgl. Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, § 14. Auf diese Lücke hat Bolza aufmerksam gemacht, *Transactions Amer. Math. Soc.* Bd. 2 (1901), S. 424, Fußnote. Dabei ist aber seine Kritik, sofern sie sich auf meine Arbeit bezieht, nicht ganz zutreffend, denn es war mir ja an der betreffenden Stelle gar nicht darum zu tun, den Beweis ins Einzelne durchzuführen. In der Tat war mir die Lücke bei Kneser gleich nach dem Erscheinen seines *Lehrbuchs* im Winter 1899/1900 aufgefallen.

Nun gibt es aber verschiedene Abbildungen, welche den Bedingungen des vorstehenden Satzes genügen. Daher ist es von Wichtigkeit festzustellen, daß, wenn Q, Q' bei einer derselben symmetrisch sind, sie es dann auch bei jeder anderen sind. In der Tat wird eine beliebige dieser Abbildungen durch ein Paar konjugierter harmonischer Funktionen von x, y bewerkstelligt, wovon die eine längs C verschwindet. Bei der besonderen, der Definition zu Grunde liegenden Abbildung geht nun letztere Funktion in eine harmonische Funktion über, welche längs Γ verschwindet. Darum nimmt sie in P und P' entgegengesetzt gleiche Werte an, während der zu ihr konjugierten Funktion dort gleiche Werte zukommen. Dasselbe gilt also auch für Q, Q', und das wollten wir eben beweisen.

Ist C insbesondere ein Kreisbogen, so sind symmetrische Punkte konjugiert. Denn durch eine lineare Transformation der komplexen $z = x + yi$-Ebene auf die komplexe t-Ebene, wobei C in Γ übergeht, ist dies ja der Fall.

5. Satz. *Sei S ein Bereich, welcher an eine analytische Kurve C stößt, und sei S' ein zweiter, auch an C, aber von der anderen Seite her stoßender Bereich, dessen Punkte zu den Punkten von S in Bezug auf C symmetrisch liegen. Ist dann u harmonisch in S und verschwindet u längs C, so läßt sich u dadurch über C hinaus in S' harmonisch fortsetzen, daß man jedem Punkte Q' von S' den entgegengesetzt gleichen Wert zuordnet, welchen u im symmetrischen Punkte Q annimmt.*

Im Falle C insbesondere ein Kreisbogen ist, werden Q und Q' konjugiert sein.

An diesen Satz schließt sich noch der folgende Zusatz. Zur Erleichterung der Ausdrucksweise bedienen wir uns komplexer Größen.

Zusatz. *Es seien S und T zwei Bereiche der komplexen w- resp. z-Ebene, deren jeder zum Teil von einem Kreisbogen oder Geraden begrenzt ist, und die auch konform aufeinander bezogen sind, derart, daß die genannten Randstücke, — C und Γ mögen sie heißen, — einander entsprechen. Dann läßt sich die durch diese konforme Abbildung definierte analytische Funktion:*

$$w = f(z) \quad \textit{resp.} \quad z = \varphi(w)$$

über Γ resp. C hinaus analytisch fortsetzen, und zwar erhält die Funktion in zwei, symmetrisch zur betreffenden Begrenzung gelegenen Punkten Werte, welche durch zwei zur entsprechenden Begrenzung des abgebildeten Bereiches symmetrisch gelegene Punkte veranschaulicht werden.

Das Randstück Γ des Bereiches T mögen wir uns als einen Teil der reellen Achse denken, da dies ja stets durch eine lineare Transformation der z-Ebene zu erreichen ist. Demnach verhält sich der Koeffizient y des rein imaginären Bestandteils der Funktion $\varphi(w)$ harmonisch in S und nimmt außerdem längs C den Randwert 0 an. Infolgedessen läßt sich y über C hinaus harmonisch fortsetzen, indem man S an C spiegelt und y dann in den Punkten des neuen Bereiches S' Werte beilegt, welche seinen Werten in den symmetrischen Punkten von S entgegengesetzt gleich sind. Dabei erhält die zu y konjugierte Funktion $-x$ Werte in dem neuen Bereiche, welche mit ihren Werten in den symmetrischen Punkten von S völlig übereinstimmen, wie man sofort einsieht, indem man S und S' durch eine lineare Transformation auf zwei Bereiche konform abbildet, welche symmetrisch zur reellen Achse liegen. Hieraus entnehmen wir, daß S' auf das Spiegelbild T' von T in der reellen Achse der z-Ebene so abgebildet wird, wie der Satz es verlangt. Im übrigen wird der aus S und S' bestehende Gesamtbereich auf den aus T und T' sich zusammensetzenden Bereich umkehrbar eindeutig und konform bezogen.

§ 7. Über die Niveaukurven der Greenschen Funktion.

Es handelt sich in diesem Paragraphen um einen analytischen Beweis des folgenden Satzes.

Theorem. *Sei g die Greensche Funktion eines einfach zusammenhängenden Bereiches T. Dann besteht der Ort der Punkte, welche der Gleichung*

$$g = const.$$

genügen, aus einer einfachen regulären geschlossenen Kurve ohne Ecken, welche den Pol O von g in seinem Inneren umfaßt.

Dabei denkt man sich zunächst den Bereich T als endlich. Der Beweis gilt aber auch ohne wesentliche Modifikation für einen Bereich, dessen Rand sich ins Unendliche erstreckt. Und da nun jeder einfach zusammenhängende Bereich der erweiterten Ebene, dessen Rand nur aus mehr als einem Punkte besteht, durch eine lineare Transformation auf einen solchen bezogen werden kann, so gilt der Satz allgemein für jeden derartigen Bereich. Wir gehen jetzt zum Beweise über.

Sei Σ die Menge der Punkte von T, in denen

$$g > \mu$$

ist, wo μ eine beliebige positive Konstante bedeutet. Diese Punkte bilden ein einziges Kontinuum, welches O zum isolierten Randpunkte hat. Würde nämlich Σ in mehrere Kontinuen zerfallen, so müßte es eins davon geben, in welchem g ausnahmslos harmonisch ist, und an dessen Rande g außerdem den konstanten Wert μ annimmt. Daher müßte g auch im Inneren konstant bleiben, was zu einem Widerspruch führt.

Ferner besteht der Rand von Σ aus einem einzigen Randstücke nebst dem Punkte O. Im anderen Falle könnte man nämlich Randpunkte durch einen Rückkehrschnitt Γ einschließen, außerhalb dessen der Punkt O liegen würde. Da es nun in der Nähe eines Punktes, in welchem $g = \mu$ ist, stets Punkte gibt, in welchen $g < \mu$ ist, so müßten auch im Innern von Γ solche Punkte vorhanden sein, und diese bilden ein oder mehrere innerhalb Γ gelegene Kontinuen. Dies führt aber wieder, wie vorhin, zu einem Widerspruch.

Betrachten wir jetzt einen Randpunkt A von Σ, worin $g = \mu$ ist. Die übrigen Randpunkte der Umgebung von A bilden dann nach § 5, 4. Satz, nebst der nachstehenden 3. Aufgabe eine oder mehrere reguläre, alle durch den Punkt A gehende Kurven, welche diese Umgebung in Bereiche zerlegen, die abwechselnd in Σ liegen. Dementsprechend läßt sich wenigstens im Kleinen derjenige Teil von Σ, welcher in der Umgebung eines Randpunktes A liegt, in Bereiche σ (siehe Kap. 5, § 9) zerlegen. Wir wollen zeigen, daß dies auch im Großen zutrifft, dergestalt, daß der in Σ befindliche Teil der Umgebung von $g = \mu$ so genommen werden kann, daß er aus einer endlichen Anzahl von Bereichen σ besteht.

Zu dem Zwecke zerlegen wir die Ebene in Quadrate, wie in Kap. 5, § 3 des näheren auseinandergesetzt ist, wobei wir die Größe der Quadrate gleich von vornherein so beschränken wollen, daß einem Quadrate, welches O oder einen Randpunkt von T im Inneren oder auf seinem Rande enthält, kein Punkt von $g = \mu$ angehören kann. Wir beginnen mit einem Punkte A, durch welchen mehrere Kurven gehen, falls ein solcher vorhanden sein sollte, und nehmen dabei die Quadrate so klein, daß der Rand des Quadrats, worin A liegt, Stücke aus Σ schneidet, die entweder bereits Bereiche σ sind, oder doch sofort in solche verwandelt werden können.[1]) Da die Anzahl der-

1) In besonderen Fällen wird man sich nötigenfalls eines größeren, aus zwei oder vier der vorliegenden Quadrate zusammengesetzten Rechtecks bedienen.

artiger Punkte offenbar endlich ist, so kann man sie alle in der genannten Weise vorwegnehmen.

Wir wollen jetzt die übrigen Quadrate, welche Punkte von $g = \mu$ enthalten, in Betracht ziehen. Diese bilden einen abgeschlossenen Bereich[1]) S, in welchem sowohl g als $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$ stetig bleiben, und zwar hat mindestens eine dieser Ableitungen bei eventueller weiterer Verkleinerung der Quadrate in jedem vorgegebenen Punkte von S einen nicht verschwindenden Wert. Diesem Sachverhalt entsprechend gilt nun das Existenztheorem von Kap. 2, § 4 gleichmäßig für den Bereich S. Ausführlicher gesagt: *Es gibt zwei positive Konstanten, k und $h \leqq k$, von folgender Beschaffenheit. Sei (a, b) ein beliebiger, in S gelegener Punkt von $g = \mu$, und man fasse die beiden Bereiche*

$$\text{I.} \qquad |x - a| \leqq h, \quad |y - b| \leqq k;$$
$$\text{II.} \qquad |y - b| \leqq h, \quad |x - a| \leqq k,$$

ins Auge. Dann sind zwei Fälle möglich: entweder bilden die in I. *befindlichen Punkte von $g = \mu$ eine reguläre Kurve:*

$$y = \varphi(x),$$

wo $b = \varphi(a)$, und $\varphi(x)$ eine eindeutige, stetige mit einer stetigen Ableitung ausgestattete Funktion von x im Intervalle $|x - a| \leqq h$ ist; oder die in II. *befindlichen Punkte von $g = \mu$ bilden eine reguläre Kurve:*

$$x = \psi(y),$$

wo $a = \psi(b)$, und $\psi(y)$ eine eindeutige stetige, mit einer stetigen Ableitung ausgestattete Funktion von y im Intervalle $|y - b| \leqq h$ ist.[2])

Der Beweis dieses Satzes bietet durchaus keine Schwierigkeit und kann deshalb wohl übergangen werden.

Jetzt sind wir gleich am Ziele. Es bleibt nur noch übrig, die Quadrate des Bereiches S so klein zu nehmen, daß die Seitenlänge einer Masche des Netzes die Größe $h/2$ nicht übertrifft. Dann läßt sich nach der Methode von Kap. 5, § 9 dem in S gelegenen Teile des Ortes $g = \mu$ eine endliche Anzahl von Bereichen σ zuordnen, derart, daß jeder Bereich an diese Kurve stößt und in Σ liegt, während umgekehrt jeder Punkt der Kurve Randpunkt eines Bereiches σ

1) Ob S aus einem oder mehreren Stücken besteht, ist für die Folge gleichgültig.

2) Sollte der Punkt (a, b) insbesondere nahe beim Rande von S liegen, so daß der Bereich I oder II über S hinausgreift, so wird selbstverständlich von den außerhalb S gelegenen Punkten des betreffenden Bereiches abgesehen.

ist. Hiermit haben wir unter Heranziehung der früheren, an etwaige mehrfache Punkte des Randes stoßenden Bereiche eine endliche Anzahl von in Σ belegenen Bereichen σ erhalten, deren jeder zwei Nachbarn hat, und welcher übrigens den ganzen Ort $g = \mu$ besetzen. Daraus ergibt sich, daß der Ort $g = \mu$ sich aus einer endlichen Anzahl einfacher regulärer Kurven zusammensetzt, welche sich nunmehr zu einer einzigen regulären geschlossenen Kurve anordnen lassen. Letztere Kurve ist aber auch einfach. Denn sonst könnte man bereits aus einem Teile derselben eine einfache Kurve zusammensetzen, welche dann Σ notwendig umfassen müßte. Hieraus schließt man ferner auf die Existenz von Querschnitten, welche das Innere dieser Kurve durchsetzen und aus weiteren Teilen des Ortes $g = \mu$ bestehen. Das führt aber zu einem Widerspruch, und hiermit ist der Beweis geliefert.

Der gleichmäßige Teil des vorstehenden Beweises läßt sich auch auf andere Weise führen. Vor allem sieht man, daß man den Ort $g = \mu$ mit einem abgeschlossenen Bereiche umgeben kann, der weder an O noch an den Rand von T hinanreicht. Auf Grund dieser Tatsache beweist man dann, daß ein Stück von $g = \mu$, welches aus einem regulären Kurvenstücke besteht, stets gleichmäßig fortgesetzt werden kann, indem ein neuer derartiger regulärer Bogen von einer Länge $\geqq h$, wo h eine positive Konstante bedeutet, glatt angegliedert wird. Endlich bleibt noch der Nachweis zu führen, daß dieser Schritt nicht beliebig oft wiederholt werden kann, ohne den Ort $g = \mu$ zu erschöpfen.

Zusatz. *In keinem inneren Punkte von T verschwindet $\partial g / \partial n$, wo sich n auf die Normale der Kurve $g = const.$ bezieht.*

§ 8. Von der Beziehung der Potential- zur Funktionentheorie.

Auf Grund des Umstandes, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

sowohl für ein logarithmisches Potential als auch für eine analytische Funktion eines komplexen Arguments eine notwendige und hinreichende Bedingung bilden, erweisen sich die Theorien dieser beiden Funktionsklassen als im wesentlichen miteinander identisch.[1]) Diesen

1) Genauer gesagt hat jeder Satz der einen Theorie sein Gegenbild in der anderen Theorie. Dagegen hat jede Theorie ihre eigenen Methoden.

Gedanken stellte Riemann von vornherein an die Spitze seiner Theorie. In der Dissertation leitete er eine Reihe von Sätzen ab, die wir zum großen Teile in den voraufgehenden Paragraphen wiedergegeben haben, und wovon einer der wichtigsten noch in Kap. 14, § 1 gebracht wird. Dabei war es ihm indessen nicht in erster Linie um einen systematischen Aufbau der Theorie des logarithmischen Potentials als Grundlage für die Funktionentheorie zu tun, vielmehr suchte er vermöge der Methoden jener Theorie, welche er vor allen Dingen als die Dienerin dieser anstellte, neues funktionentheoretisches Gebiet zu erschließen. Demgegenüber haben wir uns die Aufgabe gestellt, eine selbständige Theorie der harmonischen Funktionen zu entwickeln, welche wir dann erst nachträglich mit der Theorie der Funktionen eines komplexen Arguments in Verbindung setzen, denn dadurch erhält man ein klareres Bild einer jeden der beiden Theorien für sich. Wenn wir nun die einzelnen Sätze dieser Theorien bzw. einander gegenüberstellen, so zeigt sich durchaus kein völlig ein-eindeutiges Entsprechen. Bald sind die Bedingungen des Satzes aus der einen Theorie die weiteren, bald verhält sich die Sache gerade umgekehrt. So verlangt beispielsweise der 8. Satz des § 4 nur, daß u, daß also bloß der eine Bestandteil der komplexen analytischen Funktion in der Umgebung des Punktes (a, b) eindeutig und endlich bleibe, während der analoge Riemannsche Satz (Kap. 7, § 6, 9. Satz) doch voraussetzt, daß auch die konjugierte Funktion erstens eindeutig, sodann noch endlich sei. In diesem Falle ist also der Satz der Potentialtheorie der allgemeinere. Andererseits fordert man in der Potentialtheorie sowohl die Existenz als auch die Stetigkeit der Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u bzw. der Ableitungen erster Ordnung von u und v nebst den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.[1]) Hingegen wird in der Funktionentheorie gezeigt, daß die bloße Existenz einer Ableitung der komplexen Funktion genügt, damit u und v stetige Ableitungen besitzen, — Satz von Goursat, Kap. 7, § 16.

1) Hierüber vergleiche man indessen Bôcher, der folgende Definition zu Grunde legt: Die Funktion u soll in einem Bereiche T harmonisch heißen, falls u dort eindeutig und nebst den partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig, und außerdem so beschaffen ist, daß

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

ist, wobei die Integration über einen beliebigen, nebst seinem Innern ganz innerhalb T gelegenen Kreis zu erstrecken ist; *Proceedings Amer. Acad. of Arts and Sci.,* Bd. 41, Nr. 26 (1906), S. 577.

Das klassische Problem der Potentialtheorie, eine harmonische Funktion vermöge ihrer Randwerte zu bestimmen (vgl. unten) dient dazu, das Maß der Willkür bei einer ähnlichen Bestimmungsweise komplexer analytischer Funktionen festzustellen. Wie ersichtlich, kann man den Wert des reellen Teils einer Funktion letzterer Klasse am Rande eines Bereiches beliebig vorschreiben, wodurch dann die Funktion bis auf eine rein imaginäre additive Konstante völlig definiert ist. Was die Randwerte des rein imaginären Bestandteils anbetrifft, so können wir nur noch über einen einzigen davon verfügen.

Hieran knüpfen wir noch die Bemerkung, daß wir auf Grund der Entwicklungen von § 5 imstande sind, die Cauchy-Taylorsche, sowie die Laurentsche Reihe direkt abzuleiten. Unter den Bedingungen des Satzes von Kap. 7, § 13 läßt sich nämlich der reelle Teil von $f(z)$ in die Reihe:

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

entwickeln. Die hierzu konjugierte Funktion v wird dann durch die Reihe:

$$v = C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$$

gegeben, wobei es nur noch übrig bleibt, das konstante Glied in geeigneter Weise zu bestimmen. Hieraus folgt:

$$u + vi = \frac{a_0}{2} + Ci + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n i)\, r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

was eben die Cauchy-Taylorsche Reihe ist.

Auch die Cauchysche Integralformel, Kap. 7, § 4, ergibt sich unmittelbar aus der Greenschen Formel. Wir wollen zunächst voraussetzen, daß der Bereich S einfach zusammenhänge, sowie daß der Rand von S aus einer einzigen analytischen Kurve bestehe, in deren Punkten die Funktion $f(z)$ immer noch analytisch bleibt. Sei h die zu g konjugierte Funktion. Dann ist

$$g + hi = -\log(t - z) + P(t, z),$$

wo P, bei festgehaltenem z, eine in allen Punkten des abgeschlossenen Bereiches S analytische Funktion von t ist.[1]) Wenden wir uns

1) Nach dem 3. Satze von § 6 gestattet nämlich g eine harmonische Fortsetzung über den Rand von S hinaus. — Wegen des Existenzbeweises für g vergleiche man Kap. 14, §§ 4, 5.

jetzt zur Integralformel:

$$f(z) = u + vi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t - z}$$

und bemerken wir dabei, daß

$$\frac{1}{t - z} = \frac{\partial \log (t - z)}{\partial t} = -\frac{\partial (g + hi)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

ist, so finden wir zunächst:

$$u + vi = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_C f(t)\,\frac{\partial (g + hi)}{\partial t}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(t)\,\frac{\partial P}{\partial t}\,dt.$$

Hier verschwindet das zweite Integral rechter Hand nach dem Cauchyschen Integralsatze, Kap. 7, § 2. Was das erste Integral anbetrifft, so ist

$$\frac{\partial (g + hi)}{\partial t} = \frac{\partial (g + hi)}{\partial s}\,e^{-\tau i}, \qquad dt = e^{\tau i}\,ds,$$

wo τ den Winkel bedeutet, welchen die positive Tangente der Randkurve mit der positiven reellen Achse einschließt. Indem wir uns noch erinnern, daß

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{\partial g}{\partial n}$$

ist, und zugleich auch $f(t) = U + Vi$ einführen, so kommt:

$$u + vi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C (U + Vi)\frac{\partial g}{\partial n}\,ds,$$

worin dann die Greensche Formel mit enthalten ist.[1]) Und nun kann man umgekehrt von dieser letzten Formel ausgehen und also rückwärts zur Cauchyschen Integralformel hinaufsteigen.

Die Verallgemeinerung auf Bereiche, deren Rand aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven besteht, sowie auf mehrfach zusammenhängende Bereiche, bietet nun keine Schwierigkeit. Will man indessen zu allgemeinen regulären Randkurven übergehen, so ist die Kenntnis des Verhaltens der Ableitungen der Greenschen Funktion am Rande vonnöten. Hierüber existieren Untersuchungen von Kellog, *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 9 (1908), S. 39 und 51; Bd. 13 (1912), S. 109.

---

1) Diese Herleitung des Zusammenhangs zwischen den beiden Formeln entnehme ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Morera.

Wir wollen diesen Paragraphen noch mit einem besonderen Satze schließen, welcher an und für sich nicht ohne Interesse sein dürfte.

Satz. *Genügt eine rationale Funktion $R(x, y)$ der Laplaceschen Gleichung: $\Delta R = 0$, und bildet man die dazu gehörige komplexe analytische Funktion:*

$$f(z) = R + i \int_{(a,\, b)}^{(x,\, y)} -\frac{\partial R}{\partial y}\, dx + \frac{\partial R}{\partial x}\, dy + Ci,$$

so ist diese eine rationale Funktion der komplexen Variabelen $z = x + yi$.

In der Tat erweist sich zunächst die Ableitung:

$$f'(z) = \frac{\partial R}{\partial x} - i\,\frac{\partial R}{\partial y}$$

als eine rationale Funktion von x und y. Setzt man

$$R(x, y) = \frac{G(x, y)}{\Gamma(x, y)},$$

wo G und Γ teilerfremde Polynome sind, so erkennt man leicht, daß die reellen Nullstellen von Γ nur isoliert auftreten können. Denn sonst gäbe es eine analytische Kurve der z-Ebene, längs deren $f(z) = \infty$, also $1/f(z)$ verschwände, und daher müßte $1/f(z)$ identisch null sein. Hiernach kann R, und mithin auch $f(z)$, sowie endlich $f'(z)$ nur isolierte Singularitäten haben. Wir schließen ferner aus dem Vorausgeschickten, daß die eindeutige Funktion $f'(z)$ höchstens Pole hat. Die einzigste übrige Möglichkeit wäre nämlich eine wesentliche singuläre Stelle. Dann müßte aber die Gleichung $f'(z) = C$ bei passender Wahl von C unendlich viele Wurzeln haben (vgl. Kap. 7, § 6, 9. Satz), was hier zum Schlusse führt, daß $f'(z)$ identisch gleich C wäre. Hiermit ergibt sich, daß $f'(z)$ eine rationale Funktion von z ist, und da nun endlich R rational ist, so können sich bei der Integration keine logarithmischen Glieder einstellen.

Vierzehntes Kapitel.

Konforme Abbildungen und die Uniformisierung analytischer Funktionen.

§ 1. Über die konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereiches auf einen Kreis.

In seiner Dissertation sprach Riemann den Satz aus, daß zwei beliebige einfach zusammenhängende Bereiche ein-eindeutig und konform aufeinander abgebildet werden können. Sein Beweis stützt sich auf das sogenannte Dirichletsche Prinzip, worauf wir noch im folgenden Paragraphen zurückkommen werden. Es genügt offenbar zu zeigen, daß ein beliebiger derartiger Bereich T, den wir uns in der z-Ebene gelegen denken wollen, auf den Einheitskreis K der w-Ebene als Normalbereich konform bezogen werden kann. Dabei gibt es zweierlei Fragestellungen, je nachdem man verlangt,

A) daß der Rand von T aus einer einfachen geschlossenen Kurve bestehe, und daß der Bereich T nebst dem Rande ein-eindeutig und stetig, und im Innern konform auf den abgeschlossenen Kreis K, oder nur

B) daß das Innere von T ein-eindeutig und konform auf das Innere von K bezogen werden soll.

Wir beschränken uns zunächst auf Fall A) und setzen dabei voraus, daß T endlich, sowie daß der Rand von T regulär sei, d. h. daß ein Bereich S vorliege. Behufs der Untersuchung wollen wir vorerst einige notwendige Bedingungen herleiten. Indem wir also das Problem als gelöst voraussetzen, bezeichnen wir mit

$$w = f(z)$$

die Funktion, welche die Abbildung besorgt. Dabei soll $z = 0$ in $w = 0$ übergehen: $f(0) = 0$.

a) Wir wollen

$$f(z) = z\varphi(z), \qquad \varphi(0) = f'(0)$$

setzen. Dann haben wir in $\varphi(z)$ eine in S analytische Funktion von z, welche dort wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit der Abbildung nirgends verschwindet. Sei ferner

$$\varphi(z) = e^{P+Qi}.$$

Die hiermit eingeführte Funktion P ist offenbar eindeutig und stetig im abgeschlossenen Bereiche S, und verhält sich überdies harmonisch im Innern von S. Gleiches gilt auch von der konjugierten Funktion Q, sofern man ihr etwa im Punkte $z = 0$ eine besondere ihrer dort möglichen Bestimmungen beilegt. Im übrigen nimmt jetzt w folgende Gestalt an:

$$w = e^{\log r - P + (\theta - Q)i}.$$

b) Da wir auf der Peripherie von K

$$|w| = 1$$

haben, so muß die Funktion $\log r - P$ längs C verschwinden. Hiermit erweist sich diese Funktion als die negativ genommene Greensche Funktion des Bereiches S:

$$\log r - P = -g,$$

wobei wir künftighin von der Bedingung d), S. 631 absehen.

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, diese notwendigen Bedingungen umzukehren und somit den folgenden Satz zu beweisen.

Theorem. *Sei T ein beliebiger einfach zusammenhängender Teil der erweiterten Ebene, dessen Rand aus mehr als einem Punkte besteht, und seien ferner g, h die dazu gehörige Greensche Funktion resp. die zu g konjugierte Funktion. Dann bildet die Funktion*

$$w = f(z) = e^{-g-hi}$$

das Innere des Bereiches T ein-eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises K der w-Ebene ab.

Liegt T insbesondere im Endlichen, und besteht der Rand von T außerdem aus analytischen Kurven, so wird die Abbildung auch am Rande ein-eindeutig, stetig und, von etwaigen Ecken abgesehen, konform sein.

Wir setzen zunächst voraus, daß T im Endlichen liege, — oder aber, wenn dies nicht direkt durch eine lineare Transformation zu

erzielen ist, daß der Rand sich ins Unendliche erstrecke, — erlegen dem Rande aber weiter gar keine Bedingungen auf.

Nach den Entwicklungen von Kap. 13, § 7 stellt die Gleichung:

$$g = \mu,$$

wo μ einen positiven Parameter bedeutet, eine Schar regulärer geschlossener Kurven ohne Ecken oder mehrfache Punkte vor, welche das Innere von T, den Pol $z = 0$ allein ausgenommen, gerade ausfüllen. Dabei ist vor allem klar, daß die Kurve C: $g = \mu$ in eine auf dem Kreise

$$\Gamma: \qquad |w| = e^{-\mu}$$

befindliche Menge des Bereiches K übergeführt wird. Wir wollen jetzt weiterhin zeigen, daß die Punkte der beiden Mengen C und Γ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. In der Tat ist, sofern sich die Differentiation nach s auf die positive Tangente, diejenige nach n auf die innere Normale bezieht,

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{\partial g}{\partial n}, \qquad -h = -h_0 + \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds.$$

Nun ist aber innerhalb C $g > \mu$. Daher kann die nach der inneren Normale genommene Ableitung $\partial g/\partial n$ jedenfalls nicht negativ sein. Nach dem Zusatz von Kap. 13, § 7 kann diese Ableitung aber auch nicht verschwinden, woraus denn folgt:

$$\frac{\partial g}{\partial n} > 0.$$

Da nun

$$\operatorname{arc} w = -h$$

ist, so erkennen wir, daß, wenn der Punkt (x, y) die Kurve C in positivem Sinne durchläuft, dann der Bildpunkt w auf dem Kreise Γ ebenfalls in positivem Sinne stetig fortrückt. Endlich erhellt aus der Relation

$$-h = \theta + Q,$$

wo Q, wie vorhin schon bemerkt, eindeutig ist, daß $-h$ nach vollendetem Umlaufe gerade um 2π zunimmt, und hiermit ist die Richtigkeit der Behauptung dargetan.

Es hat sich also ergeben, daß die inneren Punkte der Bereiche T und K ein-eindeutig aufeinander bezogen sind. Da $f(z)$ außerdem in T analytisch ist und $f'(z)$ dort nicht verschwindet, — sonst

müßte ja $\partial g/\partial n = 0$ resp. $f'(0) = 0$ sein, — so ist die Abbildung im Inneren ausnahmslos konform.

Wir wenden uns jetzt zum Beweise des zweiten Teils des Satzes. Sei P ein gewöhnlicher Punkt eines analytischen Randstücks. Dann läßt g in der Nähe von P nach dem 3. Satze von Kap. 13, § 6 eine harmonische Fortsetzung über T hinaus zu; dasselbe gilt daher auch von h, und somit von der analytischen Funktion $f(z)$. Es ist ferner klar, daß $f'(z)$ im Punkte P nicht verschwinden kann, denn sonst müßten beide partiellen Ableitungen $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$ dort den Wert 0 haben, was dann zur Folge haben würde, daß die Kurve $g = 0$ einen mehrfachen Punkt in P hätte und somit das Innere von T beträte. Demgemäß wird die volle Umgebung von P auf die volle Umgebung des entsprechenden Punktes der Kreisperipherie ein-eindeutig und konform bezogen, derart, daß diese Abbildung mit der früheren innerhalb T bzw. K übereinstimmt, was insbesondere für die Stetigkeit, sowie für die konforme Eigenschaft der Abbildung am Rande bürgt.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß P ein Eckpunkt des Randes von T ist, in welchem zwei analytische Randstücke zusammenstoßen.[1]) Es handelt sich um den Beweis, daß h einen Randwert im Punkte P annimmt. Um P legen wir einen Kreis $\mathfrak{K}$, dessen Radius eine geeignete positive Größe nur nicht übertrifft, und nehmen dann auf dem Rande von T zwei Punkte α, β so an, daß die Bogen $P\alpha$, $P\beta$ beide ganz innerhalb $\mathfrak{K}$ liegen und nur den einen Punkt P gemeinsam haben. Wir zeichnen ferner die in α bzw. β mündenden Strömungslinien $h = h_\alpha$, $h = h_\beta$ $(h_\alpha > h_\beta)$ in der Umgebung dieser Punkte auf. Ihre Schnittpunkte mit der Niveaukurve $g = \eta$ mögen mit α', β' benannt werden.

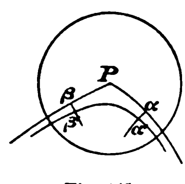


Fig. 145.

Dann läßt sich η so klein wählen, daß der ganze Bogen $\alpha'\beta'$ jener Niveaukurve innerhalb $\mathfrak{K}$ verläuft, weil nämlich g sich dem Randwerte 0 gleichmäßig anschließt. Im übrigen nimmt h längs des Bogens $\alpha'\beta'$ vom Werte h_α bis zum Werte h_β monoton ab. Hieraus erkennen wir, daß das Innere des Bereiches $\alpha P\beta\beta'\alpha'\alpha$ ein-eindeutig und konform auf den Bereich:

1) Zum Beweise ist nicht nötig, daß die Randstücke auch im Punkte P analytisch seien, vielmehr genügt es, wenn der Rand nur, wie folgt, beschaffen ist. Sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis um P, dessen Radius eine geeignete positive Größe nur nicht übertrifft. Dann soll es möglich sein, den Bereich T vermöge eines Querschnitts $\alpha\beta$ derart zu zerlegen, daß der eine Teil davon ganz in $\mathfrak{K}$ liegt, während die Bogen $P\alpha$, $P\beta$ in jedem von P verschiedenen Punkte analytisch sind und im übrigen nur den Punkt P gemeinsam haben.

$$e^{-\eta} < | w | < 1, \quad - h_\alpha < \operatorname{arc} w < - h_\beta$$

abgebildet wird.

Lassen wir nunmehr α an P heranrücken. Dabei nimmt h_α beständig ab und nähert sich somit einem Grenzwert h_P^-. In ähnlicher Weise nimmt h_β beständig zu, wenn β dem Punkte P zustrebt; der Grenzwert werde hier h_P^+ genannt. Und nun behaupte ich: es ist $h_P^- = h_P^+$. Sonst würde nämlich die Umkehrfunktion

$$z = \psi(w), \quad \text{wo} \quad w = f(z),$$

in jedem Punkte des Kreisbogens

$$| w | = 1, \quad - h_P^- < \operatorname{arc} w < - h_P^+$$

den Randwert z_P annehmen. Dann müßte aber $\psi(w)$ eine analytische Fortsetzung über diesen Bogen hinaus gestatten und somit längs einer innerhalb seines Definitionsbereiches befindlichen Kurve konstant bleiben. Infolgedessen würde $\psi(w)$ sich überhaupt auf eine Konstante reduzieren, und hiermit ist der Beweis erbracht.[1])

Wir wollen noch die Frage stellen, auf wie viele verschiedene Weisen die Abbildung möglich ist. Da sehen wir erstens, daß der Pol O der Greenschen Funktion innerhalb T willkürlich gewählt werden kann, wie wir später beim Existenzbeweise für diese Funktion mit aller Strenge darlegen werden; sodann können wir noch vermöge der in h enthaltenen additiven Konstante bewirken, entweder a) daß ein willkürlicher Randpunkt von T in einen bestimmten Punkt der Peripherie von K übergeführt wird; oder b) daß einer willkürlichen Richtung im Punkte O eine bestimmte Richtung im Mittelpunkte des Kreises K entspricht. *Dadurch wird aber auch die Abbildung völlig bestimmt:*

In der Tat sei

$$w = f(z).$$

$$w_1 = f_1(z)$$

eine zweite solche Abbildung. Dann wird durch Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen der Kreis K umkehrbar eindeutig und konform auf sich selbst abgebildet:

$$w_1 = \Psi(w),$$

und zwar so, I) daß sein Mittelpunkt in sich übergeht, während

1) Dieser Beweis rührt von Picard her, *Traité d'analyse*, Bd. 2, 10. Abschn., Nr. 7.

entweder II_a) ein bestimmter Punkt seines Randes oder II_b) eine bestimmte Richtung im Mittelpunkte ungeändert bleibt. Führen wir hier ähnlich wie vorhin

$$\Psi(w) = w\Omega(w) = e^{(\log\varrho + \mathfrak{P}) + (\chi + \mathfrak{Q})i}$$

ein, so finden wir zunächst, daß $\log\varrho + \mathfrak{P}$ am Rande von K verschwindet; denn ganz abgesehen davon, ob die Abbildung am Rande stetig ist oder nicht, erkennt man sofort, daß der Bildpunkt w_1 dem Rande doch immer näher rücken muß, wenn w dem Rande zustrebt. Daraus folgt aber, da $\log\varrho$ am Rande von K konstant ist, daß $\mathfrak{P}$ sich auf eine Konstante, und zwar die Null, reduzieren muß. Demnach muß auch $\mathfrak{Q}$ konstant sein, und hiermit ergibt sich:

$$\Psi(w) = Cw, \qquad C = e^{\alpha i}.$$

Endlich liefert sowohl II_a) als II_b) die Bestimmung $C = 1$, also ist

$$f_1(z) = f(z),$$

w. z. b. w.

Das letzte Resultat wollen wir doch noch durch einen expliziten Satz betonen.

Satz. *Die allgemeinste ein-eindeutige und konforme Abbildung eines Kreisinnern auf sich selbst wird durch eine lineare Transformation geleistet.*

Im übrigen läßt sich die Abbildung, falls sie stetig am Rande ist, auch dadurch eindeutig bestimmen, daß irgend drei getrennte Randpunkte von T in drei in gleichem Sinne aufeinander folgende, sonst aber willkürliche getrennte Randpunkte von K übergeführt werden.

Aufgabe. Wir haben in Kap. 13, § 1 eine elektrische Strömung erwähnt, wobei eine nichtleitende Lamelle auf beiden Seiten mit einer gleichmäßig leitenden Schicht überzogen wird und die beiden Elektroden eines galvanischen Elements an zwei übereinander liegenden Punkten der Schicht aufgesetzt werden. Dadurch entsteht eine Strömung, welche durch die Greensche Funktion g des Bereichs reguliert wird. Wir haben damals auch weiterhin den Grenzübergang in Betracht gezogen, wobei das genannte Punktepaar an den Rand heranrückt. Da zeigte sich ja, daß jene beiden logarithmischen Quellpunkte sich zu einem algebraischen Quellpaare erster Ordnung vereinigen.

Wir bringen jetzt in Vorschlag, den obigen physikalischen Vorgang dadurch geometrisch zu interpretieren, daß man die durch jene

Greensche Funktion definierte konforme Abbildung beim Grenzübergange verfolgt. Dabei muß sich selbstverständlich der Kreis K auch ändern; er möge in der oberen Halbebene liegen und die Abszissenachse im Anfange berühren. Wächst sein Radius dann in geeigneter Weise ins Unendliche, so erhalten wir im Grenzfalle eine konforme Abbildung der Lamelle auf die obere Halbebene.

Ganz abgesehen von einer strengen mathematischen Verfolgung des soeben geschilderten Grenzübergangs kann man sich nun die Aufgabe stellen, das Endresultat direkt zu prüfen, indem man notwendige und hinreichende Bedingungen für die konforme Abbildung eines durch analytische Kurven begrenzten Bereiches T auf die Halbebene herleitet. Wir empfehlen dem Leser diese Übung.

§ 2. Das Thomson-Dirichletsche Prinzip und die Existenztheoreme.

Im voraufgehenden Paragraphen haben wir die Existenz der Greenschen Funktion vorausgesetzt. Mit Rücksicht auf die Zerlegung:

$$-g = \log r + P,$$

ist das gleichbedeutend mit der Annahme der Existenz einer Funktion P, welche am Rande den Wert $-\log r$ annimmt und sich im Innern harmonisch verhält. Dies ist nun ein spezieller Fall einer allgemeinen Randwertaufgabe, welche man früher mit Hilfe des sogenannten *Dirichletschen Prinzips* zu lösen suchte, und welche auf folgendes Existenztheorem führt.

Existenztheorem. *Längs des Randes eines regulären Bereiches S sei eine stetige, sonst aber willkürliche Folge von Werten vorgeschrieben.*[1]) *Dann gibt es eine in S eindeutige Funktion, welche sich diesen Werten als Randwerten stetig anschließt und im Innern von S harmonisch verhält. Im übrigen ist die Funktion durch die genannten Bedingungen eindeutig bestimmt.*

Durch physikalische Anschauungen wird der Satz schon plausibel. Denkt man sich nämlich den Bereich S mit einer dünnen, gleichförmigen, Wärme leitenden Membran überzogen, deren Randpunkte durch eine geeignete Vorrichtung auf der vorgeschriebenen Temperatur erhalten werden, so leuchtet ja ein, daß ein stationärer Strömungs-

1) Auch gewisse Unstetigkeiten, insbesondere eine endliche Anzahl endlicher Sprünge, dürfen bei geeigneter Modifikation der Formulierung des Satzes zugelassen werden.

zustand angestrebt wird, derart, daß die zugehörige Temperaturverteilung im Innern gerade die gesuchte Funktion liefert, (vgl. Kap. 13, § 1).

Um derartige Existenzbeweise analytisch zu führen, hatten sich bereits Green und Gauß, und nach ihnen auch Thomson, einer Methode bedient, welche darin bestand, daß man sich ein Problem der Variationsrechnung aufstellt, dessen Lösung sich genau so formulieren läßt, wie das Problem, worum es sich handelt; und dann sah man es als selbstverständlich an, daß das Hilfsproblem doch eine Lösung besitzt. Allein die Variationsrechnung war bisher nicht im Stande, für die Existenz einer Lösung derartiger Probleme Gewähr zu leisten, und hiermit wurde die Methode hinfällig.

Im Anschlusse an das soeben erwähnte Verfahren versuchte denn auch Riemann, den oben ausgesprochenen Existenzsatz dadurch zu beweisen, daß er das Doppelintegral

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dS$$

über den Bereich S hin erstreckt, wobei u sich an die vorgeschriebenen Randwerte stetig ansetzen und im übrigen innerhalb S so beschaffen sein soll, daß das Integral einen Sinn hat. Da der Wert des Integrals niemals negativ ist, so hat er eine untere Grenze $I \geqq 0$. Und nun besteht die Schlußweise eben darin, daß man annimmt, es müßte notwendig eine derartige Funktion u geben, für welche das Integral den Wert I wirklich erreicht, und welche überdies stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt.[1] Für eine solche Funktion liefert freilich die Variationsrechnung als notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Aber die Existenz einer solchen Funktion u ist ja damit ebensowenig begründet, als die Existenz der Funktion, um welche es sich von vornherein handelte. Man hat die Fragestellung bloß verschoben.

Diese Schlußweise wurde 1847/48 von Thomson angewandt und findet sich hernach in Dirichlets Vorlesungen. Riemann bediente sich derselben, wie soeben erwähnt, in seiner Dissertation, sowie in den Abhandlungen über Abelsche Funktionen, um die Existenz der Greenschen Funktion bzw. gewisser Funktionen auf einer vorgegebenen Riemannschen Fläche zu erschließen. In der letztgenannten

1) Man kommt allerdings mit weniger als der Stetigkeit dieser Ableitungen aus.

Arbeit bezeichnet er sie auch als „Dirichletsches Prinzip". Später machte Weierstraß auf den vorhin bezeichneten Mangel aufmerksam, worauf dann eine sichere Grundlage für die Riemannschen Existenzsätze durch die Untersuchungen von Neumann und Schwarz geschaffen wurde. Diese Autoren verwerteten gewisse schon von Murphy zu einem ähnlichen Zwecke verwendete kombinatorische Methoden, zu deren näherer Besprechung wir jetzt übergehen wollen.[1])

§ 3. Das alternierende Verfahren.[2])

Das kombinatorische Verfahren, wovon im voraufgehenden Paragraphen die Rede war, beruht auf zwei Sätzen, welche wir jetzt besprechen wollen. Bemerken wir vorab, daß die Randwertaufgabe sicherlich für jeden Bereich, welcher inkl. seines Randes ein-eindeutig und stetig, und im Innern konform, auf einen Kreis abgebildet werden kann, eine Lösung zuläßt, da sie ja für letzteren Bereich vermöge des Poissonschen Integrals erledigt wird. Hiermit haben wir gleich von vornherein eine große Klasse von Bereichen erhalten, wofür das Problem als gelöst gelten darf.

1. Satz. *Es seien S_1, S_2 zwei Bereiche, wofür sich die Randwertaufgabe von § 2 lösen läßt, und deren äußere Begrenzungen sich in einer endlichen Anzahl von Punkten unter nicht verschwindenden Winkeln schneiden. Dabei soll außerdem der zu S_1, sowie der zu S_2 gehörige Teil einer bestimmten Umgebung eines Schnittpunktes inkl. des Randes auf einen durch ein Stück einer geraden Linie begrenzten Bereich ein-eindeutig und stetig, und im Innern konform abgebildet werden können, derart, daß das zu S_1 resp. S_2 gehörige Randstück in die Gerade übergeht. Endlich sollen die beiden*

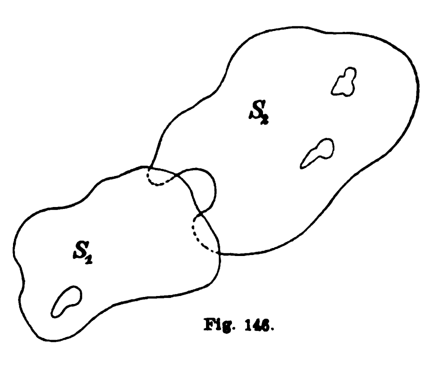


Fig. 146.

1) Es sei noch an dieser Stelle auf die Untersuchungen von Hilbert verwiesen, welche darauf ausgehen, die Existenz einer Lösung des Variationsproblems direkt nachzuweisen, und somit jene Lücke auszufüllen. Insbesondere vergleiche man Courant, *Göttinger Nachrichten*, 1910, S. 154, sowie *Math. Ann.*, Bd. 71 (1911), S. 145.

2) Murphy, *Elementary Principles of the Theories of Electricity, Heat, and Molecular Actions*, Bd. 1, 1823. Neumann, *Leipziger Berichte*, 21. April und 31. Okt. 1870; *Logarithmisches und Newtonsches Potential*, 1877, Kap. 5;

Bereichen gemeinsamen Gebiete sämtlich einfach zusammenhängen. Dann gestattet die Randwertaufgabe auch für denjenigen Bereich eine Lösung, welcher aus den Punkten von S_1 und S_2 besteht.

Wir denken uns die Bereiche S_1, S_2 zunächst als schlicht. Auf den Fall mehrblättriger Bereiche kommen wir dann in § 9 zurück.

Dem Beweise schicken wir folgende Überlegung voraus. Sei S ein Bereich, wofür wir die Randwertaufgabe zu lösen vermögen, und sei L ein Randstück dieses Bereiches, M der übrige Rand (vgl. Fig. 147). In den Endpunkten A: (x_0, y_0) und B: (x_1, y_1) von L soll der Rand zunächst analytisch sein. Dann gibt es eine Funktion u, welche im Innern von S harmonisch ist und, von den Punkten A und B abgesehen, längs L den Randwert 1, dagegen längs des übrigen Randes den Wert 0 annimmt. Soll u außerdem noch endlich bleiben, so ist u hierdurch eindeutig bestimmt.

In der Tat bilde man die Funktion

$$c_0 \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_0}{x - x_0} + c_1 \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

und greife man je eine innerhalb des Bereiches S eindeutige, stetige Bestimmung der Terme heraus. Die entsprechende Bestimmung der Funktion werde mit $f(x, y)$ benannt. Dann verhält sich $f(x, y)$ harmonisch in S und nimmt im allgemeinen stetige Randwerte an, nur in den Punkten A und B erleiden letztere einen Sprung, welcher mit c_0 resp. c_1 proportional ist. Durch passende Wahl dieser Konstanten können wir es daher so einrichten, daß derselbe beidemal gerade 1 beträgt, wobei sich $f(x, y)$ überdies dem größeren Wert stets längs des Bogens L nähern möge.

Jetzt wollen wir den Randpunkten von S folgende Werte beilegen: längs L sollen sie mit denjenigen von $f(x, y) - 1$, längs des übrigen Teils des Randes hingegen mit denjenigen von $f(x, y)$ übereinstimmen. Hiermit erhalten wir eine Folge von Randwerten, welche bei passender Festsetzung in den Punkten A und B durchweg stetig sind. Sei $\varphi(x, y)$ die denselben entsprechende Lösung der Randwertaufgabe. Dann haben wir in

$$u = f(x, y) - \varphi(x, y)$$

die in Aussicht genommene Funktion, und es bleibt nur noch übrig zu zeigen, daß sie auch eindeutig bestimmt ist.

Abelsche Integrale, 2. Aufl., 1884, Kap. 16—18. Schwarz, *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Bd. 15 (1870), S. 113, 272 = *Werke*, Bd. 2, S. 133. Vergleiche ferner *Enzyklopädie*, Burkhardt, II A 7b, Nr. 27, 28.

Sei also u_1 eine zweite derartige Funktion. Indem wir die Differenz:

$$u - u_1$$

bilden, wird klar, daß letztere Funktion im Inneren von S harmonisch ist und, höchstens von den Punkten A, B abgesehen, den Randwert 0 annimmt. Nun kann man sie in der Nähe von A über den Rand von S hinaus harmonisch fortsetzen, indem man ihr in symmetrischen Punkten entgegengesetzt gleiche Werte erteilt, vgl. den 3. Satz von Kap. 13, § 6. So kommt eine Funktion zu Stande, welche in der Nähe von A allen Forderungen des 8. Satzes von Kap. 13, § 4 gerecht wird, und daher nimmt sie auch in A den Randwert 0 an. Ähnliches gilt von B. Nach dem Zusatze des 3. Satzes von Kap. 13, § 3 erweist sie sich mithin als identisch null, w. z. b. w.

Das soeben erhaltene Resultat können wir nun nach zwei Richtungen hin erweitern. Erstens braucht der Rand in A und B nicht analytisch zu sein, es genügt schon, wenn er bloß in jener Nachbarschaft aus einer regulären Kurve mit einer gewöhnlichen Ecke[1]) besteht, vorausgesetzt nur, daß die Umgebung des betreffenden Punktes konform abgebildet werden kann, dergestalt, daß der Rand in ein Stück einer geraden Linie übergeht. Letztere Voraussetzung ist vor der Hand deshalb nötig, damit wir schließen können, daß die beim Beweise der eindeutigen Bestimmung in Betracht zu ziehende Differenz $u - u_1$ auch im Eckpunkte den Randwert 0 annimmt. Zweitens dürfen offenbar an Stelle des einen Bogens L mehrere getrennte Bogen $L_1, \dots L_n$ treten.

Fahren wir jetzt fort, indem wir zeigen, daß u in allen innern Punkten von S positiv und kleiner als 1 ist. Sei ε eine beliebig kleine positive Größe, und sei P ein willkürlicher Randpunkt. Dann erkennt man leicht, daß es eine gewisse Umgebung von P gibt, wofür

$$-\varepsilon < u < 1 + \varepsilon$$

bleibt, sofern der Punkt (x, y) innerhalb S liegt. Wäre nun etwa $u = a > 1$ in einem innern Punkte Q von S, so entwickele man S in Teilbereiche T_n nach dem Satze von Kap. 5, § 3. Am Rande eines jeden T_n $(n \geqq m)$ gibt es dann einen Punkt Q_n, in welchem $u > a$ ist. Die Punkte Q_n haben mindestens eine Häufungsstelle $\bar{Q}$ am Rande von S. Dies verstößt aber gegen das frühere Ergebnis, indem man $\varepsilon < a - 1$ setzt und als P den Punkt $\bar{Q}$ nimmt.

1) Auch Spitzen können zugelassen werden, sofern der Bereich S außerhalb derselben liegt.

Hiermit ist zunächst gezeigt, daß u den Wert 1 im Innern von S nicht überschreiten kann. Aus dem Satz vom Maximum und Minimum folgt aber weiter, daß u den Wert 1 im Innern auch nicht erreichen kann. In ähnlicher Weise beweist man, daß u im Innern von S positiv ist.

Wir wollen die Punkte A und B vermöge eines den Rand nicht berührenden Querschnitts C miteinander verbinden und den Wert der Funktion u auf C betrachten. Ich sage nun: *die obere Grenze q von u längs C ist positiv und kleiner als* 1: $0 < q < 1$. In der Tat nähert sich u sowohl in A als in B einem positiven Grenzwerte, der kleiner als 1 ist, wie aus der Definition dieser Funktion sofort erhellt. Darum kann man an den beiden Enden von C zwei Bogen abtrennen, wofür die obere Grenze von u sicherlich positiv und kleiner als 1 ist. Da bleibt noch ein abgeschlossener Bogen von C zurück, der innerhalb S liegt, und auf welchem u seine obere Grenze wirklich erreicht. Auch diese Größe muß indessen kleiner als 1 ausfallen, womit sich denn die Richtigkeit der Behauptung ergibt. Aus diesen Entwicklungen geht nun folgender Satz hervor.

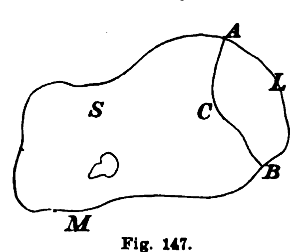


Fig. 147.

Hilfssatz. *Verhält sich* $\mathfrak{u}$ *im Inneren von* S *harmonisch, und nimmt* $\mathfrak{u}$ *fernerhin längs* M *inkl. der Endpunkte* A *und* B *den Randwert* 0, *längs* L *Randwerte an, welche dem absoluten Betrage nach eine Größe* $G \geqq 0$ *nicht übertreffen, so ist*

$$-qG \leqq \mathfrak{u}\,|_C \leqq qG.$$

Ist $G = 0$, so verschwindet $\mathfrak{u}$ identisch, und der Satz ist sicher richtig.

Ist G dagegen positiv, so bleibt sowohl $Gu - \mathfrak{u}$ als $Gu + \mathfrak{u}$ im Inneren von S durchweg positiv, wie eine der obigen ähnliche Überlegung ergibt, und es ist insbesondere für solche Punkte

$$0 < Gu\,|_C - \mathfrak{u}\,|_C, \qquad 0 < Gu\,|_C + \mathfrak{u}\,|_C,$$

also

$$0 < Gq - \mathfrak{u}\,|_C, \qquad 0 < Gq + \mathfrak{u}\,|_C.$$

Da diese letzten Ungleichungen offenbar auch für die Endpunkte von C gelten, so ist der Satz hiermit vollständig bewiesen.

Wir sind nunmehr in der Lage, den Beweis des Hauptsatzes in Angriff zu nehmen. Am Rande des aus S_1 und S_2 sich zusammen-

setzenden Bereichs S geben wir uns also eine stetige Folge von Randwerten U. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, daß S_1 und S_2 nur einen einzigen gemeinsamen Bereich haben. Derjenige Teil des Randes von S_1, welcher in S_2 liegt, werde mit L_1, der übrige Rand von S_1 mit M_1 benannt, und ähnlich für S_2, indem die Indizes 1, 2 durchweg vertauscht werden. Wie man sieht, läßt sich die Kurve L_2 als ein Querschnitt C_1 des Bereiches S_1, und ebenso L_1 als ein Querschnitt C_2 von S_2 auffassen. Sei q_1 bzw. q_2 der Wert der vorhin erklärten oberen Grenze q für diese beiden Kurven. Im übrigen möge noch die größere der beiden Zahlen q_1, q_2 schlechtweg mit q benannt werden.

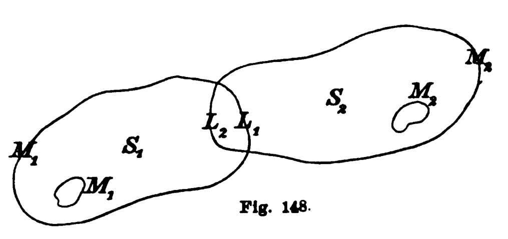


Fig. 148.

Wir stellen jetzt eine Reihe von Annäherungsfunktionen $u_1, u_3, \ldots$, sowie $u_2, u_4, \ldots$ auf, wobei sich die mit ungeradem Index behafteten u auf S_1, diejenigen mit geradem Index auf S_2 beziehen, und zeigen,

a) daß die Grenzfunktion von $u_1, u_3, \ldots$ eine in S_1 harmonische Funktion ist, welche in den Punkten von M_1 die vorgeschriebenen Randwerte U_1 annimmt;

b) daß die Grenzfunktion von $u_2, u_4, \ldots$ eine in S_2 harmonische Funktion ist, welche in den Punkten von M_2 die vorgeschriebenen Randwerte U_2 annimmt;

c) daß endlich diese beiden Grenzfunktionen in dem S_1 und S_2 gemeinsamen Bereiche miteinander übereinstimmen.

Um dem Beweise nun näher zu treten, so sollen vor allen Dingen die Funktionen $u_1, u_3, \ldots$ harmonisch in S_1, und $u_2, u_4, \ldots$ harmonisch in S_2 sein. Ferner soll

$$u_{2n+1}\,|_{M_1} = U_1, \qquad u_{2n}\,|_{M_2} = U_2$$

sein. Endlich möge u_1 längs L_1 eine willkürliche stetige, an die Randwerte U_1 in den Punkten A und B sich stetig anschließende Folge von Randwerten annehmen. Hiermit ist zunächst u_1 völlig bestimmt. Zur endgültigen Definition der weiteren u setzen wir fest:

A) $$u_{2n}\,|_{L_2} = u_{2n-1}\,|_{L_2}, \qquad u_{2n+1}\,|_{L_1} = u_{2n}\,|_{L_1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Wir untersuchen jetzt die Konvergenz der Funktionen u_{2n+1} und

u_{2n}. Behufs dessen schreiben wir:

(1) $$u_{2n+1} = u_1 + (u_3 - u_1) + \cdots + (u_{2n+1} - u_{2n-1}),$$

(2) $$u_{2n} \;= u_2 + (u_4 - u_2) + \cdots + (u_{2n} \;- u_{2n-2}),$$

und betrachten da näher den Wert des allgemeinen Gliedes $u_{2k+1} - u_{2k-1}$ resp. $u_{2k+2} - u_{2k}$ am Rande seines Bereiches S_1 bzw. S_2. Vor allem ist klar, daß

$$| u_{2k+1} - u_{2k-1} |_{M_1} = 0, \qquad | u_{2k+2} - u_{2k} |_{M_2} = 0$$

ist. Indem wir den größten Wert von $| u_3 - u_1 |$ längs L_1 mit H benennen, haben wir dann ferner auf Grund des obigen Hilfssatzes:

I_1) $$| u_3 - u_1 |_{L_1} \leqq H, \qquad | u_3 - u_1 |_{L_2} \leqq q\, H.$$

Andererseits ist unter nochmaliger Anwendung des Hilfssatzes nebst A):

I_2) $$| u_4 - u_2 |_{L_2} = | u_3 - u_1 |_{L_2}, \qquad | u_4 - u_2 |_{L_1} \leqq q^2 H.$$

Hiermit ist das alternierende Verfahren eingeleitet. Wir folgern nämlich weiter aus A) und I_2):

I_3) $$| u_5 - u_3 |_{L_1} = | u_4 - u_2 |_{L_1}, \qquad | u_5 - u_3 |_{L_2} \leqq q^3 H,$$

sowie dann:

I_4) $$| u_6 - u_4 |_{L_2} = | u_5 - u_3 |_{L_2}, \qquad | u_6 - u_4 |_{L_1} \leqq q^4 H,$$

und also schließlich allgemein:

I_{2n-1}) $$| u_{2n+1} - u_{2n-1} |_{L_1} = | u_{2n} - u_{2n-2} |_{L_1},$$
$$| u_{2n+1} - u_{2n-1} |_{L_2} \leqq q^{2n-1} H;$$

I_{2n}) $$| u_{2n+2} - u_{2n} |_{L_2} = | u_{2n+1} - u_{2n-1} |_{L_2},$$
$$| u_{2n+2} - u_{2n} |_{L_1} \leqq q^{2n} H.$$

Hieraus ergibt sich für die Reihen (1) und (2), daß

$$| u_{2n+1} - u_{2n-1} | \leqq q^{2n-2} H \quad \text{in } S_1 \text{ inkl. des Randes,}$$
$$| u_{2n+2} - u_{2n} | \leqq q^{2n-1} H \quad \text{„ } S_2 \text{ „ „ „}$$

ist. Infolgedessen konvergiert u_{2n+1} in S_1, sowie u_{2n} in S_2 gleichmäßig, und darum verhalten sich auch die Grenzfunktionen:

$$u^{(1)} = \lim_{n=\infty} u_{2n+1}, \qquad u^{(2)} = \lim_{n=\infty} u_{2n}$$

harmonisch in S_1, resp. in S_2. Ferner ist

$$u^{(1)}|_{M_1} = U_1, \qquad u^{(2)}|_{M_2} = U_2.$$

Letzten Endes folgt noch aus A), daß

$$u^{(2)}|_{L_2} = u^{(1)}|_{L_2}, \quad \text{sowie} \quad u^{(1)}|_{L_1} = u^{(2)}|_{L_1}$$

ist, worin liegt, daß in dem beiden Bereichen S_1 und S_2 gemeinsamen Gebiete $u^{(1)} = u^{(2)}$ ist. Hiermit ist der Beweis des Satzes vollständig geliefert.

Aufgabe. Sei S ein Bereich, wofür die Randwertaufgabe gelöst werden kann, und dessen Rand zum Teil aus einem analytischen Einschnitte besteht, vgl. Fig. 86. Man zeige, daß sich dann die Randwertaufgabe auch für denjenigen Bereich lösen läßt, welcher aus S durch Forthebung des Einschnitts entsteht.

2. Satz. *Seien S_1, S_2 wieder zwei Bereiche, wofür die Randwertaufgabe gelöst werden kann. Dabei soll indessen jetzt S_1 mehrfach zusammenhängen, während S_2 aus dem Innern einer Kurve C besteht, welche innerhalb S_1 verläuft und ein Randstück L_1 von S_1 umfaßt. Dann läßt sich die Randwertaufgabe für denjenigen Bereich lösen, welcher sich aus den Punkten von S_1 und S_2 zusammensetzt.*

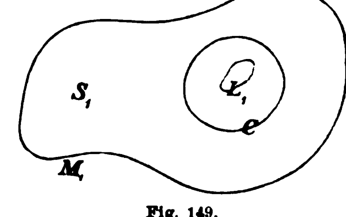


Fig. 149.

Es ist dies der Satz der sogenannten „gürtelförmigen Verschmelzung". In der Praxis läßt sich C meist als Kreis annehmen, wofür denn die Randwertaufgabe vermöge des Poissonschen Integrals gelöst wird. Die Entwicklungen sind hier den früheren analog, nur daß sich die Beweise etwas einfacher gestalten. Sei u eine Funktion, welche im Inneren von S_1 harmonisch ist und längs L_1 den Randwert 1, längs des übrigen Randes M_1 den Wert 0 annimmt. Dann springt sofort in die Augen, daß

$$0 < u|_C \leqq q < 1$$

ist. Hiermit sind wir im Stande, den hierher gehörigen Hilfssatz auszusprechen.

Hilfssatz. *Verhält sich* u *im Inneren von S_1 harmonisch, und nimmt* u *fernerhin längs M_1 den Randwert 0, längs L_1 Randwerte an,*

welche dem absoluten Betrage nach eine Größe $G \geqq 0$ nicht übersteigen, so ist

$$-qG \leqq u\,|_C \leqq qG.$$

Die Annäherungsfunktionen $u_1, u_3, \ldots; u_2, u_4, \ldots$ werden nun, wie folgt, definiert. Die mit ungeradem Index behafteten u sollen in S_1, die mit geradem Index in S_2 harmonisch sein. Die Funktion u_1 möge eine willkürliche stetige Folge von Randwerten längs L_1 annehmen, während $u_1\,|_{K_1} = U_1$ gesetzt werde. Sodann soll allgemein

a) $$u_{2n}\,|_C = u_{2n-1}\,|_C\,;$$

b) $$u_{2n+1}\,|_{K_1} = U_1, \qquad u_{2n+1}\,|_{L_1} = u_{2n}\,|_{L_1}$$

sein.

Es handelt sich jetzt um die Konvergenz der beiden Reihen:

$$u_{2n+1} = u_1 + (u_3 - u_1) + \cdots + (u_{2n+1} - u_{2n-1}),$$
$$u_{2n} \quad = u_2 + (u_4 - u_2) + \cdots + (u_{2n} \quad - u_{2n-2}).$$

Vor allem ist

$$u_{2k+1} - u_{2k-1}\,|_{K_1} = 0.$$

Indem wir den größten Wert von $|\,u_3 - u_1\,|$ längs L_1, ebenso wie früher, mit H benennen, finden wir dann:

I_1) $$|\,u_3 - u_1\,|_{L_1} \leqq H, \qquad |\,u_3 - u_1\,|_C \leqq qH.$$

Dagegen ist jetzt:

I_2) $$|\,u_4 - u_2\,|_C = |\,u_3 - u_1\,|_C, \qquad |\,u_4 - u_2\,|_{L_1} \leqq qH,$$

da wir nämlich von der in S_2 harmonischen Funktion $u_4 - u_2$ nur behaupten können, daß ihr Wert auf L_1 dem absoluten Betrage nach sicher nicht größer als ihr Wert am Rande C ist. Hiermit ist klar, wie sich die allgemeinen Relationen gestalten müssen:

I_{2n-1}) $$|\,u_{2n+1} - u_{2n-1}\,|_{L_1} = |\,u_{2n} - u_{2n-2}\,|_{L_1},$$
$$|\,u_{2n+1} - u_{2n-1}\,|_C \leqq q^n H;$$

I_{2n}) $$|\,u_{2n+2} - u_{2n}\,|_C = |\,u_{2n+1} - u_{2n-1}\,|_C,$$
$$|\,u_{2n+2} - u_{2n}\,|_{L_1} \leqq q^n H.$$

Hieraus ergibt sich für die in Rede stehenden Reihen:

$$|\,u_{2n+1} - u_{2n-1}\,| \leqq q^{n-1} H \quad \text{in } S_1 \text{ inkl. des Randes},$$
$$|\,u_{2n+2} - u_{2n}\,| \leqq q^n H \quad \text{in } S_2 \text{ inkl. des Randes}.$$

Von hier ab gestaltet sich der Beweis genau ebenso wie im vorhergehenden Falle.

Aufgabe. Man behandele in ähnlicher Weise den Fall, daß die Punkte A und B, Fig. 147, Spitzen sind, deren Seiten aus Kreisbogen bestehen. Dabei soll die Kurve C in der Nähe von A stetige Krümmung aufweisen, und zwar soll das Krümmungsmaß derselben in A mit demjenigen keines der beiden von A auslaufenden Kreisbogen übereinstimmen. Ähnliches gelte auch für den Punkt B.

Fingerzeig. Um eine der Funktion arc tang $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ entsprechende Funktion zu erhalten, bilde man den Bereich S mittels der am Eingange des § 6 erörterten Transformationen auf einen (ein- oder mehrblättrigen) Bereich Σ ab, derart, daß eine Spitze in einen Winkel von der Öffnung π übergeht.

§ 4. Lösung der Randwertaufgabe für einen beliebigen durch analytische Kurven begrenzten Bereich.

Auf Grund der voraufgehenden Entwicklungen läßt sich nun die Randwertaufgabe von § 2 allgemein für jeden Bereich S lösen, dessen Rand in jedem Punkte analytisch ist oder höchstens gewöhnliche Ecken aufweist. Wir erinnern vorab daran, daß ein Kreisabschnitt, dessen Winkel in den reellen Punkten $t = \alpha$, $t = \beta$ $(\alpha < \beta)$ liegen und die Größe μ haben, auf einen Vollkreis konform abgebildet werden kann, indem man die Transformation:

$$\frac{T - \alpha}{\beta - T} = -i\left(\frac{t - \alpha}{\beta - t}\right)^{\frac{\pi}{\mu}}$$

ausübt.

Um das Verfahren in einfacher Weise darzulegen, denken wir uns den Bereich S als ein krummliniges Dreieck mit nicht-verschwindenden Winkeln. An den 4. Satz von Kap. 13, § 6 anknüpfend, bilden wir dann die Umgebung einer Seite ab desselben auf die Umgebung eines Stückes $\alpha\beta$ der reellen Achse der t-Ebene ab. Sodann konstruieren wir einen Kreisabschnitt mit der Sehne $\alpha\beta$, wobei wir die Ausdehnung desselben so beschränken mögen, daß er ganz innerhalb der genannten Umgebung enthalten ist, und auch auf derjenigen Seite von $\alpha\beta$ liegt, welche inneren Punkten des Dreiecks entspricht. Fassen wir nun das Abbild des Kreisabschnitts in der z-Ebene ins Auge, so erkennen wir, daß ein bestimmter, an die Dreiecksseite ab stoßen-

der Streifen, welcher bei eventueller weiterer Einschränkung von μ ganz im Dreiecke liegt und übrigens die beiden anderen Seiten ac, bc desselben mit seinem Rande nicht berührt, durch Vermittlung des Kreisabschnitts ein-eindeutig und konform auf einen Vollkreis bezogen werden kann. Infolgedessen läßt sich die Randwertaufgabe für diesen Streifen lösen, während er außerdem noch allen anderen Forderungen des erweiterten 1. Satzes von § 3 hinsichtlich des Bereiches S_1 Genüge leistet.

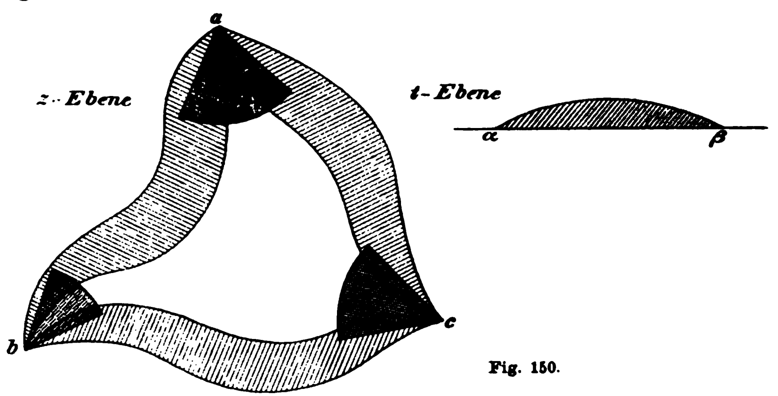


Fig. 150.

Die soeben auseinandergesetzte Konstruktion wollen wir jetzt auch an den beiden anderen Dreiecksseiten ac, bc wiederholen, indem wir diese mit ähnlichen Streifen versehen, welche im übrigen weder übereinander noch über den ersten greifen dürfen. Sodann vereinigen wir diese drei Bereiche zu einem Kranze, wofür sich die Randwertaufgabe ebenfalls lösen läßt. Das geschieht, wie folgt. Wir schicken die Bemerkung voraus, daß ein Kreissektor nach Kap. 6, § 12 konform auf einen Halbkreis, und somit vermöge der am Eingange dieses Paragraphen angeführten Formel weiter auf einen Vollkreis abgebildet werden kann. Demgemäß legen wir einen Kreissektor an, dessen Scheitel mit dem Punkte a zusammenfällt und dessen Schenkel in den beiden an a heranreichenden Streifen verlaufen, ohne diese jedoch zu berühren. Bei passender Wahl seines Radius wird dann seine dritte Seite die Ränder des Streifens je in einem einzigen Punkte, und zwar unter nicht verschwindendem Winkel treffen. Auch diese Konstruktion wiederholen wir noch an den beiden anderen Ecken.

Wir sind nunmehr in der Lage, das alternierende Verfahren in Anwendung zu bringen, indem wir einen Streifen zunächst mit den beiden über ihn greifenden Kreissektoren verschmelzen, den neuen

Bereich dann mit einem zweiten Streifen vereinigen, wozu noch der dritte Kreissektor hinzutreten möge, um endlich den hieraus erwachsenden Bereich durch den dritten Streifen zu dem in Aussicht genommenen Kranze zu ergänzen.

Jetzt sind wir gleich am Ziele. Es bleibt nur noch übrig, den Innenraum des Kranzes vermöge Kreisscheiben „dachziegelartig zu überdecken", wie Herr Klein sich ausdrückt, indem man jeweils dafür Sorge trägt, daß die Bedingungen des 1. Satzes von § 3 erfüllt sind. So schrumpft jener Innenraum allmählich so weit zusammen, bis er schließlich durch einen ganz im Kranze gelegenen Kreis umspannt, und somit vermöge des 2. Satzes von § 3 entfernt werden kann.

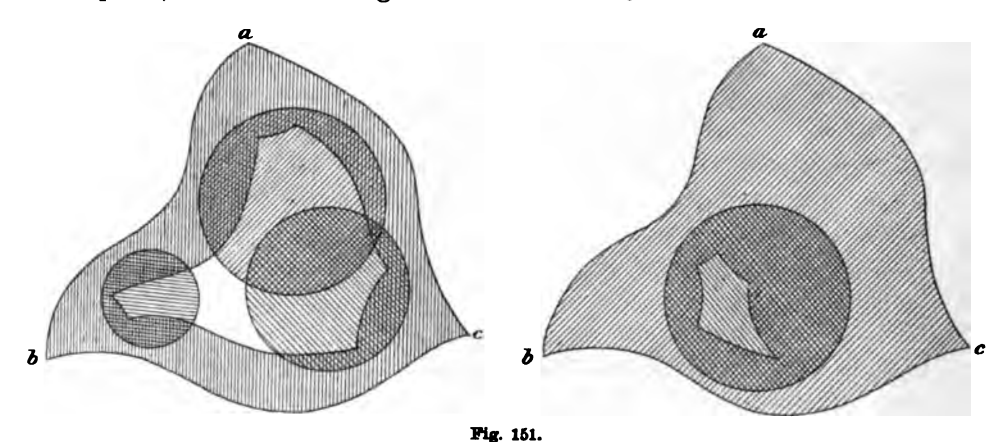


Fig. 151.

Hiermit ist der Beweis fertig. Auch der Fall spitzer Winkel kann zugelassen werden, sofern die Seiten des Winkels aus Kreisbogen (inkl. geradliniger Strecken) bestehen. Der allgemeine Fall wird am besten vermöge der Methode von § 5 behandelt. Bei der Überdeckung des Bereiches S haben wir uns auf die Anschauung berufen. Indessen läßt sich dieser Teil des Beweises auf Grund der Entwicklungen von Kap. 5, §§ 9, 10 mit aller Strenge durchführen.

§ 5. Existenzbeweis für die Greensche Funktion eines allgemeinen schlichten Bereichs von endlichem Zusammenhange.

Hilfssatz.[1]) *Sei T ein beliebiger einfach zusammenhängender schlichter Bereich, dessen Rand aus mehr als einem Punkte besteht, und*

1) Ein Beweis des Hauptsatzes, welcher dieses Hilfssatzes enträt, dafür aber sich der Funktion $w = P(z)$ von § 6 bedient, habe ich in den *Transactions Amer. Math. Soc.*, Bd. 1 (1900), S. 310 gegeben.

sei P ein beliebiger Randpunkt von T. Dann läßt sich das Innere von T ein-eindeutig und konform auf einen schlichten Bereich $\mathfrak{T}$ abbilden, derart, daß $\mathfrak{T}$ im Innern eines Kreises $\mathfrak{K}$ und P auf dem Rande desselben liegen.

Wir dürfen vor allem voraussetzen, daß T im Endlichen liegt. Hat T nämlich äußere Punkte, so kann dies direkt durch eine lineare Transformation erreicht werden. Im anderen Falle bringe man zuerst vermöge einer linearen Transformation alle die Randpunkte von T auf die Halbebene $\Re(z) \leq 0$, wobei außerdem die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ zum Rande gehören sollen. Daß dies in der Tat angeht, wird sogleich gezeigt. Versteht man nun unter

$$w = \log z$$

denjenigen Zweig dieser Funktion, welcher in einem innern Punkte z_0 von T den Wert w_0 annimmt, so wird T durch diese Gleichung auf einen Bereich T' der w-Ebene bezogen, wofür $w = w_0 + 2\pi i$ ein äußerer Punkt ist, vgl. Kap. 8, § 10, und hiermit haben wir Anschluß an den am Eingang erwähnten Fall erreicht.

Um noch die bewußte Ergänzung zu liefern, bringe man die Randpunkte von T zunächst ins Endliche und nehme man dann einen Kreis so an, daß er alle diese Punkte umfaßt, und daß außerdem zwei davon, A und B, am Rande desselben liegen. Die Existenz eines solchen Kreises sieht man, wie folgt, ein. Man betrachte die Menge der Kreise:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

welche die Randpunkte von T umfassen. Sei ϱ die untere Grenze der Radien derselben, und man nehme eine abzählbare Folge von Wertetripeln (a_n, b_n, r_n) an, wofür die entsprechenden Kreise jener Menge angehören, und außerdem $\lim r_n = \varrho$ ist. Dann haben die Mittelpunkte (a_n, b_n) eine Häufungsstelle $(\bar{a}, \bar{b})$, und man erkennt sofort, daß alle Randpunkte von T im Kreise

$$K: \qquad (x - \bar{a})^2 + (y - \bar{b})^2 \leq \varrho^2$$

liegen. Des weiteren müssen mindestens zwei Randpunkte von T am Rande von K liegen. Im anderen Falle sei P der einzige solche Randpunkt, und seien P_1, P_2 zwei getrennte nahe bei P gelegene Punkte der Peripherie von K, wofür $\widetilde{PP_1} = \widetilde{PP_2}$ ist. Dann kann man den größeren der beiden Bogen $\widetilde{P_1 P_2}$ mit einem Streifen umgeben, der frei von Randpunkten von T ist, und darauf einen Kreis durch

P_1 und P_2 legen, dessen Rand, sofern derselbe in K liegt, auch innerhalb dieses Streifens verläuft. Dieser Kreis umfaßt ebenfalls alle Randpunkte von T. Sein Radius ist aber kleiner als ϱ, und mit diesem Widerspruch ist die Richtigkeit der letzten Behauptung dargetan. — Jetzt bleibt nur noch über, das Punktepaar A, B durch eine geeignete lineare Transformation ins Punktepaar $z = 0, \infty$ überzuführen.

Sei also T ein endlicher Bereich, und sei P ein Randpunkt von T. Wir verlegen den Anfang $z = 0$ in P und verstehen dann unter

$$w = \log z$$

einen dem Bereich T entsprechenden Zweig dieser Funktion. Sei $r = R$ die obere Grenze von $|z|$ für die Punkte von T. Dann liegen die Bildpunkte von T in der w-Ebene sämtlich links von der Geraden $u = \log R$. Ferner werden die in der Nähe von P: $z = 0$ gelegenen Punkte von T, $|z| < \delta$, in Punkte w übergeführt, welche in der Nähe des Punktes $w = \infty$ liegen, $\Re(w) < \log \delta$. Demgemäß wird man nur noch die Halbebene $\Re(w) < \log R$ auf das Innere eines Kreises abbilden müssen, um den in Aussicht genommenen Bereich $\mathfrak{T}$ nebst dem Kreise $\mathfrak{K}$ zu erhalten.

Hauptsatz. *Einem beliebigen einfach zusammenhängenden schlichten Bereich T, dessen Rand aus mehr als einem Punkte besteht, entspricht eine Greensche Funktion.*

Dem Hilfssatz gemäß genügt es, den Beweis für einen endlichen Bereich zu führen.

Sei A ein beliebiger innerer Punkt von T. Wir wollen T nach dem Satze von Kap. 5, § 3 in Teilbereiche T_n entwickeln, deren alle den Punkt A umfassen, und die Greensche Funktion g_n des Bereichs T_n bilden, deren Pol in A liegt. Letzteres wird dadurch erreicht, daß man eine Funktion ω_n vermöge des kombinatorischen Verfahrens von § 4 aufstellt, welche im Innern von T_n harmonisch ist, und die Randwerte $\log r$ annimmt. Dann wird

$$g_n = \log \frac{1}{r} + \omega_n$$

die gesuchte Funktion sein.

Sei M ein innerer von A verschiedener Punkt von T_1. Dann wird in M

$$g_n < g_{n+1}$$

sein. Denn die Funktion $g_{n+1} - g_n$ ist, von einer hebbaren Unstetigkeit im Punkte A abgesehen, ausnahmslos harmonisch in T_n und positiv am Rande dieses Bereichs, mithin hat sie einen positiven Wert im Punkte M. Es handelt sich nun um folgende zwei Punkte:

a) Die Funktion g_n konvergiert im Punkte M. Nach dem Harnackschen Satze, Kap. 13, § 4 konvergiert sie dann gleichmäßig in einem Bereiche, welcher aus einem beliebigen T_q mit Ausnahme des Punktes A besteht, womit sich denn die Grenzfunktion g, vom Punkte A abgesehen, harmonisch in T erweist. Im übrigen wird in der Nähe von A

$$g = \log \frac{1}{r} + \omega$$

sein, wo ω im Punkte A endlich bleibt, wie aus der Darstellung

$$\begin{aligned} g &= g_1 \qquad\qquad + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots \\ &= \log \frac{1}{r} + \omega_1 + (\omega_2 - \omega_1) + (\omega_3 - \omega_2) + \cdots \end{aligned}$$

sofort erhellt.

b) die Grenzfunktion g nimmt den Randwert 0 in einem beliebigen Randpunkt P von T an.

Beide Beweise werden zugleich geliefert, indem man T auf Grund des Hilfssatzes in einen Bereich $\mathfrak{T}$ überführt und die Greensche Funktion G des Kreises $\mathfrak{K}$ bildet, deren Pol im Bildpunkte $\mathfrak{A}$ von A liegt. Bezeichnet man mit $\mathfrak{g}_n$, $\mathfrak{T}_n$ die Funktion resp. den Bereich, in welche g_n, T_n hierdurch transformiert werden, so ist in allen innern von $\mathfrak{A}$ verschiedenen Punkten von $\mathfrak{T}_n$

$$0 < G - \mathfrak{g}_n, \qquad \text{also} \qquad 0 < \mathfrak{g}_n < G\,.$$

Ferner ist die Grenzfunktion

$$0 < \mathfrak{g} \leqq G,$$

und da G den Randwert 0 im Kreise $\mathfrak{K}$ annimmt, so nimmt $\mathfrak{g}$ ebenfalls den Randwert 0 im Bildpunkte von P an.

Die im vorhergehenden benutzte Beweismethode gestattet, sowohl im Hilfs- als auch im Hauptsatze, eine allgemeinere Formulierung des Resultats, indem wir von der Forderung des einfachen Zusammenhangs absehen und nur verlangen, *daß der Rand von T aus einer endlichen Anzahl von Randstücken* (Kap. 5, § 7) *bestehe, deren jedes mehr als einen Punkt besitzt.*

Hat T dagegen einen isolierten Randpunkt, so ist wegen des Satzes vom Maximum und Minimum keine Greensche Funktion möglich.

§ 6. Über Kreisbogendreiecke mit verschwindenden Winkeln.

Durch das Ergebnis des vorhergehenden Paragraphen ist insbesondere festgestellt, daß ein Kreisbogendreieck mit nicht verschwindenden Winkeln auf einen Kreis, und mithin auch auf eine Halbebene konform abgebildet werden kann. Berühren sich dagegen zwei Seiten des Dreiecks in einem Eckpunkte A, so kann man sich, wie folgt, helfen. Durch A lege man einen Kreis, welcher die Dreiecksseiten in A rechtwinklig trifft und daher bei geeigneter Einschränkung seines Radius ein Kreisbogendreieck Σ mit den Winkeln 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ aus dem vorgelegten Dreiecke S herausschneidet. Ich sage

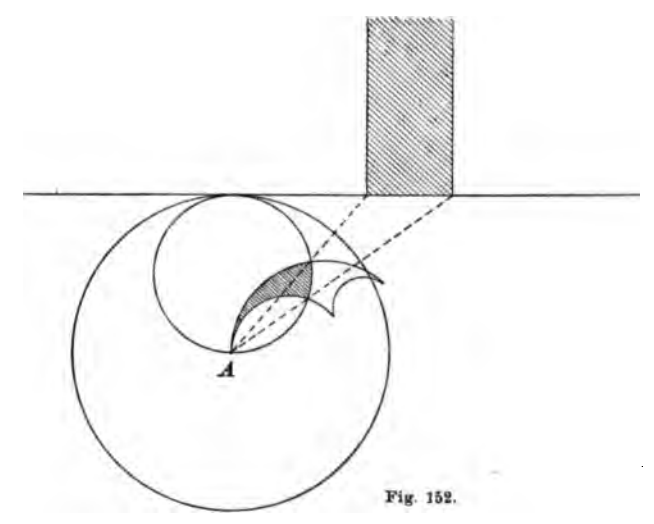


Fig. 152.

nun: für das Dreieck Σ läßt sich die Randwertaufgabe lösen, da Σ konform auf einen Kreis bezogen werden kann, womit denn zur Anwendung des alternierenden Verfahrens beim ursprünglichen Dreiecke S der Weg gebahnt ist. In der Tat führt eine Transformation durch reziproke Radien mit dem Inversionszentrum im Punkte A das Dreieck Σ in einen Halbstreifen über. Dieser wird an einer geeigneten Geraden gespiegelt, und der neue Streifen wird dann vermöge des Logarithmus, Kap. 6, § 15, auf einen Halbkreis abgebildet, und somit schließlich noch durch die Transformation von § 4 in einen Vollkreis verwandelt.

Hiermit erkennen wir, daß ein völlig beliebiges Kreisbogendreieck auf eine Halbebene konform bezogen werden kann, — ein grundlegender Satz in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Wir wollen nun unsere besondere Aufmerksamkeit dem Falle widmen, daß alle drei Winkel verschwinden. Durch geeignete lineare Transformationen können wir es vorab so einrichten, daß einerseits das Dreieck S gleichschenklig wird und dem Einheitskreise der w-Ebene einbeschrieben ist, während andererseits die Halbebene T aus der positiven Hälfte der z-Ebene besteht. Dabei mögen außerdem die Dreiecksecken $w = w_a$, w_b, w_c beziehungsweise in die Punkte 0, 1, ∞ übergehen. Sei

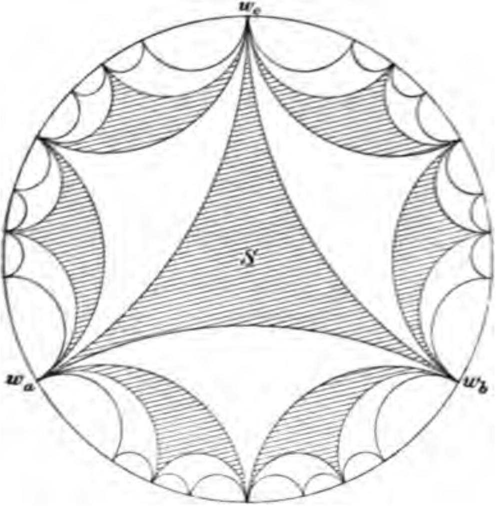


Fig. 153.

$$w = t(z)$$

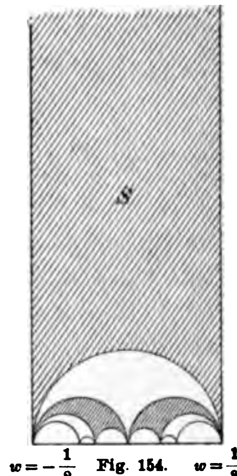
die analytische Funktion, welche durch die Abbildung definiert wird, und sei

$$z = s(w)$$

die Umkehrfunktion. Dann ist zunächst $t(z)$ bloß in der oberen Halbebene, $s(w)$ bloß in jenem Kreisbogendreiecke erklärt. Indessen lassen beide Funktionen auf Grund der Entwicklungen von Kap. 13, § 6 analytische Fortsetzungen zu. Nach dem Zusatze des 5. Satzes jenes Paragraphen wird man diese nämlich dadurch erhalten, daß man S an einer beliebigen seiner Seiten, und T zugleich an der entsprechenden Strecke der reellen Achse spiegelt. Hiernach kann man $t(z)$ über jeden der drei Teile der reellen Achse, 01, 1∞, $\infty 0$, hinaus in ein negatives Halbblatt der z-Ebene analytisch fortsetzen. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Prozesses an den neuen Kreisbogendreiecken und den zugehörigen Halbebenen erhalten wir einerseits einen Komplex von Kreisbogendreiecken in der w-Ebene, welche sich augenscheinlich glatt nebeneinander lagern und das Innere des Einheitskreises gerade einmal ausfüllen. Andererseits erwächst im Bereiche der Veränderlichen z eine Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung in $z = 0$, 1, ∞; auch ist

die Anzahl der Verzweigungspunkte in jedem dieser Punkte unendlich. Die Funktion $s(w)$ ist eindeutig, und zwar verhält sie sich analytisch innerhalb des Einheitskreises, läßt sich aber nicht darüber hinaus analytisch fortsetzen.

Nähere Besprechung der Kreisbogenfigur. Beim letzten Teile der vorangehenden Überlegung haben wir keinen genügenden Beweis dafür geliefert, daß die Kreisbogenfigur in der w-Ebene das Innere des Einheitskreises wirklich ausfüllt. Ergänzen wir jetzt diese Lücke! Dazu empfiehlt es sich, jenen Einheitskreis durch eine Halbebene zu ersetzen, indem wir S so annehmen, wie in der beigesetzten Figur angedeutet ist. Nun wollen wir S zunächst bloß am Halbkreise spiegeln, wodurch ein Bereich entsteht, welcher am unteren Rande von Kreisen mit dem halben Durchmesser jenes Halbkreises begrenzt ist. Hierauf spiegeln wir die Figur der beiden Dreiecke an jedem der letzteren Kreise. Dabei haben die Kreisbogen, welche die untere Begrenzung der neuen Figur bilden, einen den halben Durchmesser ihrer Vorgänger wieder nicht übertreffenden Durchmesser, da die Ecke $w = \infty$ des Bereiches S ja in die Mitte eines jeden der genannten Kreisbogen projiziert wird. Jetzt wird die Gesamtfigur abermals an jedem Kreise der unteren Begrenzung gespiegelt und eine ähnliche Überlegung bezüglich des Maximaldurchmessers der Kreisbogen am unteren Rande angestellt.



$w = -\frac{1}{2}$ Fig. 154. $w = \frac{1}{2}$

Indem man dieses Verfahren fortgesetzt wiederholt und dabei stets dafür Sorge trägt, daß die Dreiecke abwechselnd schraffiert werden, erwächst ein Komplex von Kreisbogendreiecken, welcher folgendermaßen beschaffen ist:

a) jedes Dreieck ist das Spiegelbild aller seiner Nachbarn;

b) die Dreiecke liegen alle im Halbstreifen:

$$-\tfrac{1}{2} \leqq u \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad v > 0,$$

und füllen diesen Bereich gerade einmal aus[1]);

1) Dabei werden allerdings die Randpunkte der verschiedenen Dreiecke doppelt erhalten. Indessen sollen auch diese nur einfach gezählt werden, sofern man nur von den Eckpunkten absieht, welch letzere doch, gerade wie die Endpunkte des Periodenstreifens der einfach periodischen Funktionen, S. 463, Anmerkung, je unendlichfach auftreten und im übrigen für die hier verfolgten

c) jedes schraffierte Dreieck stößt nur an nicht schraffierte Dreiecke, und umgekehrt.

Jetzt bleibt nur noch übrig, diesen Komplex an seinen geradlinigen Begrenzungen zu spiegeln, wobei schraffiertes wieder in nicht schraffiertes übergehen soll, und umgekehrt. Dieser Schritt soll gleichfalls unbegrenzt wiederholt werden. So kommt schließlich die in Aussicht genommene Figur zu Stande.[1])

Wir wollen die Funktion, welche aus der Abbildung des Dreiecks S von Fig. 154 auf die Halbebene erwächst, indem dabei die Punkte $w = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \infty$ bzw. in $z = 0, 1, \infty$ übergehen, mit

$$w = P(z)$$

bezeichnen. Die derselben entsprechende Umkehrfunktion

$$z = S(w)$$

ist eindeutig, sie verhält sich analytisch in der obern Halbebene und läßt keine analytische Fortsetzung darüber hinaus zu. Im übrigen ist $P(z)$ eine lineare Funktion von $t(z)$. Denn durch die beiden Gleichungen

$$w = t(z), \qquad W = P(z)$$

wird die obere W-Ebene, indem z die bewußte Riemannsche Fläche gerade einmal durchläuft, — d. h. analytisch, indem z zwischen den beiden letzten Gleichungen eliminiert wird, — ein-eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises bezogen.

Hieraus erkennt man nachträglich, daß jede andere Reihenfolge der Spiegelungen der Kreisbogendreiecke, von S ausgehend, notwendig

Zwecke der Funktionentheorie weiter nicht in Betracht kommen. — Die hier gegebene Behandlung rührt von Bôcher her.

In Gauß Nachlaß findet sich die Figur des Fundamentalraums der Funktion $P(z)$; *Werke*, Bd. 3, 1866, S. 477.

1) Dieser Figur ist man zum ersten Male in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen begegnet. Aus der im Texte verwendeten Erzeugungsweise derselben erhellt schon, daß jeder schraffierte Bereich in jeden anderen solchen vermöge einer linearen Transformation:

$$w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$$

übergeführt werden kann. In der Tat geht ein beliebiger schraffierter Bereich aus S durch eine gerade Anzahl von Spiegelungen hervor. Hierdurch wird aber eine ausnahmslos ein-eindeutige und konforme Transformation der erweiterten Ebene in sich ohne Umlegung der Winkel definiert, was seinen analytischen Ausdruck in einer linearen Transformation findet; Kap. 7, § 10, 7. Satz, Zusatz. Im übrigen sind die Koeffizienten $\alpha, \ldots \delta$ ganzzahlig, und zwar ist $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, während β, γ gerade Zahlen sind; vergleiche Klein-Fricke, *Elliptische Modulfunktionen*, Bd. 1, S. 270.

auf dieselbe Figur führen mußte.[1]) Denn auch der zweiten Figur entspricht auf Grund der nämlichen Abbildung von S auf die obere z-Ebene eine analytische Funktion, welche zunächst in S mit der früheren Funktion $z = S(w)$ übereinstimmt. Demgemäß fällt sie durchweg mit $S(w)$ zusammen. Andererseits geben ihre analytischen Fortsetzungen eben zu den Dreiecken der zweiten Figur Anlaß, welch letztere sich dann hiermit als identisch mit jenen früheren erweisen.

§ 7. Der Picardsche Satz.

Wir haben bereits in Kap. 7, § 6 (10. Satz) den Weierstraßschen Satz kennen lernen, wonach eine Funktion einer komplexen Veränderlichen in der Nähe einer wesentlichen singulären Stelle jedem vorgegebenen Werte beliebig nahe kommt, sowie auch die Erweiterung desselben, welche sich auf die Existenz unendlich vieler, in der wesentlichen singulären Stelle sich häufender Wurzeln der Gleichung $f(z) = C'$ bezieht, (a. a. O., 11. Satz). Mit Hilfe der in § 6 aufgestellten Funktion

$$w = P(z)$$

hat Picard einen Grad der Allgemeinheit erreicht, welcher dem Wesen der Sache entspricht. Beginnen wir mit dem besonderen Falle des Satzes, welchen auch Picard zuerst behandelte.

Der Picardsche Satz für ganze Funktionen. *Eine ganze Funktion $G(z)$, welche nur keine Konstante ist, nimmt jeden Wert, höchstens mit Ausnahme eines einzigen, wirklich an.*

Gesetzt, es gäbe zwei Werte, C und C', welche $G(z)$ nicht annimmt. Dann meidet die Funktion

$$\frac{G(z) - C}{C' - C} \tag{1}$$

die Werte 0 und 1. Indem wir die in § 6 eingeführte Funktion

$$w = P(z)$$

heranziehen, bilden wir die Funktion:

$$w = P\left(\frac{G(z) - C}{C' - C}\right). \tag{2}$$

Dieser Ausdruck ist zunächst unendlich vieldeutig. Indessen lassen sich seine verschiedenen Bestimmungen in der Umgebung einer beliebigen Stelle $z = z_0$, da die Funktion (1) ja in diesem Punkte ana-

1) Diesen Beweis kann man auch geometrisch führen.

lytisch ist und einen von 0 und 1 verschiedenen Wert hat, zu einer Reihe von eindeutigen Funktionen zusammenfassen, welche sich dort alle analytisch verhalten. Infolgedessen gilt dies auch im Großen, Kap. 8, § 10. Fassen wir eine dieser Funktionen ins Auge, so haben wir eine ganze Funktion vor uns, welche niemals einen mit negativem rein imaginären Bestandteile behafteten Wert annimmt. Dies verstößt aber gegen den oben zitierten Weierstraßchen Satz von Kap. 7, § 6, und hiermit ist unser Satz bewiesen.

Der soeben bewiesene Satz bezieht sich auf das Verhalten einer Funktion im Großen, indem wir voraussetzten, daß die Funktion sich in der ganzen eigentlichen Ebene analytisch verhält. Wir wollen den Satz jetzt dadurch verallgemeinern, daß wir nur verlangen, daß die vorgelegte Funktion, welche wir nun $\varphi(z)$ nennen wollen, eine wesentliche singuläre Stelle, dieses Wort in der Bedeutung von Kap. 7, § 6, S. 312 genommen, im Punkte $z = a$ habe. Denken wir uns a wieder als den Punkt ∞, und bilden wir, unter gleicher Annahme wie vorhin hinsichtlich C und C', die Funktionen (1) und (2). Indem wir die Umgebung des Punktes ∞ längs der positiven reellen Achse aufschneiden, entsteht dadurch ein einfach zusammenhängender Bereich, worin sich die verschiedenen Bestimmungen von (2) zu eindeutigen Zweigen zusammenfassen lassen. Es kann offenbar keiner derselben im nicht aufgeschittenen Gebiete eindeutig sein, denn sonst könnte man gerade so schließen, wie im vorhin erledigten Falle. Setzen wir also einen derselben über den Schnitt hinaus analytisch fort, so sehen wir, daß die Umgebung eines Punktes z_0 des doppelt überdeckten Gebietes auf die Umgebungen zweier getrennter Punkte w_0 und w_0' abgebildet wird. Mithin werden letztere beiden Umgebungen auch ein-eindeutig und konform aufeinander bezogen, und zwar so, wie man sofort erkennt, daß je zwei einander entsprechende Punkte w und w' vermöge der Funktion

$$(3) \qquad w = P(t)$$

zu zwei gleichen Werten von t führen. M. a. W. werden jene beiden Umgebungen in der w-Ebene auf zwei kongruente, in verschiedenen Blättern der zu (3) gehörigen, über der t-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche belegene Bereiche abgebildet. Hieraus folgt aber, daß besagte Umgebungen linear aufeinander bezogen sind:

$$(4) \qquad w' = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}.$$

Wir schließen also, daß eine Reihe der Zweige von (2) durch die Funktionalgleichung (4) linear miteinander verknüpft sind.

Wir müssen noch auf die Beschaffenheit der linearen Transformation (4) näher eingehen. Was zunächst ihre Fixpunkte anbetrifft, so ist klar, daß diese beide auf der reellen Achse liegen müssen, da kein Punkt der oberen Halbebene ungeändert bleibt, sofern wir nur von der identischen Transformation absehen, während die reelle Achse in sich übergeführt wird. Aus letzterem Grunde sind nämlich alle loxodromischen Transformationen von vornherein ausgeschlossen. Aber auch die elliptischen sind unzulässig, denn diese könnten ja höchstens die obere und die untere Halbebene miteinander vertauschen. Da bleiben also nur noch

a) die parabolischen:

$$\frac{1}{w'-\zeta} = \frac{1}{w-\zeta} + k \quad \text{resp.} \quad w' = w + k, \quad k \text{ reell und } \neq 0;$$

b) die hyperbolischen:

$$\frac{w'-\zeta_1}{w'-\zeta_2} = A\,\frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2}, \quad A, \text{ reell, positiv und } \neq 1, \quad \zeta_1 < \zeta_2,$$

übrig, und diese wollen wir nun der Reihe nach besprechen.

ad a) Bilden wir uns hier die Funktion

$$e^{-\frac{2\pi i}{|k|}\cdot\frac{1}{w-\zeta}} \quad \text{bzw.} \quad e^{\frac{2\pi i}{|k|}w}$$

wo w sich auf jene linear verknüpften Zweige der Funktion (2) bezieht, so haben wir hiermit eine Funktion von z erlangt, die in den eigentlichen Punkten der Umgebung der Stelle $z = \infty$ eindeutig und analytisch ist, deren absoluter Betrag aber stets kleiner als 1 bleibt Mit diesem Widerspruch ist also Fall a) erledigt.

ad b) Hier gehen wir auch in ähnlicher Weise vor, indem wir uns jetzt der Funktion:

$$e^{-\frac{2\pi i}{|\log A|}\log\frac{w-\zeta_1}{w-\zeta_2}}$$

bedienen und daraus gleiche Schlüsse wie vorhin ziehen.

Das hiermit gewonnene Ergebnis wollen wir in einen Satz zusammenfassen und zugleich auch ergänzen.

Der allgemeine Picardsche Satz. *In der Umgebung einer isolierten wesentlichen singulären Stelle $z = a$ nimmt eine Funktion $\varphi(z)$ jeden Wert, höchstens mit Ausnahme eines einzigen, wirklich an.*

Hat $\varphi(z)$ dagegen Pole, welche sich im Punkte $z = a$ häufen, während $\varphi(z)$ sonst in der Umgebung dieses Punktes analytisch ist[1]*, so gibt es höchstens zwei Werte, welche $\varphi(z)$ in jener Umgebung nicht annimmt.*

Um den letzten Teil des Satzes noch zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$\Phi(z) = \frac{1}{\varphi(z) - C},$$

wo C einen Wert bedeutet, welchen $\varphi(z)$ nicht annimmt. Nach geeigneter Erklärung des Wertes von $\Phi(z)$ in den hebbaren singulären Stellen der rechter Hand stehenden Funktion erhält man so eine Funktion, welche allen Forderungen des ersten Teils des Satzes genügt und daher nur einen Wert meiden kann. Hiermit ist der Beweis vollständig erbracht.

Die Funktion $P(z)$ entnahm Picard der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Wie wir aber gesehen haben, gebraucht man nur folgende Eigenschaften derselben: a) $P(z)$ hat nur zwei getrennte singuläre Stellen im Endlichen; b) es gibt einen Bereich in der w-Ebene, den die Funktion $w = P(z)$ nicht betritt; und endlich c) irgend zwei Zweige der Funktion, welche beide in der Umgebung ein und desselben Punktes betrachtet werden, sind linear miteinander verknüpft.

§ 8. Über die Uniformisierung analytischer Funktionen.

Wenn wir es mit einer mehrdeutigen Funktion zu tun haben, empfiehlt es sich meist, dieselbe durch eindeutige Funktionen darzustellen. So dient beispielsweise die Riemannsche Fläche vor allem dem Zwecke, einen Bereich zu schaffen, in welchem eine vorgelegte vieldeutige Funktion eindeutig wird. Ein anderer Fall ist der in Kap. 8, § 14 behandelte, wo eine analytische Funktion:

$$w = f(z)$$

einen Verzweigungspunkt endlicher Ordnung in $z = a$ hat. Hier gelang es uns, die Bestandteile eines der Funktion zugehörigen Wertepaares (w, z) vermöge zweier eindeutiger Funktionen eines Parameters t auszudrücken:

$$z = a + t^m, \qquad w = \varphi(t).$$

[1] Nach der Definition von Kap. 6, § 5 muß $\varphi(z)$ dann im genannten Bereiche notwendig eindeutig sein.

Doch galt diese Darstellung nur im Kleinen, also für einen beschränkten Teil des Definitionsbereiches der Funktion. Dagegen sind schon von der Integralrechnung her gewisse Klassen von Funktionen bekannt, wobei es möglich ist, die Funktion in ihrem Gesamtverlaufe durch eindeutige Funktionen zur Darstellung zu bringen, — zu *uniformisieren*, wie man sich wohl auszudrücken pflegt. Handelt es sich beispielsweise darum, das Integral:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx,$$

wo R eine rationale Funktion bedeutet, durch elementare Funktionen auszuwerten, so stellt man zunächst x und $\sqrt{a^2 - x^2}$ durch rationale resp. eindeutige trigonometrische Funktionen eines Parameters t dar:

$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \qquad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2},$$

beziehungsweise:

$$x = a \sin t, \qquad y = a \cos t.$$

Im Anschlusse hieran gibt es folgende Verallgemeinerungen:

a) *Die rationalen Kurven.* Sei

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer irreduzibelen algebraischen Kurve, welche die Maximalzahl von Doppelpunkten besitzt. Dann wird in der algebraischen Geometrie gezeigt, daß sich die Koordinaten eines beliebigen Punktes derselben mit Hilfe zweier rationalen Funktionen:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

darstellen lassen, derart, daß jeder Wert von t, inkl. des Punktes $t = \infty$, einen Punkt (x, y) der Kurve liefert, während umgekehrt jedem Punkte der Kurve ein und nur ein Punkt der erweiterten t-Ebene entspricht.

b) *Die algebraischen Kurven vom Geschlechte* 1. Hat die Kurve (1) dagegen einen Doppelpunkt weniger als jene Maximalzahl, so ist keine rationale Darstellung mehr möglich, wohl aber eine Darstellung vermöge doppeltperiodischer Funktionen. So kann man etwa zwei rationale Funktionen zweier Argumente finden, wofür die Formeln:

$$x = \varphi[\wp(t), \wp'(t)], \qquad y = \psi[\wp(t), \wp'(t)]$$

die Kurve vollständig darstellen. Dabei liefert jeder endliche Wert

von t wieder einen Punkt (x, y) der Kurve, aber jetzt entsprechen einem willkürlichen Punkte der Kurve unendlich viele Werte t. Die Beziehung wird indessen wieder zu einer ein-eindeutigen, wenn wir t auf ein Periodenparallelogramm der Funktion $\wp(t)$ beschränken.

c) *Die algebraischen Kurven vom Geschlechte* $p > 1$. Hat die Kurve (1) noch weniger Doppelpunkte als in den Fällen a) und b), so kann man sie immer noch uniformisieren, indem man sich jetzt eindeutiger automorpher Funktionen bedient; Satz von Poincaré und Klein.[1]) Unter einer *automorphen Funktion* versteht man nämlich eine Funktion $f(z)$, welche eine Gruppe linearer Transformationen in sich zuläßt:

$$f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = f(z).$$

Darunter subsumieren sich als einfachste Beispiele die gewöhnlichen periodischen Funktionen, sowie die Funktionen mit multiplikativer Periode, vgl. Kap. 10, § 9.

Wir wenden uns jetzt zum Beweise des Uniformisierungssatzes.

§ 9. Der algebraische Fall. Uniformisierung vermöge automorpher Funktionen mit Grenzkreis.

A) Von der Konstruktion einer besonderen Riemannschen Fläche.

Vorgelegt sei eine irreduzible algebraische Gleichung

$$(1) \qquad F(w, z) = 0$$

vom Grade $n \geq 1$ in w. Ist $n = 1$, so ist w eine rationale Funktion von z, und die Uniformisierungsfrage ist somit von vornherein erledigt.

Im Falle $n > 1$ zeichne man die Verzweigungspunkte $\xi_1, \ldots \xi_q$ in der erweiterten z-Ebene auf, breite über letzterer n Blätter aus, und schneide diese längs einer von ξ_1 ausgehenden, über $\xi_2, \ldots$ bis nach ξ_q führenden einfachen Kurve C auf. Im übrigen soll C aus einer endlichen Anzahl geradliniger Strecken bestehen. Bei der folgenden Untersuchung spielt der Punkt $z = \infty$ keine Sonderrolle. Wir denken uns die in Betracht kommenden Flächen als erweiterte z-Ebenen resp. als Kugelflächen.

---

1) Poincaré, *Comptes Rendus*, Bd. 93 (1881), S. 303; *Math. Ann.*, Bd. 19 (1882), S 561. Klein, *Math. Ann.*, Bd. 19 (1882), S. 566.

Wir konstruieren jetzt eine besondere Art Riemannscher Fläche für die Funktion w, welche im allgemeinen unendlich vielblättrig wird. Zu dem Zwecke gehen wir von einem beliebigen Zweige der Funktion w aus, dessen Definitionsbereich aus einem längs C aufgeschnittenen Blatte T_1 bestehen soll. Dabei wird der Rand von T_1 von den $2q-2$ Stücken gebildet, in welche C durch die q Punkte ξ_i zerlegt wird, jeden Bogen (ξ_i, ξ_{i+1}), den beiden Ufern des Schnittes entsprechend, doppelt gezählt. Wenn in der Folge von einem Randbogen (ξ_r, ξ_s) die Rede ist, so wird stets nur das eine Ufer damit gemeint. Das Verhalten eines Zweiges der Funktion in einem Punkte ξ_t kann ganz verschieden ausfallen, jenachdem dieser Punkt als zum einen oder zum andern Ufer gehörig betrachtet wird.

An T_1 hängen wir ein zweites Blatt T_2 längs eines einzigen Randbogens (ξ_i, ξ_{i+1}) resp. (ξ_i, ξ_{i+l}) an. Dabei sei ξ_i der erste der Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots$, in denen jener erste Zweig der Funktion w verzweigt ist, während den Punkten $\xi_{i+1}, \ldots \xi_{i+l-1}$, falls $l > 1$ ist, keine Verzweigung entspricht und erst im Punkte ξ_{i+l} eine Singularität des genannten Zweiges sich wieder einstellt. Ist $i > 1$, so soll das Blatt T_1 längs des Bogens (ξ_1, ξ_i) von C zu einem dort unversehrten Blatte wieder hergestellt werden. So entsteht ein zweiblättriger Bereich Ψ_2 mit einem einzigen Rande, welch letzterer möglicherweise noch, wie folgt, vereinfacht werden kann. Sollte nämlich der erste Zweig in den Punkten $\xi_q, \xi_{q-1}, \ldots \xi_{q-r}$ nicht verzweigt sein, so soll T_1 auch längs des Bogens (ξ_{q-r}, ξ_q) von C wieder zusammengeheftet werden. Und ebenso soll mit T_2 verfahren werden, falls der entsprechende Zweig in $\xi_1, \ldots \xi_k$, sowie in $\xi_q, \ldots \xi_{q-s}$ nicht verzweigt ist. Doch soll eine solche Zusammenheftung am anderen Randbogen eben nicht vorgenommen werden, es sei denn, daß dies geschehen kann, ohne den Rand zu zerstückeln. So wäre dies beispielsweise erlaubt, wenn ξ_1 ein einfacher Verzweigungspunkt jenes ersten Zweiges ist, da nun auch das andere Ufer (ξ_1, ξ_2) von T_1 sich mit dem entsprechenden Randbogen von T_2 vereinigen läßt, ohne den Rand zu zerlegen. Allgemein wird dies stets dann und nur dann möglich sein, wenn der jeweilige Rand einen Einschnitt aufweist, d. h. wenn die stetige Fortsetzung des einen Ufers eines Randbogens aus einem kongruenten Ufer besteht, während zugleich die Randwerte der entsprechenden Zweige in örtlich zusammenfallenden Punkten miteinander übereinstimmen.

So fahren wir fort, bis alle n Zweige der Funktion w durch Blätter $T_1, T_2, \ldots T_n$ vertreten sind. Es kann nun insbesondere vorkommen, daß der Rand hiermit ganz fortfällt, — man denke etwa

an das Beispiel $w^3 - z = 0$. Das ist eben ein besonderer Fall, worauf wir später zurückkommen wollen. Tritt dieser Fall nicht ein, so haben wir einen Komplex Φ_1 von n Blättern, welche durch einen einzigen aus einer geraden Anzahl von Randbogen bestehenden Rand begrenzt ist.

Wir denken uns diesen Komplex in unbegrenzt vielen Exemplaren vorhanden und hängen dann an Φ_1 ein zweites Individuum längs eines einzigen Randbogens, worauf dann eventuell noch ein Teil des Randes in der Form eines Einschnitts, wie vorhin auch in ähnlichen Fällen geschehen ist, zu entfernen sein wird. Hierdurch entsteht eine Fläche Φ_2, welche ähnlich beschaffen ist, wie Φ_1.

Dieser Schritt soll nun wiederholt werden, bis alle Randbogen von Φ_1 besetzt sind. Sodann besetzt man der Reihe nach die Randbogen des gegenwärtigen Komplexes mit weiteren Exemplaren jenes ersten Komplexes, usw. f. Denkbar wäre es, daß der Rand nach einer endlichen Anzahl von Schritten ganz verschwinden sollte. Auf die Möglichkeit dieses Vorkommnisses brauchen wir indessen nicht weiter einzugehen, da wir hiermit doch bloß wieder auf einen Sonderfall geführt würden, welcher sich durch ähnliche Hilfsmittel, wie der vorhin erwähnte, erledigen läßt.

Im allgemeinen Falle erwächst durch das obige Verfahren als Grenzfläche eine unberandete unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche Φ mit keinen anderen Singularitäten, als Verzweigungspunkte endlicher Ordnung. Im folgenden Paragraphen wird bewiesen, daß sich dieselbe, als Kugelfläche aufgefaßt, ein-eindeutig und stetig[1]), und von Verzweigungspunkten abgesehen, auch konform auf das Innere eines Kreises resp. auf die ganze eigentliche Ebene abbilden läßt.

B) Von der Abbildung der Fläche Φ auf einen Kreis resp. auf die eigentliche Ebene.

Anlage des Beweises. Nachdem die Greensche Funktion g_n des Bereiches Φ_n in nahe liegender Weise erklärt und deren Existenz nachgewiesen ist, stellt sich folgende Fallunterscheidung ein:

I) bei unendlich wachsendem n konvergiert g_n gegen einen Grenzwert g;

1) Wir sagen, die Abbildung der (ein- oder mehrblättrigen) Umgebung des Punktes $z = \infty$ auf einen endlichen Teil der t-Ebene ist *stetig*, wenn dies für den vermöge der Transformation $z' = 1/z$ aus jenem ersten Gebiete hervorgehenden Bereich gilt. Wegen einer ähnlichen Definition bezüglich der konformen Abbildung der Umgebung des Punktes $z = \infty$ vgl. man Kap. 7, § 9.

II) es ist

$$\lim_{n=\infty} g_n = \infty.$$

Im Falle I) wird die Fläche Φ durch die Funktion

$$t = e^{-g-ih},$$

wo h die zu g konjugierte Funktion bedeutet, auf den Einheitskreis $|t| < 1$ bezogen. Dagegen läßt sich Φ im Falle II) auf die ganze endliche Ebene abbilden. Endlich entspricht dem fürs erste ausgeschlossenen Sonderfall, daß der Rand der unter A) beschriebenen Riemannschen Fläche nach Aufnahme einer endlichen Anzahl von Blättern ganz verschwindet, eine Abbildung auf die erweiterte Ebene resp. auf die Vollkugel.

Die Greensche Funktion. Unter der Greenschen Funktion des Bereiches Φ_n versteht man eine Funktion g_n von folgender Beschaffenheit.

a) Im Innern von Φ_n soll g_n, von einem einzigen Punkte O und von den Verzweigungspunkten abgesehen, eindeutig und harmonisch sein:

$$\Delta g_n = 0,$$

und außerdem soll g_n in den endlichen Verzweigungspunkten stetig sein. In den Punkten $z = \infty$, gleichviel ob diese Verzweigungspunkte sind oder nicht, soll g_n endlich bleiben; dann nähert sich g_n in jedem Blatte einem Grenzwerte, und soll im übrigen durch diesen Grenzwert im betreffenden Punkte erklärt werden.

b) In der Umgebung der Stelle O, welche auch ein gewöhnlicher Punkt der Fläche sei und dem Werte $z = 0$ entspreche, soll

$$g_n = \log \frac{1}{r} + \omega(x, y)$$

sein, wobei $\omega(x, y)$ in O endlich bleibt.

c) Am Rande von Φ_n soll g_n verschwinden.

Was nun den Existenzbeweis für diese Funktion anbetrifft, so fassen wir zunächst den Fall der aus T_1 und T_2 hervorgegangenen Fläche Ψ_2 ins Auge. Indem wir einen den Rand von T_1 nicht treffenden Kreis C um O als Mittelpunkt aus Ψ_2 entfernen, erhalten wir einen neuen Bereich Ψ_2', wofür die Randwertaufgabe durch die kombinatorischen Methoden von §§ 3, 4 lösen läßt. So kann man etwa den Randbogen (ξ_i, ξ_{i+1}), längs dessen T_1 und T_2 zusammen-

geheftet wurden, durch einen von geradlinigen Strecken begrenzten, den Kreis C nicht berührenden Streifen umgeben, wie in der beigefügten Figur des näheren angedeutet ist, und diesen Streifen dann längs des einen Ufers jenes Schnittes mit T_1, — oder vielmehr mit dem Rest von T_1, nachdem der Kreis C aus T_1 entfernt ist, — verschmelzen, wie dies in § 3, 1. Satz im Falle der Bereiche S_1 und S_2 geschehen ist. Dieser neue Bereich wird dann mit T_2 verschmolzen, und nun bleibt nur noch übrig, etwaige Einschnitte aufzuheben, indem man diese der Reihe nach auch mit solchen Streifen überdeckt, und dann ähnlich wie beim obigen Verschmelzungsprozesse verfährt.

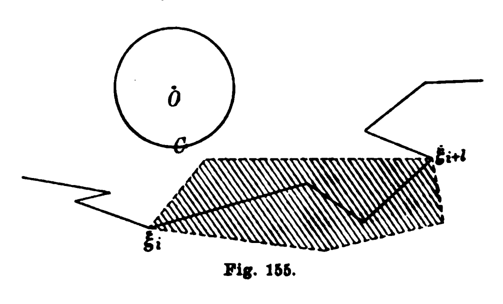


Fig. 155.

Daß der Beweis der soeben zitierten Sätze auch für den vorliegenden Fall, sowie für die weiter unten in Betracht kommenden Fälle gilt, erkennt man leicht. Nur in einem Punkte ist eine Ergänzung nötig. Die früher in § 3, S. 690 auftretende Funktion u wird im Falle der hier in Betracht kommenden ein- oder mehrblättrigen Bereiche durch Anwendung der kombinatorischen Methode von § 4 erhalten. Im Punkte A, wo also der Sprung in den Randwerten stattfinden soll, weist der Rand einen geradlinigen Winkel auf. Ein demselben entsprechender Kreissektor läßt sich in bekannter Weise auf einen Vollkreis abbilden. Löst man für diesen die Randwertaufgabe derart, daß den Schenkeln des genanten Winkels die Randwerte 0 resp. 1 zukommen, so erhält man hiermit die Ausgangsfunktion für das alternierende Verfahren. In der Umgebung von A verhält sich diese Funktion gerade wie jene frühere Funktion

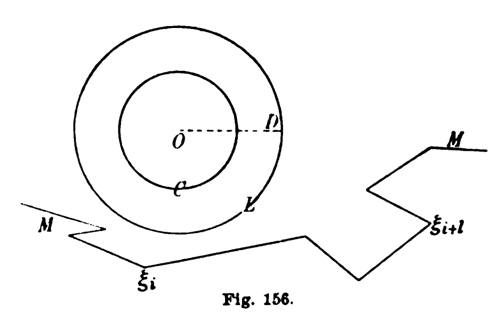


Fig. 156.

$$c \text{ arc tang } \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

und dasselbe gilt auch von allen späteren daraus hervorgehenden Funktionen. Im Punkte B geht man in ähnlicher Weise vor, und so kommt denn die in Aussicht genommene Funktion u zu Stande.

Für den Bereich Ψ_2' ist man also jetzt in der Lage, die Randwertaufgabe zu lösen. Derjenige Teil des Randes von Ψ_2', welcher mit dem Rande von Ψ_2 zusammenfällt, werde mit M bezeichnet. Sei $L: |z| = D$, ein Kreis, welcher im selben Blatte von Ψ_2', wie der Kreis C, liegt, diesen umfaßt, und keinen Punkt von M im Innern oder am Rande enthält. Um nun die Greensche Funktion für Ψ_2' aufzustellen, bilde man folgende Funktionen.

Die Funktion u_{2n} soll im Kreise L mit Ausnahme des Punktes O harmonisch und am Rande desselben stetig sein. Ferner soll

$$u_{2n} = \log \frac{1}{r} + \chi_{2n},$$

wo χ_{2n} im Punkte O endlich bleibt.[1])

Die Funktion u_{2n+1} soll in den gewöhnlichen Punkten von Ψ_2' harmonisch und in den Verzweigungspunkten und in den Punkten $z = \infty$, sowie am Rande, stetig sein.

Endlich sei

$$u_0 = \log \frac{D}{r},$$

$$u_{2n+1}|_M = 0, \quad u_{2n+1}|_C = u_{2n}|_C, \quad n \geqq 0;$$

$$u_{2n}|_L = u_{2n-1}|_L, \quad n > 0.$$

Hiermit sind die Funktionen u_{2n}, u_{2n+1} für alle Werte von n

---

1) Mit denselben Hilfsmitteln kann man einen allgemeineren Satz beweisen. Sei $F(z) = U + Vi$ eine Funktion, welche in den Punkten der Kreisperipherie C ausnahmslos eindeutig und analytisch ist; innerhalb C kann $F(z)$ beliebige Singularitäten aufweisen und auch analytische Fortsetzungen in andere Zweige gestatten. Dann gibt es eine in Ψ_2' harmonische Funktion u, welche längs M vorgeschriebene Randwerte annimmt und sich außerdem innerhalb C so verhält, wie U, indem die Differenz

$$u - U$$

an der Peripherie von C harmonisch ist und eine harmonische Fortsetzung über das ganze Innere von C gestattet. Vgl. Neumann, *Abelsche Integrale,* 2. Aufl., 1884, S. 461.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Fälle:

(a) $$F(z) = \frac{1}{z}; \quad U = \frac{\cos\theta}{r}, \quad V = \frac{-\sin\theta}{r};$$

(b) $$F(z) = \log\frac{z-a}{z-b},$$

wo a, b zwei innere Punkte von C bedeuten.

eindeutig bestimmt. Setzt man nun u_{2n+1} und u_{2n} in der Form an:

$$u_{2n+1} = u_1 + (u_3 - u_1) + \cdots + (u_{2n+1} - u_{2n-1}),$$
$$u_{2n} \quad = u_0 + (u_2 - u_0) + \cdots + (u_{2n} - u_{2n-2}),$$

so läßt sich durch eine dem Beweise des 2. Satzes von § 3 genau nachgebildete Schlußweise zeigen, daß diese Reihen gleichmäßig konvergieren, woraus dann folgt, daß die Grenzfunktionen

$$u' = \lim_{n=\infty} u_{2n+1}, \qquad u'' = \lim_{n=\infty} u_{2n}$$

harmonisch sind. Ferner stimmen u' und u'' am Rande des durch C und L begrenzten Kreisrings überein, und daher stellen sie gegenseitige harmonische Fortsetzungen voneinander vor. Durch die beiden Funktionen u' und u'' zusammengenommen wird nunmehr die in Aussicht genommene Greensche Funktion des Bereichs Ψ_2 geliefert.

Für einen beliebigen Bereich Φ_n läßt sich der Existenzbeweis für die Greensche Funktion mit denselben Hilfsmitteln führen.

Konvergenz der Greenschen Funktion g_n für $n = \infty$. Sei m eine beliebig große natürliche Zahl, so wird die Funktion

$$u_n = g_{n+1} - g_n, \qquad n \geqq m,$$

von einer hebbaren Unstetigkeit im Punkte O abgesehen, in den gewöhnlichen Punkten von Φ_m harmonisch, und in den Verzweigungspunkten und den Punkten $z = \infty$, sowie am Rande, stetig sein. Im Punkte O werde u_n noch als der Grenzwert von $g_{n+1} - g_n$ erklärt, wenn der Punkt (x, y) dem Punkte O zustrebt. Dann gilt für u_n der Satz vom Maximum und Minimum. Da nun fernerhin am Rande M von Φ_m

$$u_n|_M \geqq 0$$

ist, wobei das untere Zeichen nicht durchweg gilt, so ist im Innern von Φ_m

$$u_n > 0, \qquad \text{und insbesondere} \qquad u_n|_0 > 0.$$

Schreibt man hiernach g_n in der Form her:

$$g_n = g_m + \sum_{k=m}^{n-1} (g_{k+1} - g_k) = g_m + \sum_{k=m}^{n-1} u_k,$$

so erkennt man aus dem Harnackschen Satze, Kap. 13, § 4, daß, wenn g_n in einem einzigen von O verschiedenen innern Punkte von Φ_m

konvergiert, g_n dann im ganzen Bereich Φ_m (nach Entfernung des Punktes O) gleichmäßig konvergiert.

In der Umgebung von O sei

$$g_n = \log\frac{1}{r} + \gamma_n + \omega_n(x, y), \qquad \lim_{x=0,\, y=0} \omega_n(x, y) = 0.$$

Dann wird

$$u_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n + \omega_{n+1} - \omega_n,$$

$$u_n|_O = \gamma_{n+1} - \gamma_n$$

Daraus erhellt, a) daß

$$\gamma_n < \gamma_{n+1}$$

ist; sowie b) daß eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz von g_n in Φ_m darin besteht, daß γ_n bei unbegrenzt wachsendem n einem Grenzwerte zustrebt. Demgemäß lassen sich die vorhin schon erwähnten Fälle I) und II) jetzt, wie folgt, charakterisieren:

I) $$\lim_{n=\infty} \gamma_n \text{ existiert;}$$

II) $$\lim_{n=\infty} \gamma_n = +\infty.$$

Analysis situs.[1]) Wir betrachten dreierlei mehrblättrige Bereiche S, worunter keine Doppelflächen auftreten, und zwar sind das

a) berandete Flächen der erweiterten Ebene mit einer endlichen Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten. Dabei soll der Rand aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven bestehen, welche indessen nicht geschlossen zu sein brauchen, sie können auch als Einschnitte auftreten.[2]) Die Verzweigungspunkte sind notwendig von endlicher Ordnung.

Beispiele: Die vorstehenden Flächen Φ_n, sowie die zweiblättrige elliptische Fläche mit Verzweigungspunkten in $z = \pm 1, \pm 2$, aus deren einem Blatte die Punkte z, wofür $|z| > 3$ ist, nun entfernt sein sollen;

1) Die hier zur Sprache kommenden Verhältnisse sind zum ersten Male von Riemann in der Inauguraldissertation, sowie in den Abhandlungen über Abelsche Funktionen erörtert worden; vgl. hierüber Neumann, *Abelsche Integrale*, 2. Aufl., 1884, 7. Kap., und Appell et Goursat, *Fonctions algébriques*, Kap. 3 und 5.

2) Sei C eine durch den Punkt $z = \infty$ gehende Kurve, und man unterziehe die z-Ebene einer linearen Transformation, wodurch C in eine im Endlichen gelegene Kurve C' übergeführt wird. Dann heißt C *regulär* (S. 150) resp. *analytisch*, falls C' es ist.

b) unberandete nicht geschlossene Flächen mit Verzweigungspunkten endlicher Ordnung. Dabei hängt das n-te Blatt durch eine endliche Anzahl k von Verzweigungspunkten mit seinen Nachbarn zusammen. Für unsere Zwecke wird k für alle Werte von n unter einer festen Zahl bleiben, doch könnte diese Bedingung füglich aufgehoben werden. Auch könnte man Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung zulassen. Wir wollen indessen an der engeren Forderung festhalten. Als Beispiele einer solchen Fläche seien die vorstehende Grenzfläche Φ, sowie die einem überall endlichen elliptischen Integral entsprechende Fläche erwähnt;

c) algebraische Flächen, d. h. geschlossene Flächen mit einer endlichen Anzahl von Blättern und Verzweigungspunkten.

Von einer solchen Fläche S sagen wir, sie *hängt einfach zusammen*, falls sie, wie folgt, beschaffen ist. Gehört sie zur Klasse a), so soll sie durch jeden Querschnitt zerfallen. Gehört sie dagegen zur Klasse *b*) oder c), so soll sie durch jeden Rückkehrschnitt[1]) zerlegt werden, und zwar soll der eine der beiden dadurch entstehenden Teile, falls sie zur Klasse b) gehört, stets zur Klasse a) gehören und einfach zusammenhängen.

Vermöge der in Kap. 5, § 6, 7 entwickelten Sätze und im Anschluß an Neumann, a. a. O., beweist man folgende Theoreme.

1) Hängt ein Bereich S der Klasse a) einfach zusammen, so besteht sein Rand aus einem Stücke. Durch einen Rückkehrschnitt wird S dann in zwei Bereiche zerlegt, die beide zur Klasse a) gehören, und wovon der eine einfach zusammenhängt und lediglich von den Punkten des Schnittes berandet wird.

2) Sind S_1, S_2 zwei einfach zusammenhängende Flächen der Klasse a), welche ein Stück C ihres Randes gemeinsam haben, indem sie von verschiedenen Seiten her an C stoßen, und vereinigt man S_1 und S_2 längs C, aber sonst nirgends, zu einem einzigen Bereiche S, so hängt auch S einfach zusammen.

3) Ein Bereich S der Klasse a) läßt sich, falls er im Endlichen liegt, in eine endliche Anzahl von Bereichen σ (Kap. 5, § 9) zerlegen. Hat er dagegen den Punkt $z = \infty$ zum innern oder Randpunkt, und

1) Die Erweiterung der in Kap. 5, § 7 gegebenen Definition eines Quer- resp. Rückkehrschnittes liegt hier auf der Hand. So besteht z. B. letzterer aus einer ganz innerhalb der Fläche gelegenen einfachen regulären geschlossenen Kurve.

schneidet man ihn längs eines geeigneten Kreises $|z| = G$ in allen Blättern auf, so gilt der soeben ausgesprochene Satz für den im Endlichen gelegenen Teil der also resultierenden Fläche, während die übrigen Stücke durch die Transformation $z' = 1/z$ in Bereiche übergeführt werden, welche ihrerseits in eine endliche Anzahl von Bereichen σ zerfällt werden können.

4) Sei S_1 ein einfach zusammenhängender Bereich der Klasse a), dessen Rand im Innern einer schlichten Kreisfläche K liegt, derart, daß durch Verschmelzung von S_1 und K eine geschlossene Fläche S der Klasse c) entsteht. Dann hängt auch S einfach zusammen.

Die Flächen Φ_n des gegenwärtigen Paragraphen, sowie auch die Grenzfläche Φ, sind offenbar Beispiele von einfach zusammenhängenden Flächen.

Abbildung des Bereiches Φ_n auf einen Kreis. Vermöge der Greenschen Funktion g_n des Bereichs Φ_n und der zu g_n konjugierten Funktion h_n wird der Bereich Φ_n durch die Funktion

$$t_n = e^{-g_n - ih_n}$$

ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform auf den Einheitskreis $|t| \leqq 1$ abgebildet.

Der Beweis, daß der Ort

(a) $$g_n = \mu > 0$$

aus einer oder mehreren regulären Kurven besteht, gestaltet sich nämlich genau so, wie früher. Daraus setzt man dann eine auf der Fläche einfache geschlossene reguläre Kurve Γ zusammen, wodurch denn S in zwei Teile zerlegt wird, wovon der eine allein durch die Punkte von Γ begrenzt ist und einfach zusammenhängt. Ist (a) damit noch nicht erschöpft, so wird es entweder einen aus einem Teil von (a) bestehenden Querschnitt des einen dieser beiden Bereiche oder aber einen in einem der beiden Bereiche gelegenen und aus einem Teile von (a) bestehenden Rückkehrschnitt geben. In jedem dieser Fälle schließt man nun auf die Existenz eines Bereiches, der ganz von Punkten von (a) begrenzt wird und den Punkt O nicht enthält. In diesem Gebiete müßte also durchweg $g_n = \mu$ sein. — Von hier aus gilt der frühere Beweis im Falle eines schlichten Bereiches ungeändert.

§ 10. Fortsetzung; die Abbildung im Falle I.

Ein Hilfssatz. Der Beweis des Hauptsatzes gründet sich auf einen allgemeinen Satz der Funktionentheorie, den wir Hurwitz zu verdanken haben, und welchen wir nun vorausschicken wollen.

Satz von Hurwitz.[1]) *In einem Bereiche S der komplexen z-Ebene sei $\varphi(z, n)$ für jeden ganzzahligen Wert des Parameters n eine analytische Funktion von z, welche überdies am Rande von S stetig ist.*[2]) *Ferner möge $\varphi(z, n)$ beim Grenzübergange $n = \infty$ gleichmäßig konvergieren; und endlich soll die Grenzfunktion:*

$$\varphi(z) = \lim_{n=\infty} \varphi(z, n)$$

am Rande von S nicht verschwinden. Dann stimmt die Anzahl der in S befindlichen Wurzeln von $\varphi(z)$ mit derjenigen der Wurzeln von $\varphi(z, n)$ für alle über einer bestimmten Grenze gelegenen Werte von n: $n \geqq \mu$, überein.

An Stelle des schlichten Bereichs S kann auch eine mehrblättrige Riemannsche Fläche der Klasse a), § 9, *treten. Ist dann ein Punkt $z = \infty$ ein innerer, ein Verzweigungs-, oder ein Randpunkt, so soll $\varphi(z, n)$ dort im ersten Falle analytisch, im zweiten stetig, und im dritten stetig und von Null verschieden sein.*

Um den Kern der Schlußweise deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir den Beweis zuerst bloß für den Fall eines regulären Bereichs S (vgl. Kap. 2, § 2) führen, und dabei außerdem noch voraussetzen, daß auch $\varphi'(z, n) = \partial\varphi(z, n)/\partial z$ stetige Randwerte annimmt und in S gleichmäßig konvergiert.[3]) Die Anzahl der in Rede stehenden Wurzeln wird dann nach Kap. 7, § 11, 3. Satz durch das Integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi'(z, n)\,dz}{\varphi(z, n)}$$

gegeben, wobei die Integration in positivem Sinne über den Rand von S zu erstrecken ist. Nun haben wir

$$\varphi(z, n) = \varphi(z) + \zeta_n,$$
$$\varphi'(z, n) = \varphi'(z) + \zeta_n',$$

wobei

$$|\zeta_n| < \varepsilon, \qquad |\zeta_n'| < \varepsilon$$

bleibt, sobald nur $n \geqq \mu$ genommen wird. Nimmt man hier ε kleiner

1) A. Hurwitz, *Math. Ann.*, Bd. 33 (1888), S. 248.

2) An Stelle der besonderen Menge $\alpha = n$ mit der Häufungsstelle $\alpha = \infty$ kann eine beliebige Menge mit der Häufungsstelle $\alpha = \bar{\alpha}$ treten, ähnlich wie in Kap. 7, § 5, 6. Satz.

3) Wir erinnern daran, daß die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $\varphi(z, n)$, $\varphi'(z, n)$ im abgeschlossenen Bereiche S gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz dieser Funktionen auf dem Rande von S ist.

als der Minimalwert von $|\varphi(z)|$ am Rande von S, so wird $\varphi(z, n)$ am Rande nicht verschwinden. Aus der für die Randpunkte von S geschriebenen Relation:

$$\frac{\varphi'(z, n)}{\varphi(z, n)} - \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\varphi(z)\zeta_n' - \varphi'(z)\zeta_n}{\varphi(z)[\varphi(z) + \zeta_n]}$$

erkennen wir nun, daß die Differenz der Werte der obigen Integrale bei geeigneter Wahl von μ weniger als 1 beträgt. Da diese Differenz aber ganzzahlig ist, so muß sie eben gleich 0 sein, und hiermit ist der Beweis unter den genannten Voraussetzungen fertig.

Treffen jene Annahmen bzgl. $\varphi'(z, n)$ nicht zu, so kann man den Bereich S immerhin nach dem Satze von Kap. 5, § 3 in Teilbereiche T_n entwickeln, um dann ein geeignetes T_k an Stelle von S treten zu lassen.

Dann wird $\varphi(z)$ am Rande von T_k nicht verschwinden. Daß aber auch $\varphi'(z, n)$ in T_k gleichmäßig konvergiert, beweist man dadurch, daß man $\varphi'(z, n)$ im Bereich T_{k+1} durch die Cauchysche Integralformel, S. 298, darstellt.

Der Fall, daß der Punkt ∞ im Innern oder am Rande von S liegt, bietet nun keine Schwierigkeit.

Endlich läßt sich ein Bereich S der Klasse a), § 9, in eine endliche Anzahl schlichter Bereiche und mehrfach überdeckter, je mit einem Windungspunkte ausgestatteter Kreisscheiben derart zerlegen, daß der Satz für jeden dieser Bereiche gilt.

Beweis des Hauptsatzes. Wir nehmen jetzt an, daß Fall I) vorliegt, und setzen

$$\lim_{n=\infty} g_n = g,$$

$$h_n = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -\frac{\partial g_n}{\partial y}\, dx + \frac{\partial g_n}{\partial x}\, dy,$$

wo (a, b) einen von O verschiedenen Punkt von Φ_1 bedeutet. Da sowohl g_n als auch $\partial g_n/\partial x$ und $\partial g_n/\partial y$ in einem beliebig vorgegebenen Bereiche Φ_m nach Entfernung des Punktes O und der Umgebungen der Verzweigungspunkte gleichmäßig konvergieren, vgl. Kap. 13, § 4, 12. u. 11. Satz, 1. Zusatz — man bedenke doch, daß Φ_m schließlich ganz innerhalb $\Phi_{m'}$ zu liegen kommt, so bald nur $m' > m$ passend gewählt wird —, so wird ein Zweig von h_n in einem einfach zusammenhängenden den Punkt O nicht im Innern enthaltenden Teil S von Φ_m ebenfalls gleichmäßig konvergieren, und die Grenzfunktion h wird zu g kon-

jugiert sein:

$$\lim_{n=\infty} h_n = h = \int_{(a,b)}^{(x,y)} -\frac{\partial g}{\partial y}\,dx + \frac{\partial g}{\partial x}\,dy.$$

Wir zerlegen jetzt Φ_m nach dem 3. Satze, S. 720, in eine endliche Anzahl einfach zusammenhängender Bereiche, wovon keiner den Punkt O im Innern enthält. In jedem davon konvergiert dann ein Zweig der Funktion

$$g_n + ih_n$$

gleichmäßig. Hieraus erkennt man, daß die in Φ_m eindeutige analytische Funktion

(1) $$t_n = e^{-g_n - ih_n}$$

gleichmäßig gegen eine auch in Φ_m analytische Grenzfunktion

(2) $$t = e^{-g-ih}$$

konvergiert.

Ich behaupte nun: die Funktion t nimmt niemals den gleichen Wert A in zwei getrennten Punkten P und Q der Fläche Φ an. Im andern Fall sei Φ_m eine Fläche, welche P und Q im Innern umfaßt. Sollte t den Wert A auch am Rande von Φ_m annehmen, so ändere man Φ_m in der Nähe solcher Punkte ein wenig ab, damit dieser Übelstand vermieden wird. Im abgeänderten Bereiche genügt nun die Funktion

$$t_n - A$$

allen Bedingungen des Hurwitzschen Satzes. Demnach hat sie für genügend große Werte von n dieselbe Anzahl von Nullstellen in Φ_m, wie die Funktion

$$t - A.$$

Nun nimmt aber t_n einen Wert höchstens einmal an. Hiermit ist man zu einem Widerspruch geführt, und die Behauptung ist erwiesen.

Es hat sich also ergeben, daß die Grenzfläche Φ vermöge der Funktion (2) auf einen schlichten, innerhalb des Einheitskreises $|t| < 1$ gelegenen Bereich ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform abgebildet wird. Ob dieser Bereich indessen das ganze Innere des Kreises ausfüllt, tritt durch die vorausgehenden Entwicklungen nicht zu Tage. Wir wissen aber, daß er nachträglich auf einen Vollkreis konform bezogen werden kann, vgl. § 1. Daraus erkennt man, daß die Fläche Φ doch vermöge einer Funktion

$$z = \varphi(t)$$

auf das Innere des Einheitskreises $|t| < 1$ ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform bezogen werden kann. Dabei geht w ebenfalls in eine eindeutige Funktion $\psi(t)$ über, welche im Bereiche $|t| < 1$ keine anderen Singularitäten als Pole aufweist. Hiermit ist denn das vorgelegte algebraische Gebilde vermöge der Funktionen

$$z = \varphi(t), \qquad w = \psi(t), \qquad |t| < 1$$

uniformisiert.

Daß $\varphi(t)$, $\psi(t)$ in der Tat automorphe Funktionen sind, d. h. daß sie lineare Transformationen in sich zulassen, erhellt daraus, daß die Fläche Φ konforme Transformationen in sich gestattet, indem man ein Blatt, etwa T_1, des ersten Komplexes Φ_1 auf das entsprechende Blatt des zweiten Komplexes projiziert. Dem entspricht eine Transformation des Kreisinnern auf sich selbst, welche ausnahmslos ein-eindeutig und konform ist. Nach § 1, Ende, kann aber eine solche Transformation nur eine lineare sein.

Die hiermit erhaltene Funktion $\varphi(t)$ hat übrigens den Einheitskreis zur natürlichen Grenze. Im andern Falle würde man nämlich $\varphi(t)$ bis an einen Punkt $t = t_0$ dieses Kreises analytisch fortsetzen können. Das würde aber zu einem Punkte z_0 der Fläche Φ führen, in welchem die Greensche Funktion g verschwände, und das trifft eben nicht zu.

§ 11. Der Koebesche Satz.

Der Fall II) von § 9: $\lim\limits_{n=\infty} \gamma_n = \infty$, subsumiert sich unter einem sehr allgemeinen Satze, den Koebe[1]) bewiesen hat. Koebe betrachtet eine unendliche Folge von Bereichen $\Phi_1, \Phi_2, \cdots$, welche folgendermaßen beschaffen sind.

a) Φ_n gehört zur Klasse a), § 9, und hängt außerdem einfach zusammen.

b) Jeder innere Punkt von Φ_n ist auch als innerer Punkt in Φ_{n+1} enthalten.

Sei $\Phi = \lim\limits_{n=\infty} \Phi_n$ die Grenzfläche, d. h. eine Fläche, welche jeden Bereich Φ_n enthält, während andererseits ein beliebiger Punkt P von

1) Koebe, *Math. Ann.*, Bd. 67 (1909) S. 146. Die in der Folge abgeleiteten Resultate, sowie die Fallunterscheidung von § 9, B), rühren von Koebe her, und auch die Beweismethoden sind im wesentlichen in seinen Arbeiten enthalten. In den Einzelheiten der Ausführung weicht aber die gegenwärtige Darstellung von der Koebeschen ab.

Φ in einem bestimmten Φ_n vorkommt. Dann hängt Φ auch einfach zusammen.

Für den Bereich Φ_n läßt sich die Existenz der Greenschen Funktion g_n, deren Pol in einem inneren Punkte O: $x = 0$, $y = 0$, von Φ_1 liegt, in derselben Weise feststellen, wie in dem § 9 behandelten besonderen Falle. In der Nähe von O sei

$$g_n = \log \frac{1}{r} + \gamma_n + \omega_n(x, y),$$

wo ω_n sich in O harmonisch verhält und dort verschwindet.

Satz von Koebe. *Ist* $\lim_{n=\infty} \gamma_n = +\infty$, *so läßt sich* Φ *ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform auf die ganze endliche Ebene abbilden.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Abbildungssatze, welchen wir jetzt entwickeln wollen. Letzterer Satz spielt auch bei den Untersuchungen von Koebe über die Uniformisierung algebraischer Gebilde vermöge automorpher Funktionen des Schottkyschen Typus eine wichtige Rolle.

§ 12. Ein Abbildungssatz.

Sei S ein schlichter, endlicher oder unendlicher, einfach zusammenhängender Bereich der z-Ebene, O: $z = 0$ ein innerer Punkt desselben,

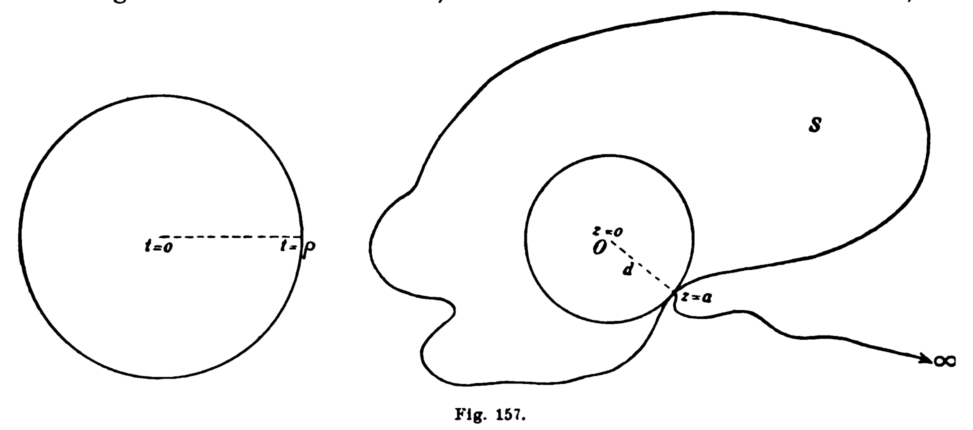


Fig. 157.

und g die Greensche Funktion von S, deren Pol in O liegt. Was den Rand von S anbetrifft, so genügt es wohl für die Anwendungen vorauszusetzen, daß er aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven besteht. Setzt man

$$g = \log \frac{1}{r} + \gamma + \omega_1(x, y), \qquad \lim_{x=0, y=0} \omega_1(x, y) = 0;$$

$$h = -\theta + \omega_2(x, y),$$

wo h die zu g konjugierte Funktion bedeutet, so wird S vermöge der Funktion

$$t = f(z) = e^{-g-ih} = e^{-\gamma} z e^{-\omega_1 - i\omega_2}$$

auf den Einheitskreis der t-Ebene abgebildet. Dabei hat das Vergrößerungsverhältnis im Punkte O den Wert

$$|f'(0)| = e^{-\gamma}.$$

Anstatt den Bereich S auf den Einheitskreis zu beziehen, betrachtet Koebe die Abbildung von S auf einen Kreis

$$|t| < \varrho,$$

wobei das Vergrößerungsverhältnis im Punkte O jetzt den Wert 1 hat. Diese Abbildung wird offenbar durch die Funktion

$$t = e^{\gamma} f(z) = z e^{-\omega_1 - i\omega_2}$$

geleistet, woraus auch erhellt, daß

(1) $$\varrho = e^{\gamma}$$

ist.

Endlich werde die kürzeste Entfernung eines Randpunktes des Bereichs S vom Punkte O mit d bezeichnet.

1. Satz.[1]) *Sei λ eine beliebige positive Größe, und man betrachte alle diejenigen Bereiche S, wofür $d = \lambda$ ist. Für diese Bereiche genügt der zugehörige Wert von ϱ der Relation:*

$$\lambda \leq \varrho \leq \mathfrak{k}\lambda,$$

wo $\mathfrak{k}$ eine, die Einheit übertreffende numerische Konstante bedeutet.

Behufs des Beweises zeigen wir, a) daß λ der Minimalwert von ϱ ist, b) daß ϱ eine obere Grenze

$$R = \chi(\lambda)$$

besitzt; c) daß

$$\chi(\lambda) = \mathfrak{k}\lambda$$

ist, wo $\mathfrak{k} > 1$ eine numerische Konstante bedeutet.

---

1) Koebe stellt die Existenz einer oberen Grenze der Radien ϱ fest, bestimmt aber nicht die Abhängigkeit derselben von λ. Für die absolute Konstante $\mathfrak{k}$ wäre der Name, die *Koebesche Konstante* eine passende Bezeichnung.

ad a) Daß ϱ den Wert λ wirklich annimmt, erhellt sofort, indem man als Bereich S den Kreis $|z| < \lambda$ nimmt, wofür denn $d = \lambda$ und

$$f(z) = e^{ci}\frac{z}{\lambda}, \qquad \lambda = e^{\gamma} = \varrho$$

ist.

Ist nun S irgend ein anderer der bewußten Bereiche, so bilde man die Greensche Funktion G des Kreises K: $|z| < d = \lambda$, deren Pol in O liegt:

$$G = \log\frac{\lambda}{r} = \log\frac{1}{r} + \Gamma, \qquad \Gamma = \log\lambda.$$

Dann ist die Funktion $g - G$ in K harmonisch[1]), und ferner ist

$$0 \leqq g - G \quad \text{am Rande von } K,$$

wobei übrigens das untere Zeichen nicht durchweg gelten kann. Daher ist

$$0 < g - G \quad \text{im Innern von } K,$$

woraus nun folgt, daß

$$\lim_{x=0,\; y=0} (g - G) = \gamma - \Gamma > 0$$

ist. Darum ist

$$e^{\Gamma} < e^{\gamma}, \qquad \text{oder} \quad \lambda < \varrho, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

ad b) Sei $z = a$, $|a| = d = \lambda$, ein Randpunkt von S, und man ziehe die zweiblättrige Riemannsche Fläche heran, deren Blätter bloß in den beiden Verzweigungspunkten $z = a$ und $z = \infty$ zusammenhängen, vgl. Fig. 157. Wir denken uns S im ersten Blatte dieser Fläche gelegen, und heben aus dem zweiten Blatte derselben den Kreis $|z| < \lambda$ fort. Sei G die Greensche Funktion der resultierenden Fläche, und sei der im ersten Blatte gelegene Punkt O: $z = 0$ deren Pol. In der Nähe von O sei ferner

$$G = \log\frac{1}{r} + \Gamma + \omega(x, y),$$

wo $\lim\limits_{x=0,\; y=0} \omega(x, y) = 0$ ist. Dann wird die Funktion $G - g$ im Bereiche

1) Diese Funktion hat zwar in O eine hebbare Singularität. Wir denken uns aber die Funktion in diesem Punkte durch ihren Grenzwert:

$$\lim_{x=0,\; y=0} (g - G)$$

erklärt.

Eine ähnliche Bemerkung bezüglich der Funktion $\omega_1(x, y)$ wäre vorhin auch am Platze gewesen.

S harmonisch[1]) sein, und außerdem wird

$$0 \leqq G - g \quad \text{am Rande von } S,$$

wobei das untere Zeichen nicht durchweg gilt. Daher ist

$$0 < G - g \quad \text{im Innern von } S,$$

woraus nun folgt, daß

$$\lim_{x=0,\, y=0} (G - g) = \Gamma - \gamma > 0$$

ist. Darum ist

$$e^{\gamma} < e^{\Gamma}, \quad \text{oder} \quad \varrho < e^{\Gamma}.$$

Die Zahl e^{Γ} hängt aber von S nicht ab. Hiermit ist die Existenz einer oberen Grenze R für ϱ festgestellt. Diese ist eine Funktion von λ und werde mit $\chi(\lambda)$ bezeichnet:

$$R = \chi(\lambda).$$

Ob die obere Grenze für einen bestimmten Bereich wirklich erreicht wird und somit zum Maximum wird, bleibt dahingestellt.[2])

ad c) Seien λ_0 und $\lambda_1 > \lambda_0$ irgend zwei Werte von λ, und seien

$$R_0 = \chi(\lambda_0), \qquad R_1 = \chi(\lambda_1).$$

Dann können wir zeigen, daß

$$\frac{R_0}{\lambda_0} = \frac{R_1}{\lambda_1}$$

ist, woraus dann folgt, daß $\chi(\lambda) = (R_0/\lambda_0)\,\lambda$ ist.

Gibt es einen dem Werte λ_0 entsprechenden Bereich S_0 der z-Ebene, wofür ϱ_0 die obere Grenze R_0 wirklich erreicht, so sei S_1 derjenige Bereich der z'-Ebene, welcher durch die Transformation

$$z' = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} z$$

aus S_0 hervorgeht. Dann entspricht S_1 dem Werte λ_1, und die zugehörige Zahl ϱ hat den Wert

$$\varrho_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} R_0.$$

Hiernach ist sicher

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} R_0 \leqq R_1.$$

1) Man vergleiche die vorstehende Anmerkung.

2) Hierüber vergleiche man eine Bemerkung von Koebe, a. a. O., S. 210, Anm.

Würde nun das obere Zeichen gelten, so müßte es einen bestimmten dem Werte $\lambda = \lambda_1$ entprechenden Bereich $\bar{S}_1$ der z'-Ebene geben, wofür

$$\bar{\varrho}_1 > \frac{\lambda_1}{\lambda_0} R_0$$

ist. Führt man jetzt $\bar{S}_1$ vermöge der Transformation

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} z'$$

in einen Bereiche $\bar{S}_0$ der z-Ebene über, so wird für $\bar{S}_0$

$$\lambda = \lambda_0, \qquad \varrho = \bar{\varrho}_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \bar{\varrho}_1 > R_0$$

sein, und hiermit stößt man auf einen Widerspruch.

Wird dagegen die obere Grenze R_0 nicht erreicht, so wird man S_0 immerhin so annehmen können, daß

$$\varrho_0 > R_0 - \varepsilon$$

wird, wo ε eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl bedeutet. Dann wird vermöge der ersten Transformation, $z' = (\lambda_1/\lambda_0) z$, aus S_0 ein Bereich S_1 entstehen, wofür

$$\varrho_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \varrho_0 \leqq R_1$$

ist. Mithin wird

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} (R_0 - \varepsilon) < R_1.$$

Hier sind λ_0, λ_1, R_0, R_1 unabhängig von ε, folglich muß

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} R_0 \leqq R_1$$

sein. Von hier ab wiederholt sich die frühere Schlußweise.

Der soeben bewiesene Satz läßt sich noch, wie folgt, aussprechen.

2. Satz. *Die Konstanten γ und d eines Bereichs S sind an die Relationen geknüpft:*

i) $$\log d \leqq \gamma \leqq \log d + \log \mathfrak{k};$$

oder, anders geschrieben:

ii) $$\frac{1}{\mathfrak{k}} e^\gamma \leqq d \leqq e^\gamma.$$

§ 13. Beweis des Hauptsatzes.

Die Bereiche $S_\nu^{(n)}$. In § 9 ist gezeigt worden, daß sich der Bereich Φ_n vermöge der Greenschen Funktion

$$g_n = \log\frac{1}{r} + \gamma_n + \omega_n(x, y),$$

wo $\lim\limits_{x=0,\, y=0} \omega_n(x, y) = 0$ ist, ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform auf den Einheitskreis der t-Ebene abbilden läßt. Indem wir ihn jetzt statt dessen auf einen Kreis $|t| < \varrho_n$ beziehen, derart daß das Vergrößerungsverhältnis — oder vielmehr dt_n/dz — im Punkte $z = 0$ den Wert 1 hat, wird

$$\varrho_n = e^{\gamma_n}.$$

Legen wir n einen festen Wert $n = \nu$ bei und bezeichnen wir den Kreis

$$|t| \leq \varrho_\nu = e^{\gamma_\nu} \quad \text{mit } S_\nu,$$

so werden zugleich durch diese Abbildung die Bereiche Φ_n, $n < \nu$, auf Bereiche $S_\nu^{(n)}$ ($S_\nu^{(\nu)} = S_\nu$) bezogen, welche ineinander eingeschachtelt liegen. Und nun behaupte ich, *daß die Greensche Funktion des Bereichs $S_\nu^{(n)}$, $n \leq \nu$:*

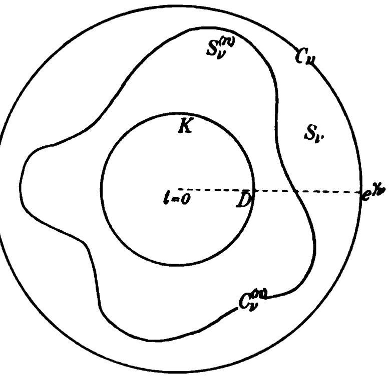


Fig. 158.

$$g_\nu^{(n)} = \log\frac{1}{r'} + \gamma_\nu^{(n)} + \omega_\nu^{(n)}(x', y'), \qquad \lim_{x'=0,\, y'=0} \omega_\nu^{(n)}(x', y') = 0,$$

$$t = x' + iy', \qquad r' = |t|,$$

dieselbe Konstante $\gamma_\nu^{(n)}$ hat, wie die Greensche Funktion g_n des Bereichs Φ_n:

$$\gamma_\nu^{(n)} = \gamma_n.$$

In der Tat werde Φ_n auf den Einheitskreis $\mathfrak{K}: |w| = 1$ vermöge der Funktion

$$w = F(z), \qquad F(0) = 0, \qquad F'(0) = e^{-\gamma_n}$$

abgebildet. Ferner werde Φ_n auf $S_\nu^{(n)}$ mittels der Funktion

$$t = G(z), \qquad G(0) = 0, \qquad G'(0) = 1$$

bezogen. Und endlich soll $S_\nu^{(n)}$ in $\mathfrak{K}$ durch die Funktion

$$w = H(t), \qquad H(0) = 0, \qquad H'(0) = e^{-\gamma_\nu^{(n)}}$$

übergeführt werden. Dann ist

$$F(z) = H(G(z)).$$

Demgemäß wird

$$F'(z) = H'(G(z))\,G'(z).$$

Setzt man in dieser letzten Relation $z = 0$, so kommt:

$$e^{-\gamma_n} = e^{-\gamma_\nu^{(n)}},$$

also $\gamma_n = \gamma_\nu^{(n)}$, w. z. b. w.

Auf Grund dieser Erkenntnis nebst dem letzten Satze von § 12 können wir jetzt, wie folgt, weiter schließen. Einer beliebig großen positiven Zahl D entspricht nach Voraussetzung eine natürliche Zahl m, derart daß

$$\frac{1}{\mathfrak{k}}\, e^{\gamma_m} > D$$

wird. Bezeichnet man nun mit K den Kreis der t-Ebene: $|t| \leq D$, und nimmt man $\nu > m$, so wird jenem Satze zufolge

$$d \geqq \frac{e^{\gamma_m}}{\mathfrak{k}},$$

wo d die geringste Entfernung eines Randpunktes von $S_\nu^{(m)}$ vom Punkte $t = 0$ bedeutet, und *daher wird jeder Bereich* $S_\nu^{(n)}$, $m \leq n \leq \nu$, *den Kreis* K *im Innern enthalten.*

Der Beweis. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr zum eigentlichen Beweise des Koebeschen Satzes von § 11 über. Sei

$$t = f_n(z)$$

die Funktion, welche Φ_n auf den Kreis

$$S_n: \quad |t| \leqq \varrho_n = e^{\gamma_n}$$

abbildet. Hinsichtlich dieser Funktion wollen wir nun folgendes beweisen:

Sei S ein beliebiger Bereich, welcher nebst seinem Rande innerhalb der Grenzfläche Φ liegt. Dann konvergiert $f_n(z)$ gleichmäßig in S. Es werde

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

gesetzt.

Durch die Funktion

$$t = f(z)$$

wird die Grenzfläche Φ ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform auf die ganze eigentliche Ebene abgebildet.

Wir bilden uns zunächst die Funktion

$$F_n(z) = \frac{1}{f_n(z)}$$

und zeigen,

a) daß $F_n(z)$ im Bereiche S gleichmäßig konvergiert, — sollte S den Punkt O umfassen, so soll dieser ja erst aus S entfernt werden, —

b) daß der Wert der Grenzfunktion $F(z)$ außerhalb Φ_n gleichmäßig gegen 0 abnimmt.

ad a) Sei ε eine beliebig kleine positive Größe und sei Φ_q ein Bereich, welcher S umfaßt. Dann soll bewiesen werden, daß es eine natürliche Zahl $m \geqq q$ gibt, derart, daß im Bereiche Φ_q

$$|F_{\nu'}(z) - F_\nu(z)| < \varepsilon$$

bleibt,[1]) sobald nur $\nu, \nu' \geqq m$ sind.

Zu dem Zwecke nehmen wir eine Zahl $D = 2/\varepsilon$ an und bestimmen die dazu gehörige Zahl m, die im übrigen $\geqq q$ genommen werde.

Sei $\nu > m$ eine beliebige Zahl, und man bilde den Bereich Φ_ν auf den Kreis S_ν ab. Ist n an die Bedingung geknüpft: $m \leqq n \leqq \nu$, so wird der Rand $C_\nu^{(n)}$ von $S_\nu^{(n)}$ außerhalb K liegen.

Andererseits geht dabei die Funktion $F_\nu(z)$ in $1/t$ über, und da nun

$$\left|\frac{1}{t}\right|_K = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ist, so wird} \qquad \left|\frac{1}{t}\right|_{C_\nu^{(n)}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sein.

Kehrt man jetzt zum Bereich Φ_n, $n \geqq m$, zurück, so ergibt sich, daß am Rande Γ_n desselben

$$(1) \qquad |F_\nu(z)|_{\Gamma_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, wobei also n und ν zwei beliebige, bloß an die Bedingung $m \leqq n \leqq \nu$ geknüpfte Zahlen sind.

Hieraus folgt, daß die Relation

$$|F_{\nu'}(z) - F_\nu(z)| < \varepsilon$$

zunächst am Rande von Φ_n, sodann aber nach Aufgabe 2, S. 623 im ganzen Innern von Φ_n, also auch insbesondere in S, gilt, und damit ist der in Aussicht genommene Beweis geliefert.

1) Es sei ein für allemal bemerkt, daß wir uns die Definition einer Funktion in einer hebbaren Singularität durch den Grenzwert der Funktion an dieser Stelle ergänzt denken.

ad b) Läßt man in (1) ν unendlich werden, so findet man:

$$(2) \qquad |F(z)|_{\Gamma_n} \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad m \leqq n.$$

Sei nun z' ein beliebiger Punkt von Φ, welcher außerhalb Φ_m liegt. Dann ist

$$|F(z')| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

In der Tat nehme man $n = m'$ so an, daß $\Phi_{m'}$ diesen Punkt im Innern einschließt. Dann wird $F(z)$ nach (2) am Rande desjenigen Teils von Φ, welcher zwischen Γ_m und $\Gamma_{m'}$ liegt, absolut genommen, den Wert $\varepsilon/2$ nicht übersteigen, darum gilt dasselbe auch im Innern dieses Bereichs, also insbesondere im Punkte z', w. z. b. w.

Jetzt sind wir in der Lage die gleichmäßige Konvergenz der Funktion $f_n(z)$ in S nachzuweisen. Da $F(z)$ sicher nicht identisch verschwindet, und da ferner der Rand von S im Innern von Φ liegt, so wird $F(z)$ höchstens in einer endlichen Anzahl von Randpunkten verschwinden. Man kann also S nötigenfalls durch einen umfassenderen Bereich ersetzen, an dessen Rand Γ die Funktion $F(z)$ überhaupt nicht verschwindet. Sei M der Minimalwert von $|F(z)|$ längs Γ. Dann ist $M > 0$.

Zur gleichmäßigen Konvergenz von $f_n(z)$ in S genügt die gleichmäßige Konvergenz von $f_n(z)$ am Rande:

$$|f_{\nu'}(z) - f_\nu(z)|_\Gamma < \eta, \qquad m \leqq \nu, \nu'.$$

Nun ist aber

$$f_{\nu'}(z) - f_\nu(z) = \frac{1}{F_{\nu'}(z)} - \frac{1}{F_\nu(z)} = -\frac{F_{\nu'}(z) - F_\nu(z)}{F_{\nu'}(z)\,F_\nu(z)}.$$

Darum ist längs Γ:

$$|f_{\nu'}(z) - f_\nu(z)|_\Gamma \leqq \frac{|F_{\nu'}(z) - F_\nu(z)|_\Gamma}{M^2} < \frac{\varepsilon}{M^2} = \eta, \qquad m \leqq \nu, \nu',$$

und hiermit ist der Beweis des ersten Teiles des Satzes erbracht.

Daß die Grenzfunktion

$$t = f(z)$$

einen Wert A nicht mehr als einmal in Φ annimmt, wird mit Hilfe des Hurwitzschen Satzes gerade so gezeigt, wie früher im Falle I), S. 724, woraus denn folgt, daß das Abbild von Φ ein schlichter Bereich T der t-Ebene ist. Mit Rücksicht auf die Eigenschaft b) der Funktion $F(z)$ erkennt man auch, daß T keinen endlichen Randpunkt *haben* kann, und der Beweis ist nun fertig.

Wie am Ende von § 10, so schließt man auch hier auf den automorphen Charakter der durch die Abbildung der Grenzfläche Φ auf die t-Ebene definierten Funktion

$$z = \varphi(t),$$

nur wird hier durch jede Substitution der automorphen Gruppe die ganze endliche Ebene in sich transformiert. Die dabei möglichen Gruppen umfassen zunächst die zu den doppeltperiodischen Funktionen gehörigen, wofür also ein Fundamentalbereich aus einem Periodenparallelogramm besteht. Hiermit sind sie aber auch erschöpft. Denn die Funktion $\varphi(t)$ kann nicht einfach periodisch sein, da ein Fundamentalbereich der Gruppe im Endlichen liegt; und fernerhin läßt sich zeigen,[1]) daß alle anderen in Betracht kommenden Gruppen elliptische Substitutionen umfassen, woraus dann folgen würde, daß die Beziehung der vorgelegten Fläche zur t-Ebene nicht stets im Kleinen ein-eindeutig ist.

Hieraus erkennt man, daß der Fall II) von § 9 lediglich auf die Gebilde vom Geschlecht $p = 1$ führt. Dazu treten noch, dem in § 9 ausgenommenen Falle entsprechend, die im nachfolgenden Paragraphen zu besprechenden Gebilde $p = 0$.

Das Einheitliche an den Fällen I), II). Wenn die Beweismethoden in diesen beiden Fällen auch wesentlich voneinander verschieden waren, so kann man doch die Ergebnisse unter einen einheitlichen Gesichtspunkt bringen, indem man auch im Falle I) darauf verzichtet, die Flächen Φ_n auf den Einheitskreis abzubilden und sie, so wie im Falle II), auf den Kreis $|t| < \varrho_n = e^{\gamma_n}$ bezieht. Sei

$$t = f_n(z)$$

die dazu gehörige Funktion. Dann können wir sagen:

Sowohl im Falle I) *als im Falle* II) *konvergiert* $f_n(z)$ *mit wachsendem* n *gegen einen Grenzwert* $f(z)$. *In beiden Fällen wird die Grenzfläche* Φ *ein-eindeutig und stetig, und im allgemeinen konform auf denjenigen Teil* T *der* t-*Ebene bezogen, welche durch die ständig wachsenden Kreise* $|t| < \varrho_n$ *ausgefegt wird.*

Im Falle I) *strebt* ϱ_n *einem Grenzwerte zu, und dementsprechend*

---

1) Fricke-Klein, *Automorphe Funktionen*, Bd. 1, S. 222, sowie Koebe, *Math. Annalen*, Bd. 67 (1909), S. 164. — In § 14 wird noch ein anderer Beweis gegeben, welcher der zitierten Resultate entbehrt.

besteht T aus dem Kreise

$$|t| < \lim_{n=\infty} \varrho_n.$$

Im Falle II) *wird* $\lim \varrho_n = \infty$, *wobei nun T sich auf die ganze eigentliche Ebene erstreckt.*

§ 14. Nachtrag; der Fall einer geschlossenen Fläche.

Wir haben von vornherein den Fall ausgenommen, daß der Rand der Fläche Φ_1 (oder auch derjenige einer späteren Φ_n) ganz eingeht In dem Falle würde man zu einer geschlossenen Fläche $\bar{\Phi}$ der Klasse c) geführt. Und nun braucht man, um Anschluß an den soeben behandelten allgemeinen Fall zu erreichen, bloß das letzte Blatt von $\bar{\Phi}$ mit einem Rande zu versehen, indem man etwa um einen gewöhnlichen Punkt $z = a$ desselben einen Kreis $|z - a| = c$ legt, welcher dann noch so eingeschränkt wird, daß er keine Singularität der Fläche enthält. Versteht man nun unter Φ_n die Fläche, die zurückbleibt, wenn man aus dem genannten Blatte von $\bar{\Phi}$ die Punkte des Kreises $|z - a| < c/n$ forthebt, so hängt Φ_n einfach zusammen. Sei

$$g_n = \log \frac{1}{r} + \gamma_n + \omega_n, \qquad \lim_{x=0,\, y=0} \omega_n = 0,$$

die zugehörige Greensche Funktion. Dann läßt sich die im vorhergehenden entwickelte Theorie auch hier anwenden. Demgemäß ist

$$\gamma_n < \gamma_{n+1}.$$

Würde nun γ_n bei wachsendem n gegen einen Grenzwert konvergieren, so ließe sich die Grenzfläche Φ, welche hier doch aus $\bar{\Phi}$ mit Ausnahme des einen Punktes $z = a$ besteht, ein-eindeutig und stetig und im allgemeinen konform auf den Einheitskreis der t-Ebene abbilden. Insbesondere müßte dann z, als Funktion von t betrachtet, längs des ganzen Randes jenes Kreises sich dem Randwert a stetig anschließen, was zu einem Widerspruch führt.

Hieraus erkennen wir, daß $\lim_{n=\infty} \gamma_n = +\infty$ wird und schließen somit, daß die Grenzfläche Φ vermöge der wie vorhin definierten Funktion $t = f(z)$ auf die ganze endliche t-Ebene, also die geschlossene Fläche $\bar{\Phi}$ auf die erweiterte Ebene, eineindeutig und stetig und im allgemeinen konform abgebildet werden kann. Dabei wird z, sowie auch w rational von t abhängen.

Umgekehrt umfaßt dieser Fall aber auch alle Gebilde vom Geschlecht $p = 0$, wie wir nun streng beweisen wollen.

Begründung der Klassifikation von § 8. In der Tat ist die Klassifikation a), b), c) von § 8 eine im Wesen der Sache begründete, indem ein und dasselbe algebraische Gebilde niemals unter zwei verschiedene dieser Rubriken fallen kann. Würde sich z. B. ein solches Gebilde sowohl durch doppeltperiodische Funktionen

$$(1) \qquad z = \varphi(t), \qquad w = \psi(t),$$

als auch durch automorphe Funktionen mit Grenzkreis,

$$(2) \qquad z = \Phi(\zeta), \qquad w = \Psi(\zeta),$$

uniformisieren lassen, so sei z_0 eine gewöhnliche Stelle der dazu gehörigen Riemannschen Fläche F, und seien t_0, ζ_0 zwei entsprechende Werte der Parameter. Durch die Gleichungen (1) und (2) wird dann eine Funktion ζ von t zunächst in der Umgebung von $t = t_0$ definiert, welche sich daselbst analytisch verhält und im Punkte $t = t_0$ den Wert $\zeta = \zeta_0$ annimmt. Und nun erkennt man, daß diese Funktion sich über die ganze endliche t-Ebene analytisch fortsetzen läßt.

Wäre dem nämlich nicht so, so sei $|t - t_0| < \varrho$ ein Kreis, in welchem die genannte Funktion sich analytisch verhält, auf dessen Rand aber ein singulärer Punkt $t = t_1$ sich befindet. Man lasse t den Radius (t_0, t_1) von t_0 aus beschreiben. Dann durchläuft z, der Relation (1) zufolge, einen Weg auf F, der zu einem bestimmten Punkte z_1 hinführt. Dementsprechend beschreibt auch ζ auf Grund der Gleichung (2) einen Weg, der zu einem bestimmten Punkte ζ_1 hinführt. Nun wird aber die Umgebung von z_1 auf F einmal durch (1) auf die schlichte Umgebung von t_1, dann aber durch (2) auf die schlichte Umgebung von ζ_1 abgebildet. Demnach wird eine Funktion ζ von t durch (1) und (2) in der Umgebung von $t = t_1$ definiert, welche sich dort analytisch verhält und im Punkte t_1 den Wert ζ_1 annimmt, und zwar werden durch diese Funktion alle Wertepaare (ζ, t) erschöpft, die durch (1) und (2) einander zugeordnet werden und zugleich an die Relationen

$$|t - t_1| < h, \qquad |\zeta - \zeta_1| < k$$

geknüpft sind, wobei h, k zwei geeignet gewählte positive Zahlen bedeuten.

Dieses Ergebnis verstößt aber gegen die Voraussetzung, daß jene frühere Funktion ζ, welche doch längs eines Teiles des bewußten

Radius mit der gegenwärtigen Funktion übereinstimmt, im Punkte $t = t_1$ eine Singularität habe, woraus sich denn die Richtigkeit der Behauptung ergibt.

Hiermit sind wir also zu einer ganzen Funktion ζ von t geführt worden, welche dem absoluten Betrage nach stets unterhalb der Einheit bleibt. Das steht aber im Widerspruch mit dem Weierstraßschen Satze, Kap. 7, § 6, 10. Satz, resp. mit der Eigenschaft eines nicht konstanten Polynoms, im Punkte ∞ unendlich zu werden.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß ein Gebilde vom Geschlechte $p = 0$ nicht durch doppeltperiodische Funktionen oder automorphe Funktionen mit Grenzkreis uniformisiert werden kann, ohne daß die Beziehung der t-Ebene zur z-Fläche aufhört, im Kleinen eineindeutig zu sein.[1])

Über schlichte, einfach zusammenhängende Bereiche. Zum Schluß betonen wir noch den Umstand, welcher bei der vorstehenden Klassifikation den Ausschlag gab, daß nämlich die schlichten, einfach zusammenhängenden Bereiche der erweiterten Ebene ihrerseits einer Klassifikation unterworfen sind, welche der obigen genau entspricht, und zwar zerfallen diese Bereiche in folgende drei Klassen:

a) die unberandete Ebene;

b) die durch einen Punkt berandete Ebene;

c) die Bereiche, deren Rand aus mehr als einem Punkte, aber nicht aus mehr als einem Stücke (Kap. 5, § 7) besteht.

Auf Grund des Weierstraßschen Satzes von Kap. 7, § 6, 10. Satz, läßt sich folgender Satz direkt beweisen.

1. Satz. *Die allgemeinste ein-eindeutige Abbildung der ganzen endlichen Ebene auf sich selbst läßt sich durch eine ganze lineare Trans-*

---

1) Man könnte beispielsweise das Gebilde $w = z$ durch die doppeltperiodische Funktion

$$z = \wp(t), \quad w = \wp(t)$$

uniformisieren. Dann würde die automorphe Gruppe als erzeugende Substitutionen außer den beiden parabolischen Substitutionen

$$S_1:\ t' = t + \omega_1, \quad S_2:\ t' = t + \omega_2,$$

noch die elliptische Substitution

$$S_3:\ t' = -t$$

enthalten, wobei also der Fundamentalbereich aus einem halben Periodenparallelogramm besteht. Dem Punkte $t = 0$ entspricht aber ein Verzweigungspunkt $z = \infty$, und mithin genügt diese Uniformisierung den Bedingungen von § 8 nicht.

formation:

$$w = az + b, \qquad a \neq 0,$$

darstellen. Sie hängt mithin von vier reellen Konstanten ab.

An diesen Satz in Verbindung mit dem Zusatze von Kap. 7, § 10, Ende, nebst dem Satze von S. 686 schließt sich noch der

2. Satz. *Der einfach zusammenhängende Bereich* a) *läßt* ∞^6, *ein Bereich der Klasse* b) ∞^4, *und endlich ein Bereich der Klasse* c) ∞^3 *konforme Transformationen in sich zu.*

§ 15. Uniformisierung einer allgemeinen analytischen Funktion vermöge der automorphen Funktionen mit Hauptkreis.

Erweiterung des Begriffs eines Funktionselements. Im 9. Kapitel betrachteten wir als Funktionselement eine Funktion $\mathfrak{f}(z)$, welche sich in einem schlichten Bereiche, insbesondere im Innern eines Kreises, analytisch verhält. Jetzt wollen wir diesen Begriff nach zwei Seiten hin erweitern. Wir fassen einen beliebigen der beiden Bereiche ins Auge, in welche die erweiterte Ebene durch einen Kreis resp. eine Gerade zerlegt wird, und nehmen sowohl diesen Bereich als auch eine endlich-vielblättrige, einen einzigen Verzweigungspunkt enthaltende Windungsfläche zum Definitionsbereich von $\mathfrak{f}(z)$. Im letzten Falle soll jedes Blatt den erstgenannten Bereich vollständig überdecken, und außerdem soll der Verzweigungspunkt eine beliebige Lage innerhalb jenes Bereiches haben.

Zweitens soll $\mathfrak{f}(z)$ im Innern des soeben erklärten Definitionsbereichs bis auf Pole und den Verzweigungspunkt analytisch sein. Im letzteren Punkte soll $\mathfrak{f}(z)$ fernerhin entweder stetig sein oder unendlich werden.

Darstellung der Funktion vermöge ihrer Elemente. Wir gehen jetzt von einer beliebigen analytischen Funktion

$$(1) \qquad w = f(z)$$

aus. Ist $f(z)$ eine rationale Funktion, so hat sie in der ganzen erweiterten Ebene nur Pole. Die Uniformisierung ist hiermit von vornherein bewerkstelligt, und zwar besteht der Definitionsbereich der uniformisierenden Variabelen — hier $t = z$ — aus der ganzen erweiterten Ebene.

Ein zweiter Fall, in welchem der Definitionsbereich der uniformisierenden Variabelen aus der ganzen erweiterten Ebene besteht, ist

der eines beliebigen algebraischen Gebildes vom Geschlechte $p = 0$, wie im vorigen Paragraphen des näheren erörtert wurde. Dies ist aber auch zugleich der allgemeinste derartige Fall, und hiermit ist dieses Vorkommnis allgemein erledigt.

Hat der Definitionsbereich der uniformisierenden Variabelen hingegen notwendig einen, aber nur einen Randpunkt, so hat mindestens eine der beiden Funktionen

$$(2) \qquad z = \varphi(t), \qquad w = \psi(t)$$

dort eine wesentliche singuläre Stelle erster oder zweiter Art. Sonst sind beide Funktionen, von Polen abgesehen, in der ganzen erweiterten Ebene analytisch. Dieser Fall umfaßt die Exponentialfunktion und die trigonometrischen, sowie auch die doppeltperiodischen Funktionen.

Wir kehren jetzt wieder zum allgemeinen Fall zurück und schließen den bereits besprochenen Fall aus, daß $f(z)$ eine rationale Funktion ist, sowie ferner den Fall, daß ein Element von $f(z)$ sich so fortsetzen läßt, daß der neue Definitionsbereich dieser Funktion die ganze erweiterte Ebene bis auf einen einzigen Punkt ein- oder mehrfach überdeckt und im letzten Falle einen einzigen Verzweigungspunkt umfaßt, während die Funktion im Innern dieses Bereichs höchstens Pole, am Rande aber eine wesentliche singuläre Stelle resp. einen zweiten Verzweigungspunkt aufweist. Hiermit haben wir also außer den eindeutigen Funktionen mit einer einzigen wesentlichen singulären Stelle noch gewisse mehrdeutige Funktionen mit zwei Verzweigungspunkten endlicher Ordnung ausgeschlossen. Für letztere Funktionen wird die Uniformisierung durch die Transformation

$$\frac{z-a}{z-b} = t^m, \qquad \text{resp.} \quad z - a = t^m$$

geleistet.

Indem wir an das Verfahren von Kap. 9, § 3 anknüpfen, gehen wir von einem Element $\mathfrak{f}(z) = \bar{f}_0(z)$ aus, wie dieser Begriff im gegenwärtigen Paragraphen auseinandergesetzt ist, und numerieren die inneren rationalen Punkte der verschiedenen Blätter des zugehörigen Definitionsbereichs T_0 desselben:

$$(3) \qquad \bar{a}_1, \; \bar{a}_2, \; \ldots .$$

Dabei wird der Verzweigungspunkt nicht mit aufgenommen, und auch alle Punkte $\bar{a}_n = 0$ sollen fortgelassen werden.

Jedem der Punkte $\bar{a}_n$ sollen nun zwei Bereiche, wie folgt, zugeordnet werden. Der erste besteht aus dem größten Kreise $|z - \bar{a}_n| < r$,

in welchem sich ein in der Nähe von $\bar{a}_n$ mit $\bar{f}_0(z)$ übereinstimmendes Element $\bar{f}_{2n-1}(z)$ definieren läßt. Daß ein solcher Kreis auch wirklich vorliegt, folgt daraus, daß der sonst eintretende Fall eines unendlichen Definitionsbereichs bereits vorweggenommen ist.

Der zweite Bereich wird erhalten, indem man die Kreise

$$\left|\frac{z-\bar{a}_n}{z}\right| < r$$

in Betracht zieht und eine ähnliche Überlegung anstellt. Diese Kreise bilden nämlich eine Schar ii) im Sinne von Kap. 6, § 17, wofür

$$\zeta_1 = \bar{a}_n, \qquad \zeta_2 = 0$$

ist. Für kleine Werte von r wird sich hierdurch sicher ein Element ergeben, welches dem zugehörigen Kreise entspricht und in der Nähe von $\bar{a}_n$ mit $\bar{f}_0(z)$ zusammenfällt. Und nun läßt man r stetig wachsen. Mit Rücksicht auf die vorweggenommenen Fälle erkennt man, daß r endlich bleibt, und die dabei sich einstellende obere Grenze von r liefert eben den gesuchten Wert. Das entsprechende Funktionselement heiße $\bar{f}_{2n}(z)$. In beiden Fällen kann der betreffende Bereich sowohl ein- als mehrblättrig sein.

So erhält man eine abzählbare Menge von Elementen

$$\bar{f}_1(z),\ \bar{f}_2(z),\ \ldots$$

nebst den dazugehörigen Bereichen. Wir verfahren jetzt der Reihe nach mit jedem Element dieser Menge, wie ursprünglich mit dem Element $\bar{f}_0(z)$, und erhalten zunächst eine doppelt unendliche Menge von Elementen und Bereichen, welche dann nachträglich in eine einfach unendliche Reihe umgeordnet werde:

$$\bar{f}_{1,1}(z),\ \bar{f}_{1,2}(z),\ \bar{f}_{1,3}(z),\ \ldots.$$

In der ersteren Menge kamen gewisse Elemente mehrfach vor. Solche mögen je nur einmal in die letzte Reihe aufgenommen werden.

Mit jedem dieser Elemente werde nun das Verfahren wiederholt. So ergibt sich eine zweite abzählbare Menge von Elementen

$$\bar{f}_{2,1}(z),\quad \bar{f}_{2,2}(z),\quad \bar{f}_{2,3}(z),\ldots$$

nebst den dazu gehörigen Bereichen $T_{2,n}$. Das Endresultat ist eine doppelt unendliche Menge von Elementen nebst den dazu gehörigen Bereichen $T_{m,n}$, deren m-te Reihe, wie folgt, lautet:

$$\bar{f}_{m,1}(z),\ \bar{f}_{m,2}(z),\ \ldots.$$

Und nun bleibt es nur noch übrig, diese letzte Menge in eine einfache Reihe zu verwandeln:

(4) $$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,$$

wobei kein Element mehr als einmal aufgenommen werde.

Für die Funktion (1) und die Reihe (4) gilt das Theorem von Kap. 9, § 4 unter leicht ersichtlicher Modifikation der Formulierung desselben. Das wesentliche an der Erweiterung dieses Satzes besteht darin, a) daß jetzt Verzweigungspunkte und Pole in die Funktionselemente aufgenommen sind; b) daß der Punkt $z = \infty$ keine Ausnahmerolle mehr spielt.

Herstellung der Riemannschen Fläche Φ_n. Vermöge der Reihe (4) können wir nunmehr die Aufgabe in Angriff nehmen, die Funktion (1) zu uniformisieren. Zu dem Zwecke konstruieren wir zunächst eine Reihe Riemannscher Flächen, Φ_1, Φ_2, ..., wie folgt. Als Φ_1 nehmen wir den zum Element $f_1(z)$ gehörigen Definitionsbereich T_1. Jetzt gehen wir zum zweiten Element $f_2(z)$ über. Hier liegen verschiedene Möglichkeiten vor.

Wenn in der Folge davon die Rede ist, daß ein Bereich T_n in einem anderen Definitionsbereich liegt resp. über einen solchen greift, werden wir stets darunter verstehen, daß auch die zugehörigen Funktionen in den gemeinsamen Punkten dieser Bereiche miteinander übereinstimmen.

Der nachstehenden Klassifikation liegt eine Fallunterscheidung zu Grunde, wonach der Rand von T_1 den Rand von T_2 nicht überschneidet oder das Gegenteil statt hat. Liegt nämlich der Rand von T_2 in T_1, so daß also T_1 und T_2 im Sinne der soeben vorausgeschickten Vereinbarung übereinander greifen, so sind zwei Fälle zu verzeichnen, und zwar sind das a) und der zweite unter b) betrachtete Fall. Befindet sich dagegen der Rand von T_2 außerhalb T_1, so wird man zu b) und d) geführt. Überschneiden sich endlich die genannten Ränder, so stellt sich c) ein.

a) Der Definitionsbereich T_2 von $f_2(z)$ ist ganz in T_1 enthalten. Dann gehen wir gleich weiter, bis wir zu einem Bereiche T_m kommen, wofür dies nicht gilt. Ist insbesondere der Definitionsbereich T_n eines jeden $f_n(z)$ in T_1 enthalten, so reduzieren sich alle weiteren Bereiche Φ_n auf den ersten, und es bleibt nur noch übrig, $\Phi_1 = T_1$ auf den Einheitskreis $|t| < 1$ abzubilden.

b) T_2 umfaßt T_1. Wir wollen dann T_2 als den Bereich Φ_2 *nehmen:* $\Phi_2 = T_2$.

Hiermit sind aber auch alle Fälle erschöpft, in welchen T_1 und T_2 übereinander greifen, ohne daß ihre Ränder sich überschneiden. In der Tat gibt es noch einen denkbaren derartigen Fall, indem T_1 etwa aus dem ein- oder mehrfach überdeckten Innern des Kreises $|z| = R$ besteht, während T_2 vom Äußern des Kreises $|z| = R'$, $R' < R$, gebildet wird. Doch ist dieser Fall deshalb unmöglich, weil jede der Funktionen $f_n(z)$ in mindestens einem Randpunkte ihres Bereiches T_n einen Verzweigungspunkt resp. eine höhere Singularität als einen Pol hat. Und ebensowenig können sich die Ränder von T_1 und T_2 unter ähnlichen Voraussetzungen berühren, da dies ja auf einen der vorweggenommenen Fälle führen würde.

c) Die Ränder von T_1 und T_2 schneiden sich gegenseitig. Dann wird T_2 durch den Rand von T_1 in zwei Gebiete zerlegt, wovon das eine in T_1 liegt und weiter nicht in Betracht kommt. Durch den anderen Teil von T_2 wird T_1 zu einem einfach zusammenhängenden Bereiche Φ_2 ergänzt, welcher zu der in § 9 definierten Klasse a) gehört, und dessen Rand im übrigen aus Kreisbogen und geradlinigen Strecken besteht.

d) Die Bereiche T_1 und T_2 haben keinen innern Punkt gemeinsam, in dessen Umgebung $f_1(z)$ mit $f_2(z)$ übereinstimmt. Sei L ein von einem Punkte z_0 aus beschriebener Weg, längs dessen $f_1(z)$ in $f_2(z)$ analytisch fortgesetzt werden kann. Dann läßt sich L durch eine endliche Anzahl der zu den Elementen $f_n(z)$ gehörigen Definitionsbereiche T_n überdecken, derart daß die entsprechenden Funktionen $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \ldots, f_{n_k}(z) = f_2(z)$ die bewußte Fortsetzung bewerkstelligen. Wir sehen vom Falle ab, daß ein Bereich T_{n_i} einen vorausgehenden Bereich T_{n_j} umfaßt, indem wir da T_{n_j} von vornherein unterdrücken.

Der Bereich Φ_2 wird nun, wie folgt, hergestellt. Der Bereich T_{n_1} greift über T_1 gerade so, wie T_2 im bereits besprochenen Falle b) resp. c) über T_1 greift. Demnach ergibt sich zunächst ein einfach zusammenhängender Bereich S_1, welcher ebenso wie jener frühere Bereich Φ_2 definiert wird. Sei z_1 der erste Punkt von L, in welchem L den Rand von S_1 trifft, d. h. der Bogen (z_0, z_1) von L soll keinen weiteren Randpunkt von S_1 enthalten.

Wir gehen jetzt zur Funktion $f_{n_2}(z)$. Da sind nun zwei Fälle denkbar: i) der Rand von S_1 liegt nirgends außerhalb T_{n_2}, ohne daß S_1 in T_{n_2} liegt;[1]) ii) jener Rand schneidet den Rand von T_{n_2}. Im ersten

1) Ob dieser Fall schon an dieser Stelle wirklich eintreten kann, braucht nicht erörtert zu werden. Im weiteren Verlauf des Verfahrens kann er sich doch einstellen und wird dann, wie hier angegeben, behandelt. Von diesem Falle sehen wir hinfort ab.

Falle wäre $f(z)$ eine algebraische Funktion vom Geschlechte $p = 0$, wie sich aus dem 4. Satz von § 9, Ende, nebst den Entwicklungen von § 14 sofort ergibt. Im zweiten Fall sei C derjenige Randbogen von S_1, welcher z_1 enthält und einen Querschnitt von T_{n_2} bildet. Durch C wird T_{n_2} dann in zwei Teile zerlegt, wovon der eine die in der Nähe von z_1 befindlichen und zugleich zu S_1 gehörigen Punkte von L umfaßt und weiter nicht in Betracht kommt. Aus S_1 und dem übrigen Teil von T_{n_2} setzt sich nun auf Grund des 2. Satzes von § 9, Ende ein einfach zusammenhängender Bereich S_2 zusammen, welcher nach eventueller Aufhebung gewisser Einschnitte zu der in § 9 definierten Klasse a) von Bereichen gehört und im übrigen von lauter Kreisbogen und geradlinigen Strecken begrenzt wird. Hierzu ist indessen noch folgende Modifikation zu erwähnen. Sollte sich nämlich C, immer noch in T_{n_2} verbleibend, so fortsetzen lassen, daß eine analytische Fortsetzung der genannten Art über die verlängerte Kurve hinaus möglich wird, so soll man unter C die also ergänzte Kurve verstehen.

Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß S_1 und der genannte Teil von T_{n_2} nur längs des einen Randbogens C ineinander übergehen sollen. Längs anderer Randbogen kann $f_{n_2}(z)$ sehr wohl auch eine Fortsetzung gestatten. Würden die Bereiche aber noch längs eines zweiten Randbogens miteinander verschmolzen, so würde der Rand zerfallen und damit der einfache Zusammenhang eingehen.

Das Verfahren wird nun wiederholt, bis wir schließlich bei T_2 angelangt sind. Der zuletzt erhaltene Bereich ist das zweite Glied Φ_2 in der im Entstehen begriffenen Folge von Bereichen.

Es kann nun vorkommen, daß alle weiteren Definitionsbereiche T_n in Φ_2 enthalten sind. In dem Falle schließt die Reihe der Φ_n mit Φ_2. Sonst sei $f_m(z)$ die erste Funktion der Folge (4), welche sich am obigen Prozesse noch nicht beteiligt hat. Dann konstruiert man in ähnlicher Weise, wie soeben, einen einfach zusammenhängenden Bereich Φ_3, welcher sowohl Φ_2 als T_m umfaßt, und welcher außerdem zu der in § 9 definierten Klasse a) gehört. Im übrigen ist Φ_3 auch von lauter Kreisbogen und geradlinigen Strecken berandet.

Jetzt ist klar, wie man weiter vorzugehen hat. So ergibt sich schließlich eine endliche oder unendliche Folge von Bereichen

$$\Phi_1 = T_1,\ \Phi_2, \ldots,$$

welche folgendermaßen beschaffen sind[1]):

1) Wir schalten hier noch die Bemerkung ein, daß ein und derselbe Bereich T_n sehr wohl an mehreren Stellen einer Fläche Φ_k wiederholt werden kann. Es liegt dies eben daran, daß Φ_k stets einfach zusammenhängen soll.

1) die inneren Punkte von Φ_n sind auch innere Punkte von Φ_{n+1};

2) Φ_n gehört zu der in § 9 definierten Klasse a) von Bereichen, und hängt außerdem einfach zusammen;

3) der Rand von Φ_n besteht aus lauter Kreisbogen und geradlinigen Strecken.

Abbildung der Grenzfläche Φ. Brechen die Flächen der vorstehenden Folge mit einer endlichen Anzahl ab, so braucht man nur die letzte derselben auf den Einheitskreis abzubilden, um die gewünschte Uniformisierung zu erzielen.

Sind diese Flächen dagegen in unbegrenzter Anzahl vorhanden, so erkennt man, daß sie im wesentlichen allen Bedingungen der früheren Folgen in den beiden Fällen I), II) genügen. Demgemäß läßt sich die Grenzfläche Φ ein-eindeutig und stetig, und im allgegemeinen konform auf den Einheitskreis resp. auf die ganze eigentliche Ebene abbilden.

Hiermit ist nun die Uniformisierung in allen Fällen bewerkstelligt. Im Falle I) wird die Grenzfläche Φ im allgemeinen durch das mehrfache Auftreten eines Bereichs T_n eine kongruente Transformation in sich gestatten. Dem entspricht dann, gerade wie im Falle einer algebraischen Funktion, eine Transformation des Innern des Einheitskreises $|t| < 1$ in sich, und hiernach läßt die Funktion $z = \varphi(t)$ eine lineare Transformation vom bewußten Typus in sich zu. Wir müssen indes den besonderen Fall zulassen, daß die automorphe Gruppe sich auf die identische Substitution reduziert.

Ist $z = \psi(\tau)$ eine zweite automorphe Funktion, welche die vorgelegte Funktion in der genannten Weise uniformisiert, so sind t und τ auf Grund des Satzes von § 2, S. 686 linear miteinander verknüpft, und es ist $\psi(\tau) = \varphi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$.

Im übrigen wird der Hauptkreis hier nicht stets ein Grenzkreis für die Funktion $z = \varphi(t)$ sein, es kann sogar vorkommen, daß kein Randpunkt desselben eine singuläre Stelle der Funktion $z = \varphi(t)$ abgibt. Beispiel:

$$z = t, \qquad w = Q(t),$$

wo $Q(z)$ die in Kap. 9, § 5 definierte Funktion ist. Die Funktion $\varphi(t)$

Andererseits verdankt die Grenzfläche Φ gerade diesem Vorkommnis ihre Transformationen in sich, vgl. unten.

kann auch ein Teil einer mehrdeutigen monogenen analytischen Funktion sein.

Für das Funktionenpaar $\varphi(t)$, $\psi(t)$:

$$z = \varphi(t), \qquad w = \psi(t),$$

ist aber der Einheitskreis wohl ein Grenzkreis, da jeder Punkt desselben mindestens für eine dieser Funktionen eine singuläre Stelle ist.

Im Falle II) können sich jetzt, im Gegensatz zum algebraischen Falle, einfach periodische Funktionen einstellen.

Fassen wir das Ergebnis noch in einen Satz zusammen:

Theorem. *Eine beliebige analytische Funktion*

$$w = f(z)$$

läßt sich durch zwei in einem bestimmten Bereich T bis auf Pole analytische Funktionen

$$z = \varphi(t), \qquad w = \psi(t)$$

uniformisieren, dergestalt, daß im Kleinen eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Umgebung einer willkürlichen Stelle $t = t_0$ von T und den Punkten (w, z) eines entsprechenden Teiles des analytischen Gebildes stattfindet, während umgekehrt jeder Stelle (w_0, z_0) des analytischen Gebildes mindestens ein Punkt t_0 von T entspricht. Dabei besteht T entweder

a) *aus der ganzen erweiterten Ebene; oder*

b) *aus der ganzen eigentlichen Ebene; oder endlich*

c) *aus dem Innern des Einheitskreises $|t| < 1$.*

Im Falle a) *liegt ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p = 0$ vor. Im Falle* b) *ist der Punkt $t = \infty$ mindestens für eine der beiden Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eine wesentliche singuläre Stelle. Im Falle* c) *ist jeder Punkt des Einheitskreises mindestens für eine dieser Funktionen eine singuläre Stelle. Im übrigen schließen sich die drei Fälle gegenseitig aus.*

Endlich wird die Anzahl der in den uniformisierenden Funktionen enthaltenen willkürlichen Konstanten durch den letzten Satz von § 14 *gegeben.*

Will man andererseits von der Bedingung der umkehrbaren Eindeutigkeit im Kleinen absehen, indem man der zu $z = \varphi(t)$ gehörigen Umkehrfunktion $t = \omega(z)$ gestattet, in gewöhnlichen Punkten der z-Fläche Verzweigungspunkte zu haben, so kann man sich in allen

drei Fällen automorpher Funktionen mit Hauptkreis bedienen. Im Falle a) wird man etwa die ganze erweiterte Ebene vermöge der Dreiecksfunktionen mit nicht verschwindenden Winkeln, z. B. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}\right)$, auf das Innere des Einheitskreises $(1, \infty)$-deutig abbilden; vgl. Schwarz, *Werke*, Bd. 2, S. 240, sowie Picard, *Traité d'analyse*, Bd. 3, Kap. 13.

Im Falle b) läßt sich die ganze endliche Ebene in ähnlicher Weise behandeln, indem man die Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$ benutzt; vgl. Klein-Fricke, *Elliptische Modulfunktionen*, Bd. 1, S. 208.[1])

Es sei noch erwähnt, daß die hier auseinander gesetzte Methode sowohl im algebraischen als auch im allgemeinen analytischen Falle sich direkt auf den von Koebe behandelten Fall symmetrischer Riemannscher Flächen anwenden läßt, indem man eine derartige Fläche längs des bewußten Teiles der reellen Achse aufschneidet, um dann die neue Fläche resp. ein Stück davon, nach jener Methode auf die t-Ebene abzubilden.

Eine Behandlung des Uniformisierungsproblems mittels automorpher Funktionen des Schottkyschen Typus wird demnächst in den *Annals of Mathematics* vom Verfasser veröffentlicht.

§ 16. Mehrdeutige Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereiche.

Mit den hiermit gewonnenen Resultaten haben wir indessen die Methode des voraufgehenden Paragraphen noch keineswegs erschöpft. Es läßt sich beispielsweise folgender Satz in voller Allgemeinheit begründen, dessen Beweis wir bisher nur für besondere Funktionen erbracht haben.

1. Satz. *Jeder analytischen Funktion*

$$w = f(z)$$

entspricht eine Riemannsche Fläche, deren Punkte den Punkten (w, z) *des analytischen Gebildes ein-eindeutig zugeordnet sind.*

Zur Konstruktion der Fläche bedienen wir uns der in § 15, (4) definierten Funktionenfolge und führen eine Reihe von Bereichen

$$\Phi_1' = T_1,\ \Phi_2', \ldots,$$

wie folgt, ein. Wir gehen gerade so zu Werke, wie früher bei der

1) Der Hauptsatz dieses Paragraphen ist in einer Reihe von Aufsätzen von Koebe behandelt worden; *Göttinger Nachrichten*, 1907/09.

Herstellung der Bereiche Φ_n, nur haben wir damals beim Anhängen eines Teiles eines T_m ausdrücklich verlangt, daß dies nur längs eines einzigen Bogens geschehen soll. Jetzt wird diese Forderung aufgehoben. Der bewußte Teil des Bereiches T_m greift nämlich höchstens in einer endlichen Anzahl von Gebieten über den vorhergehenden Bereich derart, daß in einem jeden dieser Gebiete die bezüglichen Bestimmungen der Funktion $f(z)$ zusammenfallen, während das Gebiet selbst entweder schlicht oder endlich vielblättrig mit einem Verzweigungspunkt ist und von einer endlichen Anzahl von Kreisbogen und geradlinigen Strecken begrenzt wird. Im gegenwärtigen Bereiche Φ_n' soll jedes solche Gebiet nur einmal auftreten. Hierdurch geht zwar der einfache Zusammenhang von Φ_n' ein, dafür gewinnt man aber die genannte umkehrbare Eindeutigkeit der Beziehung der Fläche zu den Punkten (w, z) des vorgelegten Gebildes.

Die hierdurch resultierende Grenzfläche

$$\Phi' = \lim_{n=\infty} \Phi_n'$$

resp. die letzte Fläche Φ_k', falls diese Flächen mit einer endlichen Anzahl abbrechen — oder auch eine der S. 740 ausgeschlossenen Flächen, — ist die in Aussicht genommene Riemannsche Fläche der Funktion $f(z)$.

Im übrigen sei noch erwähnt, daß auch ein Fundamentalbereich für die zum Funktionenpaare $\varphi(t)$, $\psi(t)$ gehörige automorphe Gruppe dadurch konstruiert werden kann, daß wir die bei der soeben erklärten schrittweisen Herstellung der letztbetrachteten Riemannschen Fläche sukzessiv angegliederten Gebiete vermöge der Funktion $z = \varphi(t)$ auf die t-Ebene abbilden.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes läßt sich nun auch beweisen. In Kap. 11, § 13 haben wir den Weierstraßschen Satz kennen gelernt, daß es zu jedem schlichten Bereiche eine eindeutige Funktion gibt, welche sich in jedem inneren Punkte des Bereiches analytisch verhält und in jedem Grenzpunkte eine Singularität aufweist. Als Verallgemeinerung dieses Satzes gilt der folgende

2. Satz. *Jeder vorgelegten, aus einem Stücke bestehenden Riemannschen Fläche F entspricht eine analytische Funktion, welche eindeutig auf der Fläche ist und, höchstens von Polen abgesehen, sich in jedem gewöhnlichen Punkte analytisch verhält. In den Verzweigungspunkten endlicher Ordnung bleibt sie stetig oder aber sie wird dort unendlich. Außerdem nimmt sie in übereinander gelegenen Blättern niemals iden-*

tisch gleiche Werte an, und endlich läßt sie sich nicht über die Fläche hinaus analytisch fortsetzen.

Gehört die Fläche nicht zu der auf S. 740 *ausgeschlossenen Klasse resp. zu den algebraischen Gebilden vom Geschlechte* $p = 0$, *so gibt es fernerhin eine im allgemeinen auf der Fläche mehrdeutige Funktion, welche sich in den gewöhnlichen Punkten der Fläche ausnahmslos analytisch verhält, in den Verzweigungspunkten endlicher Ordnung stetig bleibt, in übereinander gelegenen Blättern niemals identisch gleiche Werte annimmt, und sich, von eventuellen analytischen Randbogen abgesehen, nicht über die Fläche hinaus analytisch fortsetzen läßt. Je zwei ein und demselben Blatte entsprechende Zweige dieser Funktion sind linear miteinander verknüpft.*

Im übrigen spielt der Punkt ∞ *in beiden Teilen des Satzes keine Ausnahmerolle.*

Vor allem sehen wir von den im zweiten Teile des Satzes ausgenommenen Flächen ab. Für diese gilt offenbar der erste Teil des Satzes.

In allen anderen Fällen gibt die vorgelegte Fläche Anlaß zu einer Folge von Bereichen T_n, welche gerade so beschaffen sind, wie die früheren, den Funktionen $f_n(z)$ der Folge (4), § 15 entsprechenden Bereiche T_n. Hieraus konstruiere man eine Reihe von Hilfsflächen

$$\Phi_1 = T_1, \quad \Phi_2, \ldots$$

gerade so, wie in § 15. Indem man $\Phi = \lim_{n=\infty} \Phi_n$ bzw. Φ_k, falls diese Flächen mit einer endlichen Anzahl abbrechen, vermöge einer automorphen Funktion

$$z = \varphi(t) \tag{1}$$

auf den Einheitskreis resp. auf die ganze endliche Ebene abbildet, erhält man in der Umkehrfunktion

$$t = \omega(z) \tag{2}$$

eine Funktion, wie sie im letzten Teile des Satzes verlangt wird.

Insbesondere kann es vorkommen, daß die Funktion $\omega(z)$ auch die im ersten Teile des Satzes in Aussicht genommene Funktion liefert. Trifft dies indes nicht zu, so liegt jedenfalls eine eigentlich diskontinuierliche automorphe Gruppe vor. Wir brauchen jedoch keine spezifischen Kenntnisse über solche Gruppen vorauszusetzen, sondern lesen an der vorliegenden Abbildung direkt ab, daß unsere Gruppe alle diejenigen Bedingungen erfüllt, welche zum Konvergenzbeweise der Poincaréschen Thetareihen der Dimension $d \leqq -4$ erforderlich

sind.[1]) Indem wir nun zwei derartige Funktionen ϑ und ϑ_1 gleicher Dimension mit getrennten Polen bilden, ergibt der Quotient derselben

$$\frac{\vartheta(t)}{\vartheta_1(t)} = F(t)$$

eine Funktion, welche sich der Gruppe gegenüber invariant verhält.

Verpflanzt man diese Funktion auf die vorgelegte Fläche, so erhält man eine Funktion, welche zwar eindeutig auf der Fläche und bis auf Pole dort analytisch ist, sie kann aber denkbarerweise in übereinander liegenden Blättern identisch gleiche Werte annehmen. Um dieser Möglichkeit vorzubeugen, verfahren wir, wie folgt.

Bei der Herstellung der Fläche Φ_n griff der in Betracht kommende Teil von T_n, — t_n möge er heißen, — möglicherweise über Φ_{n-1}. Indem wir in diesem Falle den Rand von Φ_{n-1} auf t_n projizieren, wird t_n also in eine endliche Anzahl von Gebieten zerlegt, deren jedes durch eine endliche Anzahl von Kreisbogen und geradlinigen Strecken begrenzt wird, und die nun in zwei Klassen zerfallen: a) solche Gebiete, denen ein Stück von F entspricht, das sich an Φ_{n-1} bereits beteiligt hat,[2]) und welche deshalb nicht weiter in Betracht kommen; b) die übrigen Gebiete. Letztere entsprechen Bereichen von F, welche sich an der Bildung von Φ_{n-1} nicht beteiligt haben, und mögen $S_1^{(n)}, \ldots S_{k_n}^{(n)}$ heißen.

Den Wurzeln von $\vartheta_1(t)$, falls welche vorhanden sind, entsprechen isolierte Punkte $c_1, c_2, \ldots$ der Fläche Φ, bzw. Φ_k, — wir beschränken uns indessen bloß auf die Fläche Φ, da die Behandlung im Falle einer Fläche Φ_k nicht davon abweicht, — und ebenfalls isolierte Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ der Fläche F.

Nunmehr zeichnen wir auf der Fläche Φ bzw. Φ_k, wovon Φ_n ja einen Teil bildet, in jedem $S_k^{(n)}$ einen gewöhnlichen inneren Punkt $a_k^{(n)}$ auf,

---

1) Poincaré. *Acta Mathematica.* Bd. 1 (1882), S. 193, sowie Fricke-Klein, *Automorphe Funktionen*, Bd. 2, S. 142. Dieser eine Paragraph bei Fricke-Klein, sowie die ersten Paragraphen bei Poincaré, enthalten alles, was der Leser für die Einzelheiten des Beweises nötig hat. Selbst der Fall, daß der Definitionsbereich der Funktion $\varphi(t)$ aus der ganzen eigentlichen Ebene besteht, fügt sich der genannten Methode, indem man zuerst den Punkt ∞ ins Endliche projiziert.

2) Dies ist nämlich so gemeint: Nimmt man für den Augenblick an, die Funktion $f(z)$, um deren Existenz es sich handelt, sei wirklich vorhanden, und versteht man unter $\bar{\Phi}_{n-1}$ denjenigen Teil von F, welcher dem zu Anfang dieses Paragraphen konstruierten Bereich Φ_{n-1}' entspricht, so wird $f(z)$ im bewußten Gebiete und in einem darunter liegenden Blatte von $\bar{\Phi}_{n-1}$ identisch gleiche Werte annehmen.

welcher übrigens nicht über einem früheren $a_j^{(l)}$, $l < n$, liege, und dessen Projektion auf die schlichte Zahlenebene auch nicht mit der Projektion eines c_p zusammenfalle; wir bezeichnen ferner den durch die Funktion (1) gelieferten Bildpunkt von $a_k^{(n)}$ in der t-Ebene mit $b_k^{(n)}$, und bilden vermöge einer Thetareihe der bewußten Dimension eine Funktion

$$\vartheta^{(n)}(t),$$

welche in jedem Punkte $b_k^{(n)}$ nebst den unter der Gruppe mit $b_k^{(n)}$ äquivalenten Punkten, sonst aber nirgends, einen Pol aufweist. Sei

$$F_n(t) = \frac{\vartheta^{(n)}(t)}{\vartheta_1(t)}$$

für jeden Wert von n, wofür Bereiche $S_k^{(n)}$ vorhanden sind. Für andere Werte von n sei $F_n(t) = 0$.

Kommt es insbesondere vor, daß von einer bestimmten Stelle an, $n > m$, keine Bereiche $S_k^{(n)}$ mehr sich einstellen, so liefert die Summe

$$\sum_{n=1}^{m} C_n F_n(t), \qquad C_n \neq 0,$$

eine Funktion $F(t)$, welche, auf die Fläche F verpflanzt, daselbst eindeutig und bis auf Pole analytisch ist, und in übereinander liegenden Blättern niemals identisch gleiche Werte annimmt.

Um die Richtigkeit letzterer Behauptung mit aller Schärfe hervortreten zu lassen, seien P und Q zwei beliebige übereinander gelegene gewöhnliche Stellen von F, und $P_1, P_2, \ldots$ resp. $Q_1, Q_2, \ldots$ die entsprechenden Stellen auf Φ. Sei ferner Φ_p die erste Fläche Φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, welche eine der Stellen P_i, Q_j, — diese Stelle möge P_1 sein, — im Innern enthält. In ähnlicher Weise sei Φ_q die erste Φ_n, welche ein Q_j, — diese Stelle heiße Q_1, — umfaßt. Dann wird $p \leqq q$ sein.

Der Punkt Q_1 liegt nun in einem bestimmten $S_k^{(q)}$, während P_1 sich in der Projektion dieses Gebiets auf ein anderes Blatt von Φ_{q-1} resp., falls $S_k^{(q)}$ einen Verzweigungspunkt enthalten sollte, möglicherweise in einem anderen Blatte von $S_k^{(q)}$ befindet. Jetzt verbinde man Q_1 mit $a_k^{(q)}$ mittels einer in $S_k^{(q)}$ verlaufenden Kurve. Dieser Kurve entspricht dann als Projektion eine zweite von P_1 aus laufende Kurve, welche zu einem unter $a_k^{(q)}$ liegenden Punkte R hinführt. Da nun $F(t)$, auf Φ bezogen, sich in R analytisch verhält, in $a_k^{(q)}$ aber einen Pol hat, wird klar, daß $F(t)$, auf F betrachtet, in den beiden Um-

gebungen von P, Q identisch gleiche Werte nicht annehmen kann, w. z. b. w.

Erstreckt sich dagegen die Reihe der Bereiche $S_k^{(n)}$ ins Unendliche, so läßt sich eine unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n F_n(t), \qquad C \neq 0,$$

bilden, welche, auf Φ bezogen, in einem beliebigen, nebst seinem Rande innerhalb Φ gelegenen, keinen der Punkte $a_k^{(n)}$, c_i im Innern noch am Rande enthaltenden Bereiche Σ gleichmäßig konvergiert.

In der Tat umgebe man zunächst jeden Punkt c_i mit einem Kreise K_i vom Radius ϱ_i derart, daß K_i, als zur Fläche Φ gehörig betrachtet, weder einen weiteren Punkt c_j noch einen Punkt $a_k^{(n)}$ im Innern oder am Rande enthält. Sei $K_i^{(n)}$ ein konzentrischer Kreis vom Radius $\varrho_i^{(n)} = \varrho_i / n$.

Fernerhin umgebe man $a_k^{(n)}$ mit einem Kreise $\mathfrak{K}_k^{(n)}$, dessen innere und Randpunkte innerhalb Φ_n liegen und welcher, als Stück der Fläche Φ betrachtet, mit keinem anderen Kreise $\mathfrak{K}_k^{(l)}$, $l \leqq n$, und ebensowenig mit einem K_p zusammenstößt.

Sei ν eine willkürliche natürliche Zahl, und sei S_ν der Bereich, der entsteht, indem man die Kreisscheiben $\mathfrak{K}_k^{(\nu)}$, sowie solche $K_i^{(\nu)}$, resp. Teile davon, welche in Φ_ν liegen, aus Φ_ν forthebt. Dann bleibt die Funktion F_ν, auf Φ verpflanzt, in S_ν stetig. Sei G_ν der Maximalwert von $|F_\nu|$ in S_ν. Es genügt nun offenbar, die Koeffizienten C_n als nicht verschwindende Größen so zu wählen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n| G_n$$

konvergiert.

In der Tat wird man ν so wählen können, daß der vorgegebene Bereich Σ innerhalb eines bestimmten S_ν zu liegen kommt. Dann wird an jeder Stelle von Σ

$$|F_n| < G_n, \qquad \nu \leqq n,$$

sein. Demgemäß genügt die obige Reihe dem Weierstraßschen Kriterium, Kap. 3, § 4,

$$|C_n F_n| \leqq M_n = |C_n| G_n, \qquad \nu \leqq n.$$

Die durch die Reihe definierte Funktion $F(t)$, auf die Fläche F verpflanzt, ist von derselben Beschaffenheit, wie die vorhin erhaltene Funktion $F(t)$, sie ist nämlich daselbst eindeutig und bis auf Pole

analytisch, und in übereinander liegenden Blättern nimmt sie niemals identisch gleiche Werte an. Nur in einem Punkte kann es der Funktion $F(t)$ noch mißlingen, alle Bedingungen des Satzes zu erfüllen. Es kann nämlich vorkommen, daß die Fläche F zum Teil oder ganz von analytischen Kurven berandet ist. Dann könnte sich die Funktion $F(t)$ über diese Ränder hinaus analytisch fortsetzen lassen.

Dieser Fall kann nicht eintreten, wenn die den Punkten $a_k^{(n)}$ entsprechenden Punkte von F sich längs eines solchen Randstücks häufen. Ist dies nicht bereits der Fall, so kann man zu den früheren Punkten $a_k^{(n)}$ in leicht ersichtlicher Weise noch weitere Punkte hinzunehmen, derart, daß die Bildpunkte der also ergänzten Punkte $a_k^{(n)}$ mit wachsendem n sich in den betreffenden Randpunkten häufen.

Eine ähnliche Ergänzung ist auch im Falle einer endlich abbrechenden Reihe $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ nötig, sofern $\omega(z)$ die gewünschte Funktion deshalb nicht liefert, weil $\omega(z)$ über die Fläche F hinaus analytisch fortgesetzt werden kann.

Man kann aber auch von vornherein vermöge der Thetareihen eine Funktion $F_0(t)$ aufstellen, welche Pole aufweist, deren Bildpunkte auf F sich in jedem solchen Randpunkte häufen, und welche sonst, auf F bezogen, eindeutig und in jedem gewöhnlichen Punkte analytisch, und in den Verzweigungspunkten endlicher Ordnung stetig ist bzw. unendlich wird. Diese Funktion werde dann zum ersten Gliede der $F(t)$ definierenden Reihe genommen, wobei nun $a_k^{(n)}$ stets so gewählt werde, daß die Projektion dieses Punktes auf die schlichte Zahlenebene mit der Projektion eines Poles der auf F verpflanzten Funktion F_0 auf diese Ebene niemals zusammenfällt.

Hiermit ist auch dieser letzte Punkt erledigt, und der Beweis ist nun vollständig erbracht.[1])

1) Den hier mitgeteilten Beweis habe ich ins Einzelne durchgeführt, ehe mir die Untersuchungen von Herrn Freundlich, *Analytische Funktionen mit beliebig vorgeschriebenem unendlich-vielblättrigem Existenzbereiche*, Göttinger Dissertation, 1910, bekannt waren. Abgesehen davon, daß die Fragestellung von Herrn Freundlich weniger scharf getroffen wird, sowie daß bei ihm eine genügende Konstruktion der in Betracht kommenden Riemannschen Flächen fehlt, läßt seine Beweisführung namentlich Funktionen zu, welche in verschiedenen Blättern der vorgelegten Fläche F identisch gleiche Werte annehmen und somit nicht zur Fläche gehören. Demgemäß kann man ihm eine Lösung der vorstehenden Aufgabe nicht zuerkennen.

Auf ganz andere Weise will Koebe den Satz beweisen, *Comptes Rendus*, Bd. 148 (1909), S. 1446. Indessen fehlt bei ihm ebenfalls ein konstruktiver Prozeß, wodurch seine Flächen F_n geliefert werden.

Namen- und Sachregister.

L

T

U

Berichtigungen.

S. 59, Z. 3 v. o., statt „subsum-" lies „subsu-".
S. 95, Z. 2 v. u., (Anm.), statt „anderer" lies „andere".
S. 160, Z. 8 v. u., statt „von T" lies „von T,".
S. 174, Z. 10 v. o., statt „nicht trifft" lies „trifft".
S. 186, Z. 3 v. u., da soll kein neuer Paragraph begonnen werden.
S. 187, Z. 14 v. o., statt „Fall." lies „Fall".
S. 312, Z. 13, 14 v. o., lies „gezeigt".
S. 330, Z. 1 der Anm., statt „Meray" lies „Méray".
S. 345, Z. 3 der Anm., statt „§ 9" lies „§ 10".
S. 433, Z. 10 v. u., statt „Das Ergebnis" lies „Das letzte Ergebnis".
S. 445, Z. 15 v. u., statt „gilt auch" lies „gilt offenbar auch".
S. 462, Z. 3 der Anm., statt „algebriques" lies „algébriques".
S. 495, Z. 7 v. o., statt „den" lies „dem".
S. 497, Z. 9 v. u., statt „doppelt periodische" lies „doppeltperiodische".
S. 513, Z. 11 v. u., statt $\frac{1}{(z-\Omega^2)}$ lies $\frac{1}{(z-\Omega)^2}$.
S. 525, Z. 9 v. o., statt „Satz 1." lies „1. Satz.".
S. 528, Z. 4 v. o., statt „Satz 3." lies „3. Satz.".
S. 537, Z. 4 v. o., statt a_{2k+1} lies a_{2k-1}.
S. 679, Z. 3 v. u., statt „Kellog" lies „Kellogg".
S. 699, Z. 1 der Anm., statt „Ein" lies „Einen".


STANFORD UNIVERSITY
3 6105 00018 7950




STANFORD UNIVERSITY
3 6105 00018 7950